МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «ЧЕЧЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АХМАТА АБДУЛХАМИДОВИЧА КАДЫРОВА»
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УНИВЕРСИТЕТ ИННОПОЛИС

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК И ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Материалы Всероссийской научно-практической конференции (19–22 апреля 2026 г.)

Под редакцией М.Р. Таштамирова

Грозный
Издательство ЧГУ им. А.А. Кадырова
2026

УДК 51+53+004.8
ББК 22.1+22.3+32.813

Конференция поддержана Чеченским государственным университетом им. А.А. Кадырова

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ

Председатель:
Саидов Заурбек Асланбекович
Сопредседатели:
Таштамиров Магомед Русланович, Дахкильгова Камила Багаудиновна
Члены оргкомитета:
Джабраилов Ахмед Лечаевич, Албогачиева Лиза Алаудиновна, Алероев Муслим Ахметханович, Гайрабекова Тамара Израиловна, Гишларкаев Ваха Исаевич, Гузуева Элина Руслановна, Хамидова Таус Андиевна, Хасанов Асламбек Идрисович, Исаев Мовлади Исаевич, Куликова Малика Хусаиновна

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

Председатель:
Бухштабер Виктор Матвеевич
Члены программного комитета:
Абдулагатов Ильмутдин Магомедович, Асхабов Султан Нажмудинович, Ашхотов Олег Газизович, Белов Алексей Яковлевич, Борисов Денис Иванович, Вербенко Илья Александрович, Гасников Александр Владимирович, Дадашев Райком Хасимханович, Камилов Ибрагимхан Камилович, Кусраев Анатолий Георгиевич, Кутуев Руслан Азаевич, Магомадов Рукман Масудович, Мамий Дауд Казбекович, Муравник Андрей Борисович, Муртазаев Акай Курбанович, Попель Петр Станиславович, Псху Арсен Владимирович, Резниченко Лариса Андреевна, Семенов Алексей Львович, Скубачевский Александр Леонидович, Солдатов Александр Павлович, Хайрулин Рашид Амирович, Сигов Александр Сергеевич

ISBN 978-5-91127-492-4

Современные проблемы физико-математических наук и искусственный интеллект: материалы Всероссийской научно-практической конференции [Электронное издание] (Грозный, 19–22 апреля 2026 г.). – Грозный: Издательство ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова», 2026. – 236 с.

В настоящем сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Всероссийской научно-практической конференции «Современные проблемы физико-математических наук и искусственный интеллект», проводимой Чеченским государственным университетом им. А.А. Кадырова совместно с Российской академией наук и Университетом Иннополис. Тематика охватывает широкий спектр современных проблем математики, физики и информационных технологий.

Сборник предназначен для широкого круга читателей, интересующихся научными исследованиями и разработками, научных и педагогических работников, преподавателей, аспирантов и магистрантов с целью использования в научной работе и учебной деятельности.

Материалы конференции публикуются в авторской редакции. ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова» не несет ответственности за материалы, представленные авторами для очного и заочного участия в конференции.

© Коллектив авторов, 2026 г.
© ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова», 2026 г.

приоритет2030^
лидерами становятся

Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова

Российская академия наук

Университет Иннополис

СОДЕРЖАНИЕ

Абдулагатов И.М.
Фазовые переходы и критические явления:
Эксперимент, теория и моделирование…… **9**
Абдулла Д.А.
Роль популярных математических головоломок в развитии
математического мышления среди сирийских школьников…… **12**
Абубакаров М.С.-С., Мисербулатов И.И., Гараев А.Х.
Применение методов математической статистики
при анализе образовательных данных…… **14**
Алдохина Д.В., Болдырев С.Б.
Использование метапутей в графовых нейронных сетях
для обнаружения финансового мошенничества…… **16**
Аллеманд А.О.
Оценка распределения трещин по размерам и
ориентациям по данным о следах трещин…….. **19**
Алтухов В.И., Семенов Д.В.
Пьезотранзисторы на гетероструктурах SiC…… **21**
Антонов В.В., Яковенко В.С., Волошин Д.Г. (публикация отозвана 22.09.2026)
Обеспечение информационной безопасности канала управления группой БПЛА
путем защиты протокола MAVLink от атак перехвата и подмены команд…… **23**
Арянов В.А., Кистенев К.Д., Лапин К.С.
Частичная эквиограниченность и частичная эквиограниченность
в пределе решений с частичным контролем предысторий…… **26**
Асхабов С.Н.
Обобщенные интегральные операторы Абеля
на всей прямой в пространстве Лебега…… **29**
Асхабов С.Н., Куликова М.Х.
О глобальной разрешимости нелинейных уравнений
с интегралами дробного порядка Римана-Лиувилля…… **32**
Ашхотов О.Г., Ашхотова И.Б., Магкоев Т.Т., Меляжев А.А.
Поверхностная сегрегация в бинарных твердых сплавах…….. **35**
Аюбов С.-М.М.
Исследование методов повышения интерпретируемости сверточных
нейронных сетей при решении задач медицинской диагностики…… **38**
Аюбов С.-М.М., Хунариков М.-Э.А.
Исследование сочетания генеративных состязательных сетей
и диффузионных моделей фотореалистических изображений…… **41**
Барабаш О.П., Половинкина М.В., Половинкин И.П.
Об увеличении порядка аппроксимации в одном семействе разностных
схем для диффузионно-логистического уравнения…… **44**
Батаева П.С.
Принцип работы нейросети в решении проблемы языкопонимания…… **46**
Белецкий А.
Вопросы канонической формы в группах отрицательной кривизны…… **49**
Белый А.А., Канель-Белов А.Я., Рухович Ф.Д., Тиморин В.А.
Существование апериодической точки во внешнем бильярде
около правильного многоугольника (кроме n=3,4,6)…… **51**
Бештоков М.Х.
Разностная схема повышенной точности для интегро-дифференциального
уравнения гиперболического типа…… **53**

Бештокова З.В.
Численный метод решения третьей краевой задачи
для многомерного уравнения параболического типа……. **55**
Борисов Д.И.
Пространства типа Орлича, связанные с нелинейными
нелокальными функционалами…… **57**
Бухштабер В.М.
Комбинаторная геометрия и спектральная теория фуллеренов…… **58**
Васильев В.Б., Муджтаба Явар, Тарасова А.С.
О разрешимости дискретных уравнений в конусе……. **59**
Гадзова Л.Х.
Об асимптотике фундаментального решения обыкновенного
дифференциального уравнения с оператором дробного
дискретно распределенного дифференцирования…….. **62**
Гайрабеков Р.Х.
Использование компьютерных технологий в биологических науках:
современные достижения и перспективы…… **64**
Гайрабекова Ф.Р., Гайрабеков Р.Х.
Риски и перспективы, связанные с развитием и
внедрением искусственного интеллекта……. **67**
Гайрабекова Р.Х.
Цифровизация в области микробиологических исследований:
новые горизонты науки……. **70**
Гайрабекова Т.И., Гишкаева Л.С., Исаева Л.М.
Роль цифровых технологий при проведении исследований в растениеводстве……. **73**
Гайрабекова Ф.Р., Лискани С.А.-А., Гайрабекова Т.И.
Цифровые технологии в кардиологии……. **76**
Гасников А.В.
Что такое сложность задач оптимизации?…….. **79**
Гишларкаев В.И.
Метод преобразования Фурье для полулинейных
уравнений в частных производных……. **80**
Глазунова Е.В., Лымарь Д. В., Хасбулатов С.В.
Особенности структуры и свойств керамики на основе
BNT-KNN, модифицированной ферритом висмута…… **83**
Дадашев Р.Х., Элимханов Д.З., Дадашева З.И.,
Умархаджиев Х.С., Имхаджиев Ш.И.
Планирование эксперимента при исследовании зависимости поверхностного
натяжения многокомпонентных растворов от состава…….. **86**
Датаев А.А.
Персонализация обучения с помощью адаптивных
образовательных платформ на базе искусственного интеллекта…….. **90**
Джабраилов А.Л.
Методика решения интегро-дифференциальных уравнений
и нахождение неопределенных параметров…… **93**
Добрицын М.Д.
Субэкспоненциальные оценки в теореме Ширшова о высоте…….. **96**
Зайцев Р.В., Аллеманд А.О.
Группы монодромии и неразрешимость трансцендентных уравнений в квадратурах….. **98**
Исаев М.И., Тукаева Р.Л., Темергаев Р.А.
Применение инструментов Excel в разработке шаблонов обработки
выборочных данных для мониторинга состояния лесных насаждений…… **100**

Исаева Л.М.
Модель цифровой трансформации педагогического управления исследовательской деятельностью в естественно-научном образовании…… **102**
Казакевич К.И., Шабров С.А.
Достаточные условия слабого экстремума функционала с производными Радона-Никодима…….. **105**
Кайгермазов А.А., Есанкулова М.Х.
Непрерывная популяционная модель типа «ресурс-потребитель»…… **108**
Калмыков Р.М., Кармоков А.М., Хасанов А.И.
Исследования химического состояния и фазового состава сплавов PbTe-CdSe методами рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии…… **110**
Круглышев А.В.
Построение и минимизация моделей Лама, ассоциированных с точками лагранжевого грассманиана…… **114**
Кудаева Ф.Х., Нагоров А.Л.
Математическая модель плавления полимерных материалов…… **116**
Лапин К.С.
Критерий частичной равномерной ограниченности и частичной равномерной ограниченности в пределе решений с частичным контролем предысторий…… **119**
Лорсанова З.М., Эдиев Б.Р. (публикация отозвана 22.09.2026)
Разработка алгоритма расчета сердечного ритма…… **122**
Магомедов И.А., Матыгов М.М., Тахаев У.Р.
Колеса на проходимость мобильного устройства с колесно-шагающим механизмом…… **125**
Мадаев С.М., Исраилов Р.Ю.
Анализ современных стратегий кэширования в веб-API: от статических правил к предиктивным моделям…….. **128**
Мажгихова М.Г.
О внутреннекраевой задаче для дифференциального уравнения с производной Джрбашяна-Нерсесяна…… **131**
Маковецкий В.И.
Тождество Эйлера, приводящее к дробной производной Эрдейи – Кобера от гипергеометрических функций…….. **133**
Маркелов Ю.С., Садовничий А.Ю.
К вопросу о разбиении фигур на равные части…….. **136**
Масаева О.Х.
Вторая краевая задача для обобщенного уравнения Пуассона в четверти плоскости…… **138**
Махамуд А.А., Шишкина Э.Л.
Об интегральном преобразовании для оператора второго порядка с переменными коэффициентами…… **140**
Махмудова Т.Х.
Роль и влияние искусственного интеллекта на современную экономику…… **143**
Менциев А.У.
Искусственный интеллект как когнитивно-аналитический посредник в бизнес-аналитике…… **146**
Менциев А.У., Эдилов М.И. (публикация отозвана 22.09.2026)
Искусственный интеллект как когнитивно-управленческий посредник в системе поддержки принятия решений в образовании…… **149**
Минаев О.М., Умалатов С.Д.
Архитектурные механизмы возникновения фактологических ошибок в генерации мультимодальных языковых моделей…… **152**

Минаев О.М.
Методы гибридной индексации и интеграции графовых знаний
для повышения эффективности поиска в системах RAG..... **155**
Мусаева Б.М.
Внедрение алгоритмов искусственного интеллекта в электронную коммерцию..... **158**
Мусаева Х.М.
Применение искусственного интеллекта в управлении персоналом..... **161**
Мустафаев Г.А., Хасанов А.И., Мустафаев А.Г.
Диффузия ионно-имплантированного мышьяка в кремний..... **164**
Муцуров Э.Ю., Муцурова З.М. (публикация отозвана 22.09.2026)
Цифровые двойники в естественных науках:
трансформация исследовательских парадигм..... **168**
Муцурова З.М. (публикация отозвана 22.09.2026)
Применение методов машинного обучения в
задачах современной биоинформатики..... **171**
Нилов Ф.К.
О семействах подобных конических сечений, касающихся данных окружностей..... **174**
Петренко В.И., Сутормин М.П.
Применение алгоритмов комбинаторной оптимизации для
планирования маршрутов группы гетерогенных агро-БПЛА
с учётом интегрального критерия доверенной эффективности..... **175**
Радкевич Е.В., Васильева О.А.
О неустойчивости положений равновесия в 6-скоростной
модели дискретной кинетики..... **178**
Романов Н.А., Пересадин Г.М.
Диаграммы узлов и их действия на представления
соотношений между соотношениями в группах..... **180**
Семенов А.Л., Рудченко Т.А.
Математическое мышление расширенной личности..... **182**
Семенов Д.В.
Модель гигантского усиления диэлектрической
проницаемости твердых растворов на основе SiC..... **185**
Солдатов А.П.
Граничные свойства интегралов с однородными разностными ядрами..... **187**
Сопова Т.В.
Об условиях разрешимости эллиптических уравнений в конусе..... **188**
Тимаев Д.Х., Гериханов З.А., Ойсаев И.И.
Онтологический подход к построению интеллектуальных диалоговых систем..... **191**
Токарев Д.А.
Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения..... **194**
Умаров Х.Г.
Существование глобального решения и разрушение решения для
нелинейного уравнения Тимошенко изгибных колебаний стержня..... **196**
Умархаджиев М.-Х.Р., Оздиева С.С.
Анализ эффективности применения методов искусственного
интеллекта в оптимизации закупочной деятельности малого бизнеса..... **200**
Хайманов С.А.
Геометрические особенности частиц и структура поверхности материалов на
основе ферритов – гранатов и ферритов шпинелей в конденсированном состоянии..... **203**
Хамуд Ж., Белов А.Я.
Индекс экстремаля-Гутмана для деревьев катерпилдера
с заданной последовательностью степеней..... **206**

Хасбулатов С.В., Дудкина С.И., Резниченко Л.А.,
Фазообразование и особенности физических свойств функциональных керамических материалов на основе феррита висмута и титанатов бария-стронция…… **209**
Худалов М.З.
Об одном методе решения нелокальной краевой задачи для уравнения параболического типа…….. **211**
Хусаинов И.Р., Гериханов З.А.
Сравнительный анализ методов аугментации и нормализации изображений для улучшения сходимости и обобщающей способности сверточных сетей в условиях малых выборок…… **213**
Хуштова Ф.Г.
Об обращении преобразования Лапласа одной функции, содержащей гиперболический тангенс…… **216**
Шахбиев Д.О.-Х., Магомедов И.А., Шахбиева А.О.-Х.
Применение методов TinyML для обнаружения аномалий на маломощных микроконтроллерах…… **218**
Шахбиев Д.О.-Х., Шахбиева А.О.-Х., Илаева З.М.
Применение ансамблевых методов машинного обучения в оценке рисков экономической безопасности хозяйствующих субъектов…… **221**
Шмаль И.О.
О разрешимости модельных эллиптических уравнений в конусе…… **224**
Шостак Н.А.
Нелинейная динамика гидратообразования: многоуровневое физическое описание и критерии устойчивости…… **226**
Элежбиев Б.Э. (публикация отозвана 22.09.2026)
Оценка эффективности использования мобильных приложений в учебном процессе…….. **228**
Юань Б., Керимбаев Р.К.
Некоторые вопросы алгебраичности полиномиальных автоморфизмов…… **231**
Юсупова А.С., Альтемиров М.-Э.Р.
Методы машинного обучения для анализа и прогнозирования данных, естественно-научных, экспериментов…….. **233**

УДК 536.7

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ И КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ: ЭКСПЕРИМЕНТ, ТЕОРИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

Абдулагатов И.М.,
профессор, заведующий кафедрой физической и органической химии
ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный университет»;
Институт проблем геотермии и возобновляемой энергетики – филиал ОИВТ РАН,
г. Махачкала

Аннотация. *В работе рассматриваются вопросы, связанные с критическими и сверхкритическими состояниями вещества, которые находят применение в различных технологических процессах.*
Ключевые слова: *критические и сверхкритические состояния вещества, фазовые переходы.*

PHASE TRANSITIONS AND CRITICAL PHENOMENA. EXPERIMENT, THEORY, AND MODELING

Abdulagatov I.M.,
Professor, Head of the Department of Physical and Organic Chemistry
Dagestan State University
Institute of Geothermy and Renewable Energy Problems – Branch of the Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences, Makhachkala

Abstract. *The paper discusses issues related to critical and supercritical states of matter, which are used in various technological processes.*
Keywords: *critical and supercritical states of matter, and phase transitions.*

В последние годы критические и сверхкритические состояния вещества широко используются в различных технологических процессах благодаря их применимости в синтезе материалов, биоэнергетике, переработке отходов, аккумулировании тепловой энергии, передовых системах теплопередачи, химической переработке, нефтегазовой промышленности (например, методы повышения нефтеотдачи и термические методы извлечения тяжёлой нефти), рациональном проектировании химических реакторов, оборудовании для высокоплотной экстракции и разделения, использовании геотермальной энергии (в качестве заменителя воды), а также в фармацевтических, пищевых и медицинских приложениях.

Однако фундаментальное термодинамическое поведение сверхкритических флюидов на микроскопическом уровне остаётся недостаточно изученным, что ограничивает надёжное внедрение технологий сверхкритических флюидов, особенно в области сильно развитых флуктуаций плотности (параметра порядка), где наблюдается «фазовый переход» системы из «жидкоподобного состояния» в «газоподобное» (вблизи линии Видома). Вблизи линии Видома в сверхкритических флюидах наблюдается резкое аномальное изменение всех термодинамических и транспортных свойств [1], что приводит к изменению технологических условий (параметров) процессов. Это стало одним из наиболее перспективных направлений исследований для ядерных реакторов четвёртого поколения.

В данной работе мы фокусируемся на экспериментальных исследованиях и теоретических моделях описания аномального поведения термодинамических и транспортных свойств сверхкритических флюидов, представляющих особый интерес как в фундаментальных исследованиях, так и в технологических приложениях. Для эффективного использования критических аномалий термодинамических и транспортных свойств в сверхкритических энергетических циклах необходимо понимать на микроскопическом уровне физические механизмы, определяющие поведение флюида в сверхкритическом режиме, особенно в окрестности линии Видома.

Технология сверхкритических флюидов привела к существенным улучшениям эффективности технологических процессов, включая промышленное оборудование для экстракционных и сепарационных процессов, проектирование ядерных и химических реакторов нового поколения, оборудование для дистилляции и методы повышения нефтеотдачи, где сверхкритические флюиды служат вытесняющими агентами для смешивающегося вытеснения тяжёлых углеводородов из глубоких подземных нефтяных резервуаров. Эти достижения обусловлены уникальными физическими (термодинамическими и транспортными) свойствами сверхкритических флюидов, которые чрезвычайно благоприятны для практических применений.

Сверхкритические флюиды широко исследуются в силу их двойной значимости для фундаментальной науки и промышленных инноваций. Многие природные и технологические процессы протекают в сверхкритических условиях. Растущий научный и промышленный интерес к сверхкритическим флюидам обусловлен их уникальными аномальными термодинамическими и транспортными свойствами вблизи критической точки, которые существенно влияют на проектирование и оптимизацию энергетических циклов. Проектирование и эксплуатация природных углеводородных и геотермальных резервуаров требуют тщательного понимания физических процессов, происходящих в глубоких недрах. Состав пластового флюида, термодинамические свойства и фазовое поведение при повышенных давлении и температуре (т. е. в сверхкритических условиях) являются критически важными входными данными для передовых технологий добычи газоконденсата. С увеличением глубины резервуара тяжёлые углеводороды, обычно находящиеся в парообразной фазе в пластовых условиях, могут подвергаться ретроградной (обратной) конденсации при падении давления в процессе добычи, сначала в стволе скважины, а затем в самом резервуаре. Это может привести к выпадению жидкости в поровом пространстве, вызывая закупорку и снижение газового потока, что снижает эффективность добычи. Точное прогнозирование динамических изменений в газоконденсатных резервуарах требует детального знания фазового поведения сложных многокомпонентных систем. Эффективность вытеснения нефти на основе сверхкритических флюидов существенно зависит от фазового поведения смесей «сверхкритический флюид – сырая нефть» в процессе вытеснения, особенно вблизи критической линии. Критические и сверхкритические явления играют ключевую роль в процессах вытеснения нефти (повышения нефтеотдачи пластов) и переработке угля. Тем не менее фундаментальные аспекты термодинамического поведения бинарных смесей «сверхкритический флюид + углеводород» вблизи критической точки чистого растворителя и вдоль критической линии остаются плохо изученными и требуют систематического исследования.

Несмотря на значительный прогресс в понимании термодинамических свойств флюидов в критическом и сверхкритическом состояниях, современных знаний недостаточно для надёжного прогнозирования их поведения в условиях высокой сжимаемости в около- и сверхкритических состояниях, особенно вблизи линии Видома, имеющей большое научное и практическое значение. Теплофизические свойства сверхкритического флюида резко изменяются при переходе в сверхкритический режим (т. е. в область Видома), где возникают «жидкоподобные» и «газоподобные» состояния. Сверхкритические флюиды демонстрируют кроссовер между этими двумя типами поведения при пересечении окрестности линии Видома, что приводит к резким изменениям свойств в узких температурных диапазонах. Эти переходы обусловлены сильными критическими флуктуациями (критическим усилением), приводящими к высоким коэффициентам теплопередачи, что позволяет существенно уменьшить толщину стенок и размеры реакторов при работе под высоким давлением.

Сверхкритические флюиды также стали объектом растущего научного интереса в силу их роли в природных процессах и новых применениях в экологически безопасном уничтожении токсичных и опасных отходов. Поэтому особое место в докладе будет уделено фундаментальным вопросам современной теории критических явлений, а именно: кроссоверным явлениям (скейлингового типа уравнений состояния [2]), незавершённому и

завершённому скейлингу [2], кроссоверному описанию транспортных свойств сверхкритических флюидов [3], асимметрии кривой фазового перехода жидкость-газ. В докладе также будет представлено детальное обсуждение фундаментальных вопросов критических явлений и фазовых переходов в бинарных системах, теории изоморфизма критического поведения бинарной системы (Фишеровская перенормировка критических показателей), поведения критических линий, классификации и типов фазовых диаграмм, микроструктуры сверхкритических флюидов, которая чрезвычайно чувствительна к температуре и давлению в сверхкритических условиях.

Несмотря на актуальность сверхкритических флюидов в природных системах (включая биологические системы) и технологических приложениях в медицине, сверхкритическое состояние остаётся не до конца изученным.

Список литературы

1. Polikhronidi N.G., Batyrova R.G., Aliev A.M., Abdulagatov I.M. Supercritical CO2. Properties and technological applications- Review // J. Thermal Sciences. 2019. V. 28. – P. 394–430.
2. Belyakov M. u., Batyrova R.G., Ibavov N.V., Abdulagatov I.M. Experimental Validation of the Complete Scaling Fundamental Principles in the Theory of Critical Phenomena // Journal of Molecular Liquids. 2026. 129035.
3. Perkins R.A., Sengers J.V., Abdulagatov I.M., Huber M.L. Critical thermal-conductivity enhancement in molecular fluids// Int. J. Thermophys. 34 2013. Vol. 34. – P. 191–212.

УДК 517

РОЛЬ ПОПУЛЯРНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ГОЛОВОЛОМОК В РАЗВИТИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ СРЕДИ СИРИЙСКИХ ШКОЛЬНИКОВ

Абдулла Д.А.,
аспирант кафедры дискретной математики
МФТИ (Московский физико-технический институт)
e-mail: abdulla.d@phystech.edu

Аннотация. *В данной работе представлен обзор состояния математического образования в сирийских школах, а также исследуется влияние использования популярных математических головоломок на математическое мышление учащихся. Применён парный экспериментальный дизайн (предтест/посттест с контрольной группой) на выборке учащихся шестого класса школы «Леди Мария» в Сирии. В исследовании оценивались навыки решения задач и математические умения учащихся, а результаты были проанализированы с использованием t-критерия. Полученные результаты свидетельствуют о положительном влиянии математических головоломок на развитие математического мышления учащихся.*
Ключевые слова: *математическое мышление, преподавание, образование, головоломки, Сирия, школьники.*

THE ROLE OF POPULAR MATHEMATICAL PUZZLES IN DEVELOPING MATHEMATICAL THINKING AMONG SYRIAN SCHOOLCHILDREN

Abdullah D.A.,
PhD Student, Department of Discrete Mathematies
Moscow Institute of Physics and Technology (MIPT)

Abstract. *In this paper we present an overview of mathematics education in Syrian schools and investigates the effect of using popular mathematical puzzles on students' mathematical thinking. A paired experimental design (pre-test/post-test with a control group) was applied to a sample of sixth-grade students at Lady Mary School in Syria. The study evaluated students' problem-solving abilities and mathematical skills, with results analyzed using a t-test. Findings indicate the impact of mathematical puzzles on enhancing students' mathematical thinking.*
Keywords: *mathematical thinking, teaching, education, puzzles, Syria, schoolchildren.*

In this paper we provide a good overview of the problems and the background of mathematics education in Syrian schools. We aimed to study the effect of using popular mathematical puzzles on the mathematical thinking of schoolchildren, by conducting a paired experimental study (pre-test and post-test control group design) of the data we obtained through a sample taken from students of sixth-grade primary school students in Syria the Lady Mary School in Syria, in order to evaluate the extent of the impact of popular mathematical puzzles on students' ability to solve problems and mathematical skills, and then the skills were measured and the results were analyzed using a t-test as a tool for statistical analysis.

For this study, the researchers designed and developed a series of popular puzzles to be used as the primary pedagogical tool for the experimental group. These puzzles were not merely supplementary activities; they were integrated into the learning process as tasks aligned with the specific learning objectives of the unit being taught (natural and integer numbers). The puzzles served both as a teaching medium and as a formative assessment tool, allowing the researcher to monitor students' problem-solving processes and reasoning.

Taken together, the descriptive statistics, hypothesis tests, confidence interval, and power analysis provide converging evidence that the puzzle-based teaching method had a positive and statistically significant impact on students' performance in the unit on natural and integer numbers. Assuming that the test used is a valid measure of mathematical thinking and mental arithmetic ability, the results support the conclusion that popular mathematical puzzles can effectively enhance these cognitive skills among sixth-grade Syrian students (Abdullah et al., 2025).

The study contributes valuable knowledge to the field of mathematics education, especially concerning teaching in difficult circumstances and the potential of alternative pedagogical tools. We conducted a research study to evaluate the impact of using popular mathematical puzzles on the mathematical thinking of elementary school students.

The results remained statistically and practically significant, suggesting that puzzle-based math learning enhances understanding and math skills more effectively than traditional methods and increases students' problem-solving abilities. These findings highlight the potential of innovative teaching strategies in math education and call for a broader exploration of interactive methods such as puzzles.

This study had a good power (between 80% and 90%), we can be more confident in our conclusion that the puzzle-based learning method (Group B) resulted in significantly higher scores. Therefore, the study's power emphasizes reliability, and the results call for the integration of puzzle-based methods in math education. The results showed a positive impact of puzzles, offer practical and relatively low-cost strategies for teachers working in resource-constrained and challenging environments. This is a significant plus for journals looking for research with actionable insights.

Joint work with A.Ya. Kanel-Belov.

Список литературы

1. Kubinova M., Novotna J., Littler G.H. Projects and Mathematical Puzzles – a Tool for Development of Mathematical Thinking // European Research in Mathematics Education. 1998. Vol. I–II. Group 5. https://www.researchgate.net
2. Mendenhall W., Beaver R.J., Beaver B.M. Introduction to Probability and Statistics. 13th ed. USA: Cengage Learning. 2008. ISBN 0495389536.
3. Englert C., Miller D.J., Smaranda D.D. The Weinberg Angle and 5D RGE Effects in a SO(11) GUT Theory // Physics Letters B. 2020. https://doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135548
4. Popel M. The Methodical Aspects of the Algebra and Mathematical Analysis Study Using the SageMath Cloud // Information Technologies in Education. 2014. No. 19. P. 93–100. https://doi.org/10.14308/ite000488
5. Abdullah D., Hamoud J. The Effect of Using Popular Mathematical Puzzles on the Mathematical Thinking of Syrian Schoolchildren // arXiv. 2025. arXiv:2510.26263. https://doi.org/10.48550/arXiv.2510.26263

УДК 519.23

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИ АНАЛИЗЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ДАННЫХ

Абубакаров М.С.-С.,
ассистент кафедры программирования и информационных технологий
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
Мисербулатов И.И.,
преподаватель первой квалификационной категории
ГБПОУ «Чеченский базовый медицинский колледж»
e- mail: *nmr-ibrgim95@mail.ru*
Гараев А.Х.,
бакалавр 3-го курса «Прикладная математика и информатика»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e- mail: *akhmed002004@mail.ru*

Аннотация. *В статье рассматриваются возможности применения методов математической статистики при анализе образовательных данных. Показано, что статистическая обработка результатов обучения позволяет выявлять устойчивые закономерности, оценивать эффективность образовательного процесса и принимать обоснованные управленческие решения. Рассматриваются основные статистические показатели, применяемые при анализе учебных данных, а также особенности их интерпретации. Отмечается значимость статистических методов для повышения объективности оценки образовательных результатов.*
Ключевые слова: *математическая статистика, образовательные данные, анализ результатов обучения, статистические показатели, эффективность обучения.*

APPLICATION OF MATHEMATICAL STATISTICS METHODS IN THE ANALYSIS OF EDUCATIONAL DATA

Abubakarov M.S.-S.,
Assistant, Department of Programming and Information Technologies
Kadyrov Chechen State University
Miserbulatov I.I.,
Lecturer of the First Qualification Category
Chechen Basic Medical College
Garayev A.Kh.,
3rd year Bachelor of «Applied Mathematics and Computer Science»
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *The paper discusses the application of mathematical statistics methods in the analysis of educational data. It is shown that statistical processing of learning outcomes makes it possible to identify stable patterns, assess the effectiveness of the educational process, and support informed decision-making. The main statistical indicators used in educational data analysis are considered, as well as the features of their interpretation. The importance of statistical methods for improving the objectivity of educational assessment is emphasized.*
Keywords: *mathematical statistics, educational data, learning outcomes analysis, statistical indicators, learning effectiveness.*

Современные образовательные системы уже давно перестали быть просто «хранилищем знаний». Вместе с ними растёт и объём данных, связанных с учебной деятельностью студентов. Результаты тестов, контрольных и разных форм аттестации формируют довольно внушительный массив информации, который, честно говоря, не так просто осмыслить без специальных подходов [2, 7]. Именно здесь начинают «включаться» методы математической статистики, позволяя хоть как-то упорядочить этот поток данных и извлечь из него смысл.

Если раньше оценка успеваемости во многом зависела от субъективного взгляда преподавателя, то сейчас всё чаще пытаются перейти к количественному анализу. Это повышает объективность (хотя и не делает её идеальной), а также даёт возможность учитывать не только средний уровень, но и разброс результатов [1, 6]. Впрочем, сами данные бывают разными: где-то это чёткие числовые показатели – баллы, оценки, а где-то – более размытые характеристики, вроде уровня подготовки или форм контроля. Из-за этого анализ иногда получается… не совсем ровным.

Как правило, начинают с базовых вещей: считают среднее значение, медиану. Чуть реже – дисперсию или стандартное отклонение, чтобы понять, насколько сильно различаются результаты внутри группы. И тут возникает интересная деталь: одинаковые средние значения могут скрывать совершенно разную картину распределения. В одной группе всё стабильно, в другой – разброс огромный, но итог вроде бы один и тот же.

Если двигаться дальше, анализ распределения результатов позволяет условно выделить группы студентов с разным уровнем подготовки. Хотя границы между ними не всегда очевидны, и это, конечно, добавляет путаницы. Тем не менее, такой подход помогает выявить проблемные зоны и лучше понять структуру учебного процесса – пусть и не без оговорок.

Отдельно стоит сказать про динамику результатов. Изучение изменений во времени даёт возможность заметить определённые тенденции: рост, спад, иногда – резкие провалы. Правда, объяснить их бывает сложно: факторов слишком много, и они не всегда лежат на поверхности [4, 7]. Тем не менее, такой анализ всё же помогает более гибко управлять образовательным процессом (или хотя бы пытаться это делать).

Сравнительный анализ учебных групп тоже активно используется. Сопоставление показателей позволяет оценить эффективность разных педагогических подходов, но тут важно учитывать сопоставимость условий. Если группы изначально разные, выводы могут оказаться, мягко говоря, не совсем корректными. Иногда об этом забывают – и статистика начинает выглядеть убедительнее, чем она есть на самом деле.

При всех возможностях статистических методов нельзя забывать об их ограничениях. Они дают обобщённую картину, в которой теряются индивидуальные особенности обучающихся. Поэтому любые результаты анализа нужно рассматривать в контексте конкретной образовательной ситуации, иначе можно прийти к довольно спорным выводам [1, 7].

На практике методы математической статистики применяются широко: анализ учебных данных, оценка эффективности программ, попытки улучшить педагогические технологии. Они действительно помогают принимать более обоснованные решения, хотя и не исключают ошибок (иногда даже наоборот).

В целом, роль статистических методов в образовании постепенно усиливается. Они позволяют по-новому взглянуть на процесс обучения, выявить некоторые закономерности и лучше понять структуру результатов. Возможно, дальнейшие исследования будут направлены на развитие этих подходов и их интеграцию в современные системы образовательной аналитики – хотя полной точности, наверное, всё равно добиться не получится.

Список литературы

1. Елисеева И.И. Эконометрика и анализ данных. – М.: Юрайт, 2022. – 448 с.
2. Орлов А.И. Прикладная статистика. – М.: Экзамен, 2019. – 528 с.
3. Лисицин В.Н. Математическая статистика и анализ данных. – М.: Академия, 2021. – 384 с.
4. Ширяев А.Н. Вероятность и статистика. – М.: МЦНМО, 2020. – 608 с.
5. Боровков А.А. Математическая статистика. – М.: Лань, 2018. – 416 с.
6. Федотова О.Д., Лопатин В.В. Статистические методы в педагогических исследованиях. – Ростов н/Д: Феникс, 2019. – 320 с.
7. Демиденко Е.З. Статистический анализ данных в прикладных исследованиях. – М.: Финансы и статистика, 2020. – 352 с.

УДК 004.032.26

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТАПУТЕЙ В ГРАФОВЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ ФИНАНСОВОГО МОШЕННИЧЕСТВА

Алдохина Д.В.,
студентка
Институт компьютерных технологий и информационной безопасности
ФГАОУ ВО «Южный Федеральный Университет»
e-mail: aldokhina@sfedu.ru
Болдырев С.Б.,
лаборант кафедры информационной безопасности информационных систем
ФГАОУ ВО «Южный Федеральный Университет»
e-mail: sanboldyrev@sfedu.ru

Аннотация. *В работе представлен обзор современных подходов к выявлению финансового мошенничества на основе графовых нейронных сетей с акцентом на модели, использующие метапути в гетерогенных графах. Показано, что метапутевое представление транзакционных данных позволяет учитывать семантику связей между клиентами, счетами, устройствами, адресами и торговыми точками, а также выделять структурные паттерны, слабо заметные в табличных признаках. На основе анализа публикаций сделан вывод, что метапути повышают информативность локального графового контекста, улучшают интерпретируемость результатов и способствуют выявлению редких мошеннических сценариев. Одновременно отмечены ограничения подхода, связанные с необходимостью конструирования метапутей, динамичностью мошеннических схем и требованиями к масштабируемости и объяснимости моделей в прикладных системах.*
Ключевые слова: *финансовое мошенничество, графовые нейронные сети, гетерогенные графы, метапути, обнаружение аномалий.*

METAPATH-BASED GRAPH NEURAL NETWORKS FOR FINANCIAL FRAUD DETECTION

Aldokhina D.V.,
student, Institute of Computer Technologies and Information Security
Southern Federal University
Boldyrev S.B.,
Laboratory Assistant, Department of Information Security of Information Systems
Southern Federal University

Abstract. *The paper presents a review of contemporary approaches to financial fraud detection based on graph neural networks, with an emphasis on models using meta-paths in heterogeneous graphs. It is shown that meta-path-based representation of transactional data makes it possible to capture the semantics of links among clients, accounts, devices, addresses, and merchants, as well as to identify structural patterns that are weakly expressed in tabular features. Based on the analysis of recent publications, it is concluded that meta-paths increase the informativeness of local graph context, improve interpretability, and facilitate the detection of rare fraudulent scenarios. At the same time, the limitations of the approach are identified, including the need for meta-path engineering, the dynamic nature of fraud schemes, and the requirements for scalability and explainability in practical systems.*
Keywords: *financial fraud, graph neural networks, heterogeneous graphs, meta-paths, anomaly detection.*

Выявление финансового мошенничества относится к числу значимых задач информационной безопасности, поскольку ошибки в оценке транзакционного риска приводят к прямым финансовым потерям, компрометации пользовательских данных и снижению доверия к цифровым платформам. В отличие от традиционных табличных моделей, графовые методы позволяют анализировать не только атрибуты отдельных операций, но и структуру взаимосвязей между объектами предметной области. Такой подход особенно важен для финансовых данных, где подозрительное поведение нередко проявляется не в одной транзакции, а в повторяющихся цепочках взаимодействий между клиентами, счетами, картами, устройствами, адресами и торговыми точками [2–4].

Гетерогенный граф транзакций удобно задавать в виде G=(V, E, φ, ψ), где V – множество вершин, E – множество ребер, φ определяет тип вершины, а ψ – тип отношения. В таком представлении вершины могут соответствовать пользователям, счетам, устройствам и мерчантам, а ребра – переводу средств, использованию общего устройства, привязке к адресу или взаимодействию с одной и той же торговой точкой. Важным свойством гетерогенного графа является наличие разных семантических маршрутов связи, поэтому для анализа применяются метапути – последовательности типов вершин и отношений, задающие составное отношение между объектами. Например, шаблон «пользователь – устройство – пользователь» отражает связь через общее устройство, а шаблон «пользователь – мерчант – пользователь» – через общую торговую точку [1, 5].

Использование метапутей позволяет рассматривать окружение узла не как случайный набор соседей, а как связи, имеющие конкретный смысл для анализа. Иначе говоря, модель учитывает не все объекты подряд, а только те, которые связаны с целевым узлом содержательно. Для задач обнаружения финансового мошенничества это особенно важно, поскольку подозрительная активность часто проявляется не в одной отдельной операции, а в повторяющихся схемах взаимодействия между пользователями, устройствами, адресами и торговыми точками. В этом случае метапуть помогает выделить такие маршруты и сделать локальный графовый контекст более полезным для анализа [2, 7].

В рассмотренных работах метапути способны использовать информацию о гетерогенности в графе для захвата сложных межузловых связей различных типов и паттернов транзакций, повышая релевантность и точность обнаружения. Подход на основе подграфов прост и удобен в использовании, подходит для быстрого захвата локальных поведенческих паттернов узлов. Сочетание метапутей и подграфов полностью использует информацию о гетерогенности и локальные структурные признаки. Метапути захватывают сложные отношения между различными типами и обеспечивают глобальный обзор. Подграфы фокусируются на локальных поведенческих паттернах и быстро идентифицируют признаки узлов. Комбинация обоих подходов позволяет модели обрабатывать как локальную информацию, так и использовать глобальную структуру, что значительно улучшает обнаружение мошенничества в сложных финансовых сетях. Другими словами, метапути могут быть полезны для выявления скрытых отклонений [2, 4, 7].

В то же время такой подход имеет недостатки. Качество обнаружения мошенничества зависит от того, насколько удачно выбраны сами метапути. Если шаблоны подобраны неудачно, модель может учитывать несущественные связи или, наоборот, пропускать действительно важные. Кроме того, мошеннические схемы со временем меняются, поэтому набор метапутей и сама модель требуют регулярного пересмотра при работе с новыми данными [3, 4, 6].

Таким образом, предложенный способ представляет собой перспективное направление для выявления финансового мошенничества в гетерогенных транзакционных средах. Его основное достоинство заключается в возможности объединения структурного анализа графа с учетом предметной семантики связей. Наибольший практический эффект такие модели дают в тех случаях, когда мошенническая активность распределена по нескольким типам сущностей и проявляется в повторяющихся схемах взаимодействия. В дальнейшем развитие данного направления связано с автоматизацией отбора метапутей, учетом временной динамики и повышением объяснимости моделей для задач финансовой безопасности.

Список литературы

1. Dong Y., Chawla N.V., Swami A. metapath2vec: Scalable Representation Learning for Heterogeneous Networks // Proceedings of the 23rd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. New York: ACM, 2017. P. 135–144. DOI: 10.1145/3097983.3098036.
2. Hu B., Zhang Z., Shi C., Zhou J., Li X., Qi Y. Cash-Out User Detection Based on Attributed Heterogeneous Information Network with a Hierarchical Attention Mechanism // Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. 2019. Vol. 33, № 1. P. 946–953. DOI: 10.1609/aaai.v33i01.3301946.
3. Kipf T. N., Welling M. Semi-Supervised Classification with Graph Convolutional Networks // Proceedings of the 5th International Conference on Learning Representations (ICLR). 2017.

4. Qian J., Tong G., Zhang C., He Y. Metapath-guided Graph Neural Networks for Financial Fraud Detection // Computers & Electrical Engineering. 2025. Vol. 126. Art. 110428. DOI: 10.1016/j.compeleceng.2025.110428.
5. Sun Y., Han J., Yan X., Yu P. S., Wu T. PathSim: Meta Path-Based Top-K Similarity Search in Heterogeneous Information Networks // Proceedings of the VLDB Endowment. 2011. Vol. 4, No. 11. P. 992–1003. DOI: 10.14778/3402707.3402736.
6. Veličković P., Cucurull G., Casanova A., Romero A., Liò P., Bengio Y. Graph Attention Networks // Proceedings of the 6th International Conference on Learning Representations (ICLR). 2018.
7. Wang X., Ji H., Shi C., Wang B., Cui P., Yu P. S., Ye Y. Heterogeneous Graph Attention Network // Proceedings of The World Wide Web Conference. New York: ACM, 2019. P. 2022–2032. DOI: 10.1145/3308558.3313562.

УДК 517

ОЦЕНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТРЕЩИН ПО РАЗМЕРАМ И ОРИЕНТАЦИЯМ ПО ДАННЫМ О СЛЕДАХ ТРЕЩИН

Аллеманд А.О.,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
e-mail: allansuleykin@gmail.com

Аннотация. *Работа посвящена восстановлению пространственного распределения трещин по данным о следах трещин в сечениях и скважинах. Авторы формализуют задачу через плотности распределения по ориентациям, длинам следов и радиусам трещин и показывают, что она естественно сводится к задачам томографии. Для восстановления распределения по ориентациям получены интегральные соотношения прямой задачи и формулы обращения, основанные на обратном преобразовании Радона на сфере. Для восстановления размеров дискообразных трещин выведены формулы связи между распределением радиусов и распределением длин следов, а затем получено решение совместной задачи по размерам и ориентациям. Отдельно подчеркивается, что предположение об эллиптических трещинах делает задачу в общем случае неоднозначной, поэтому для совместного восстановления необходимо предполагать дискообразность трещин.*
Ключевые слова: *трещины, томография, преобразование Радона, распределение по ориентациям, размеры следов.*

ESTIMATION OF THE DISTRIBUTION OF FRACTURES BY SIZES AND ORIENTATIONS BASED ON DATA ON FRACTURE TRACES

Allemand A.O.,
Lomonosov Moscow State University, Moscow

Abstract. *The paper studies how to reconstruct the spatial distribution of fractures from trace data obtained in sections and boreholes. The authors formalize the problem through density functions describing orientations, trace lengths, and fracture radii, and show that the resulting inverse problems naturally belong to tomography. For the reconstruction of orientation distributions, they derive direct integral relations and inversion formulas based on the inverse Radon transform on the sphere. For disc-shaped fractures, they also obtain formulas linking the distribution of radii with the distribution of trace lengths and then solve the joint problem of recovering both sizes and orientations. A central conclusion is that the assumption of elliptical fractures leads to non-uniqueness, whereas the disc model makes the inverse reconstruction mathematically tractable.*
Keywords: *fractures, tomography, Radon transform, orientation distribution, trace lengths.*

Исходная мотивация работы связана с моделированием трещиноватых горных массивов. На практике обычно наблюдаются не сами трещины, а их следы в сечениях породного массива либо пересечения со скважинами. Поэтому требуется восстановить пространственную картину по неполным наблюдениям, а сама постановка оказывается типичной обратной задачей томографии.

Сначала авторы рассматривают восстановление распределения трещин только по ориентациям. Для этого вводятся функции, описывающие среднее число пересечений скважины с трещинами, суммарную площадь трещин заданной ориентации в единице объема и суммарную длину следов в плоских сечениях. Прямая задача записывается в виде интегральных соотношений, после чего обратная задача сводится к обращению преобразования Радона на сфере. В результате получаются явные формулы для восстановления функции распределения по ориентациям.

Далее исследуется более сложная задача совместного восстановления размеров и ориентаций. Здесь ключевым является предположение о дискообразности трещин. Если допустить эллиптическую форму, то число параметров, описывающих трещину, превышает число параметров наблюдаемых следов, поэтому однозначное восстановление в общем случае

невозможно. Тем самым дисковая модель выступает не просто упрощением, а условием корректной постановки задачи.

Для случая параллельных дискообразных трещин выводится связь между распределением радиусов и распределением длин следов. Эта связь имеет абелев тип и также может быть интерпретирована через преобразование Радона. На этой основе авторы получают явные формулы обращения и восстанавливают распределение размеров по данным о длинах следов.

В общем случае совместное восстановление разбивается на два этапа: сначала по следам, параллельным выбранному направлению, определяется распределение радиусов, а затем для фиксированного радиуса восстанавливается распределение по ориентациям. Полученная схема дает формулы для функции S (n, r), задающей совместное распределение трещин по направлению нормали и размеру.

Практически важен и заключительный вывод статьи: учет не только количества следов, но и их ориентации делает оператор восстановления менее сингулярным и повышает точность реконструкции. Хотя все рассматриваемые обратные задачи остаются некорректными, использование более детальной геометрической информации заметно улучшает устойчивость восстановления.

Работа выполнена совместно с А.Я. Беловым.

Список литературы

1. Kendall M., Moran P. Geometric probabilities. - Moscow: Nauka, 1972.
2. Santaló L. A. Integral geometry and geometric probability. – Moscow: Nauka, 1983.
3. Matheron G. Random sets and integral geometry. – Moscow: Mir, 1978.
4. Anoshchenko N. N. Geometric analysis of fracturing and blockiness in deposits of facing stone. – Moscow: MGI, 1983.
5. Ambartzumian R. V., Mecke J., Stoyan D. Introduction to stochastic geometry. – Moscow: Nauka, 1989.

УДК 621.315.592.9

ПЬЕЗОТРАНЗИСТОРЫ НА ГЕТЕРОСТРУКТУРАХ SiC

Алтухов В.И.,
профессор кафедры математики, действительный член РАЕН, академик РАЕ
ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»
e-mail: altukhovv@mail.ru
Семенов Д.В.,
доцент кафедры ИУ5
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
e-mail: dimmax@bmstu.ru, dimmax@mail.ru

Аннотация. *В работе предложена модель диэлектрической проницаемости наноразмерных твердых растворов на основе карбида кремния с использованием подходов Максвелла-Гарнетта, Бруггемана и Лоуэнга. Проведена оценка влияния пьезоэффекта в гетероструктурах SiC-AlN-SiC. Рассчитаны значения поляризации и плотности двумерного электронного газа, показана возможность создания полевых пьезотранзисторов на основе карбида кремния. Результаты моделирования сопоставлены с экспериментальными данными.*
Ключевые слова: *карбид кремния, гетероструктуры, пьезоэффект, диэлектрическая проницаемость, пьезотранзисторы.*

PIEZOTRANSISTORS ON SIC HETEROSTRUCTURES

Altukhov V.I.,
Professor of the Department of Mathematics, Full Member of the Russian Academy of Natural Sciences, Academician of the Russian Academy of Natural Sciences
North Caucasus Federal University
Semenov D.V.,
Associate Professor of the Department of IU5
Bauman Moscow State Technical University (National Research University)

Abstract. *A model for the permittivity of nanosized solid solutions based on silicon carbide is proposed using the Maxwell-Garnett, Bruggeman, and Looyenga approaches. The influence of the piezoelectric effect in SiC-AlN-SiC heterostructures is evaluated. The values of polarization and two-dimensional electron gas density are calculated, demonstrating the feasibility of fabricating field-effect piezotransistors based on silicon carbide. The simulation results are compared with experimental data.*
Keywords: *silicon carbide, heterostructures, piezoelectric effect, permittivity, piezotransistors.*

Для интерпретации диэлектрической проницаемости ε наноразмерных твердых растворов на основе карбида кремния применяются модели Максвелла-Гарнетта, Бруггемана и Лоуэнга. Модель Максвелла-Гарнетта наиболее соответствует эксперименту [1, 2].

В модели Максвелла-Гарнетта рассматривается базовая матрица со структурой SiC $2.4 \le \varepsilon_n \le 3.3$ эВ, содержащая изолированные эллипсоидные нановключения с объемной концентрацией x. Керамика SiC-AIN при $x = \eta$ и $\omega = 0$ обладает диэлектрической проницаемостью (ДП) $\varepsilon(\omega)$, превышающей ДП матрицы ε_n и ДП включений A1N [3-5]. При эллипсоидной форме включений в матрице SiC для ДП ε получаем [6]:

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'', \quad \varepsilon' = \varepsilon'_m + \eta a \frac{\delta^2 \Delta^2}{a^2 + b^2}, \quad \varepsilon'' = \varepsilon''_m + \eta b \frac{\delta^2 \Delta^2}{a^2 + b^2} \tag{1}$$

$$a = (1-\eta) A_c \Delta^2 \varepsilon'_m + \delta^2 \Delta_{im}, \; b = (1-\eta) A_c \Delta^2 \Gamma_m + \delta^2 \Gamma_{im}, \; \varepsilon_m = \varepsilon'_m + i\gamma_m \omega^{-1} \tag{2}$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon'_i + i\gamma_i \omega^{-1}, \; \Delta^2 = \Delta_{im}^2 + \Gamma_{im}^2 = (\varepsilon'_i - \varepsilon'_m)^2 + \frac{(\gamma_i - \gamma_m)^2}{\omega^2}$$

Здесь γ_i, γ_m – удельные проводимости компонентов, а ω – круговая частота внешнего электрического поля.

Кристаллы с решеткой типа вюрцита GaN, SiC и A1N обладают пьезоэлектрическим эффектом [7]. Для оценки влияния пьезоэффекта учтена компонента пьезомодуля d_{31}, напряжения по осям x и y приняты равными; $U_{xx} = U_{yy} = a_1/a_2 - 1$ $U_{zz} = 0$, а индексы 1 и 2 относятся к SiC и A1N соответственно. Уравнение поляризации в направлении оси z [7]:

$$P_z = 2d_{31}\left(C_{11} + C_{12} - \frac{2C_{13}^2}{C_{33}}\right)\cdot U_{xx} = 2d_{31}G_{ab}U_{xx} \qquad (3)$$

С использованием упругих постоянных C_{11}, C_{12}, C_{13} и C_{33} [7, 8] (таблица 1) для GaN и SiC получено G_{ab} равное 413 и 602 (10^{12} н/м^2). Пьезомодули d_{31} составляют 1.84 и 0.25 10^{-12} кл/н) [7–9]. Значения U_{xx} – 0.20 и 0.36 для GaN и SiC. Поляризация P_z равна 0.026 и 0.01 (кл/м^2), что соответствует плотности заряда в двумерном электронном газе 1.71 и 0.64 (10^{13} см$^{-2}$).

Таблица 1.

Модули упругости кристаллов с решеткой типа вюрцита, ГПа

Кристалл	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{33}	C_{44}
GaN	390	145	106	398	105
SiC	501	111	52	553	163

Плотности двумерного электронного газа указывают на значительный вклад пьезоэффекта. Пьезоэлектрический эффект в гетероструктуре SiC-AlN-SiC позволяет создать полевой пьезотранзистор. Большие значения $\varepsilon'(\omega)$ могут увеличить деформации U_{ab}, что требует работы на низких частотах в режиме усиления диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$.

В работе предложена модель, результаты расчетов сопоставлены с экспериментальными данными. Проведена оценка роли пьезоэффекта в гетероструктурах. Отмечена возможность создания полевых пьезотранзисторов на основе карбида кремния.

Список литературы

1. Турик А.В. Гигантское пьезоэлектрическое и диэлектрическое усиление в неупорядоченных гетерогенных системах / А.В. Турик, А.И. Чернобабов, Г.С. Радченко, С.А. Турик // Физика твердого тела. 2004. Т. 46, вып. 12. – С. 2139–2142.
2. Виноградов А.П. Электродинамика композитных материалов / А.П. Виноградов. – Москва: [б. и.], 2001. – 208 с.
3. Исследование структуры твердых растворов $(SiC)_{1-x}(AlN)_x$ / Б.А. Билалов, Ш.А. Нурмагомедов, М.К. Курбанов, Н.П. Исмаилова // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Серия: Технические науки. 2001. Вып. 4. – С. 65–68.
4. Получение и свойства поликристаллических твёрдых растворов SiC–AlN / Г.К. Сафаралиев, Ю.М. Таиров, В.Ф. Цветков, Ш.Ш. Шабанов [и др.] // Физика и техника полупроводников. 1993. Т. 27, вып. 3. – С. 402–408.
5. Курбанов М.К. Исследование гетероструктур $SiC/(SiC)_{1-x}(AlN)_x$ методом вольт-фарадных характеристик / М.К. Курбанов, Б.А. Билалов, Ш.А. Нурмагомедов, Г.К. Сафаралиев // Физика и техника полупроводников. 2001. Т. 35, вып. 2. – С. 216–218.
6. Казаров Б.А. Моделирование свойств широкозонных полупроводников и диэлектриков / Б.А. Казаров, Н.В. Баландина, В.И. Алтухов. – Георгиевск: СевКавГТУ ГТИ, 2008. – 224 с.
7. Данилин В.Н. Мощные высокотемпературные и радиационно-стойкие СВЧ приборы нового поколения на широкозонных гетеропереходных структурах AlGaN/GaN / В.Н. Данилин, Ю.П. Докучаев, Т.А. Жукова, М.А. Комалов // Обзоры по электронной технике. Сер. 1, СВЧ-техника, полупроводниковых материалов и приборов: через GaN к алмазу. 2008. – С. 10–21.
8. New Semiconductor Materials. Characteristics and Properties // Электронный архив. 1998–2001. URL: https://www.ioffe.ru/SVA/ (дата обращения: 21.11.2025).
9. Лучинин В.В. Особенности материаловедческого и технического базиса микросистем / В. В. Лучинин, Ю. М. Таиров // Нано- и микросистемная техника. 2008. – С. 10–21.

УДК 004.056:629.7.05 (публикация отозвана 22.09.2026)

ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ КАНАЛА УПРАВЛЕНИЯ ГРУППОЙ БПЛА ПУТЕМ ЗАЩИТЫ ПРОТОКОЛА MAVLINK ОТ АТАК ПЕРЕХВАТА И ПОДМЕНЫ КОМАНД

Антонов В.В.,
канд. техн. наук, доцент кафедры организации и технологии защиты информации,
Северо-Кавказский федеральный университет
e-mail: antonov_vlad@mail.ru
Яковенко В.С.,
студент 4-го курса,
Северо-Кавказский федеральный университет
e-mail: yakovenko24062004@gmail.com
Волошин Д.Г.,
младший научный сотрудник,
Северо-Кавказский федеральный университет
e-mail: ultrageron@gmail.com

Аннотация. *В статье рассматривается проблема обеспечения информационной безопасности канала управления группой беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) в агропромышленном секторе. Проведён анализ уязвимостей протокола MAVLink, систематизированы угрозы перехвата и подмены команд управления. Разработана архитектура модуля информационной безопасности, включающая защищённый MAVLink-proxy на базе TLS/mTLS, контроль целостности команд посредством HMAC-SHA256, а также подсистему аутентификации с JWT-токенами и ролевой моделью доступа. Результаты пентестирования подтвердили 100-процентное обнаружение подмены команд и эффективную защиту от replay-атак.*
Ключевые слова: *БПЛА, MAVLink, информационная безопасность, TLS, HMAC, replay-атака, MITM, канал управления, агропромышленный комплекс.*

ENSURING INFORMATION SECURITY OF THE UAV GROUP CONTROL CHANNEL BY PROTECTING THE MAVLINK PROTOCOL FROM COMMAND INTERCEPTION AND SUBSTITUTION ATTACKS

Antonov V.V.,
Associate Professor of the Department,
Associate Professor, Candidate of Technical Sciences
North Caucasus Federal University
Yakovenko V.S.,
4th-year student, North Caucasus Federal University
Voloshin D.G.
Junior Research Fellow,
North Caucasus Federal University

Abstract. *The paper addresses information security issues of the UAV swarm control channel in the agro-industrial sector. The vulnerabilities of the MAVLink protocol are analyzed, and threats of command interception and substitution are systematized. An information security module architecture has been developed, comprising a secured MAVLink-proxy based on TLS/mTLS, command integrity verification via HMAC-SHA256, and a JWT-based authentication subsystem with role-based access control. Penetration testing results confirmed 100% detection of command substitution and effective protection against replay attacks.*
Keywords: *UAV, MAVLink, information security, TLS, HMAC, replay attack, MITM, control channel, agro-industrial complex.*

1. Актуальность проблемы

Дроны давно перестали быть экзотикой в агропромышленном секторе. Мониторинг посевов, точечное внесение удобрений, картографирование угодий – всё это сегодня делают

группы БПЛА, работающие в едином контуре управления. Российский рынок гражданских БПЛА будет ежегодно расти на 25% до 2028 года. При этом доля отечественного производства увеличится с 22% до 46% [1], и переход от одиночных аппаратов к роевым сценариям только ускоряется. Вместе с ним растёт и атакуемая поверхность на каналы управления БПЛА.

Главной уязвимостью каналов управления большинства дронов, используемых в агропромышленном секторе, является протокол MAVLink, который фактически является стандартом для обмена командами и телеметрией в экосистеме ArduPilot/PX4. Версия протокола 1.x передаёт пакеты в открытом виде, без шифрования и аутентификации [2]. Это не теоретическая проблема: так, например, иранские военные перехватили американский БПЛА RQ-170, воздействуя на канал управления, а демонстрационные взломы потребительских дронов на конференциях по безопасности стали уже рутиной [3]. Для группы из нескольких аппаратов одна скомпрометированная команда способна нарушить всю миссию. Именно поэтому защита канала управления – это не дополнение, а необходимое условие безопасной эксплуатации БПЛА.

2. Модель угроз

Анализ угроз проводился по методике ФСТЭК России (2021) применительно к каналу «управляющая платформа – бортовой контроллер» [4]. Выявлены четыре актуальные угрозы: пассивный перехват MAVLink-трафика (злоумышленник читает команды и телеметрию без вмешательства), инъекция команд (отправка пакетов с корректным форматом, но без авторизации – принудительная посадка, смена маршрута), replay-атаки (повтор ранее записанной легитимной команды) и MITM (Man-in-the-Middle – «человек посередине») на канале «платформа–дрон» (перехват и подмена пакетов в режиме реального времени). По степени критичности для агросценария инъекция и MITM отнесены к классу «высокий», replay – «средний», пассивный перехват – «низкий/средний». Эта классификация и определила архитектурные приоритеты.

3. Архитектура модуля информационной безопасности

Модуль встраивается в клиентскую часть платформы и последовательно закрывает все четыре угрозы.

Транспортный уровень защищён по схеме TLS 1.3 с взаимной аутентификацией (mTLS): каждый БПЛА группы имеет собственный сертификат X.509, и без его предъявления соединение не устанавливается. MAVLink-proxy на стороне платформы завершает TLS-туннели и передаёт расшифрованный трафик внутренней шине. Это сразу снимает угрозы пассивного перехвата и существенно усложняет атаку типа MITM.

Поверх шифрования каждая команда подписывается с помощью HMAC-SHA256. В заголовок пакета добавляются равномерный счётчик и временная метка; принимающая сторона проверяет подпись, корректность счётчика и свежесть метки (допустимое окно – 5 секунд). Любая модификация в транзите или попытка replay немедленно отклоняются.

Операторы аутентифицируются через JWT (RS256) с тремя ролями: «оператор» управляет назначенными аппаратами, «наблюдатель» читает только телеметрию, «администратор» конфигурирует систему. Токен доступа существует 15 минут и обновляется через токен обновления. Веб-интерфейс платформы защищён от угроз OWASP Top-10: контекстное экранирование (XSS), CSRF-токены, параметризованные запросы (SQL-инъекции), заголовки CSP и HSTS.

4. Реализация и логирование

MAVLink-proxy написан на Python (библиотека cryptography 42.x). Цепочка обработки исходящей команды: сериализация в формат MAVLink v2 [5] → добавление счётчика и метки → вычисление HMAC-SHA256 → передача по TLS-туннелю. При обнаружении аномалии – серии отклонённых команд или нарушения последовательности пакетов – аппарат автоматически переводится в режим зависания и совершает автономную посадку в последней безопасной точке.

Все действия операторов и события безопасности записываются в структурированные JSON-логи (поля: timestamp ISO 8601, user_id, event_type, drone_id, severity). Формат

совместим с CEF и RFC 5424, поэтому журналы без доработки подключаются к SIEM-системам – Elasticsearch/Kibana, MaxPatrol SIEM. При выявлении подозрительной активности (например, более трёх отклонённых команд за 10 секунд) система немедленно отправляет предупреждение по обратному API или e-mail.

5. Результаты тестирования

Проверка проводилась в два этапа. Веб-интерфейс тестировался инструментами OWASP ZAP и Burp Suite по методологии OWASP Testing Guide v4.2. Уязвимостей классов XSS, CSRF и SQL-инъекция не обнаружено. Канал управления проверялся тремя сценариями атак: повторное воспроизведение команды посадки через 30 секунд после записи, подмена целевых координат при MITM-перехвате и инъекция команды с корректным форматом MAVLink, но без валидного HMAC.

В результате тестирования все попытки подмены и инъекции (100%) отклонены на этапе верификации HMAC; replay-пакеты заблокированы по устаревшей метке или сбою счётчика. Для сравнения: базовый незащищённый MAVLink v1 не обнаруживает ни одну из этих атак: пакеты принимаются и исполняются без каких-либо проверок.

Заключение. Разработанный модуль закрывает ключевые уязвимости протокола MAVLink без изменения бортового программного обеспечения дронов – вся логика сосредоточена на стороне платформы. Связка TLS/mTLS + HMAC-SHA256 + JWT с ролевой моделью показала 100-процентную эффективность против атак подмены и повтора сигнала в ходе пентеста. В качестве дальнейшего развития направления исследования рассматривается внедрение IDS на уровне MAVLink-трафика с применением методов машинного обучения для выявления аномалий, а также интеграция аппаратных модулей доверенной загрузки (TPM 2.0) в бортовые вычислители для формирования полноценного аппаратного корня доверия.

Список литературы

1. Анализ рынка гражданских БПЛА: итоги, прогнозы, тренды [Электронный ресурс] // Центр стратегических разработок (ЦСР). – М., 2025. URL: https://aviation21.ru/rossijskij-rynok-grazhdanskix-bpla-kurs-na-importozameshhenie-i-texnologicheskoe-liderstvo/ (дата обращения: 27.03.2026).
2. Kwon Y., Yu J., Cho B.-Y., Eun Y., Park K. J. Empirical Analysis of MAVLink Protocol Vulnerability for Attacking Unmanned Aerial Vehicles // IEEE Access. 2018. Vol. 6. – P. 43203–43212. DOI: 10.1109/ACCESS.2018.2863237. (дата обращения: 27.03.2026).
3. Hartmann K., Steup C. The Vulnerability of UAVs to Cyber Attacks – The Vulnerability of UAVs to CyberAttacks - An Approach to the RiskAssessment // 5th International Conference on Cyber Conflict (CyCon 2013). – Tallinn, 2013. – URL: https://ccdcoe.org/uploads/2018/10/26_d3r2s2_hartmann.pdf (дата обращения: 27.03.2026).
4. ФСТЭК России. Методика оценки угроз безопасности информации [Электронный ресурс]: методический документ, утверждён ФСТЭК России 05.02.2021. – М.: ФСТЭК России, 2021. – 83 с. URL: https://fstec.ru/dokumenty/vse-dokumenty/spetsialnye-normativnye-dokumenty/metodicheskij-dokument-ot-5-fevralya-2021-g (дата обращения: 27.03.2026).
5. Meier L. MAVLink Developer Guide [Электронный ресурс] // MAVLink Micro Air Vehicle Communication Protocol / Dronecode Project. 2009. URL: https://mavlink.io/en/ (дата обращения: 27.03.2026).

УДК 517.925.5

ЧАСТИЧНАЯ ЭКВИОГРАНИЧЕННОСТЬ И ЧАСТИЧНАЯ ЭКВИОГРАНИЧЕННОСТЬ В ПРЕДЕЛЕ РЕШЕНИЙ С ЧАСТИЧНЫМ КОНТРОЛЕМ ПРЕДЫСТОРИЙ

Арянов В.А.,
аспирант кафедры математики, экономики и методик обучения
ФГБОУ ВО «Мордовский государственный педагогический университет им. М.Е. Евсевьева»,
e-mail: vladislaff12@yandex.ru
Кистенев К.Д.,
аспирант кафедры математики, экономики и методик обучения
ФГБОУ ВО «Мордовский государственный педагогический университет им. М.Е. Евсевьева»,
e-mail: kistenev.kir@yandex.ru
Лапин К.С.,
доцент кафедры математики, экономики и методик обучения
ФГБОУ ВО «Мордовский государственный педагогический университет им. М.Е. Евсевьева»,
e-mail: klapin@mail.ru

Аннотация. *Для решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа введены понятия эквиограниченности решений, частичной эквиограниченности решений и частичной эквиограниченности решений с частичным контролем предысторий. С использованием функционалов Ляпунова-Красовского получены достаточные условия указанных выше видов эквиограниченности решений. Далее введены понятия эквиограниченности в пределе решений и частичной эквиограниченности в пределе решений с частичным контролем предысторий. С использованием функционалов Ляпунова-Красовского получены достаточные условия указанных выше видов эквиограниченности в пределе решений.*
Ключевые слова: *эквиограниченность решений, эквиограниченность в пределе решений, функционал Ляпунова-Красовского.*

PARTIAL EQUIOBOUNDEDNESS AND PARTIAL ULTIMATE EQUIOBOUNDEDNESS OF SOLUTIONS WITH PARTIAL HISTORICAL CONTROL

Aryanov V.A.,
Postgraduate Student of the Department of Mathematics, Economics, and Teaching Methods
Evseviev Mordovian State Pedagogical University
Kistenev K.D.,
Postgraduate Student of the Department of Mathematics, Economics, and Teaching Methods
Evseviev Mordovian State Pedagogical University
Lapin K.S.,
Associate Professor of the Department of Mathematics, Economics, and Teaching Methods
Evseviev Mordovian State Pedagogical University

Abstract. *For solutions of delay-type functional differential equations, the concepts of equiboundedness of solutions, partial equiboundedness of solutions, and partial equiboundedness of solutions with partial control of prehistories are introduced. Using Lyapunov-Krasovsky functionals, sufficient conditions for the above-mentioned types of equiboundedness of solutions are obtained. Further, the concepts of ultimate equiboundedness of solutions and partial ultimate equiboundedness of solutions with partial control of prehistories are introduced. Using Lyapunov-Krasovsky functionals, sufficient conditions for the above-mentioned types of ultimate equiboundedness of solutions are obtained.*
Keywords: *equiboundedness of solutions, ultimate equiboundedness of solutions, Lyapunov-Krasovsky functional.*

Пусть $h > 0$ – фиксированная постоянная, и $C([-h; 0], \mathbb{R}^n)$ – линейное пространство всех непрерывных отображений вида $\varphi: [-h; 0] \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, рассматриваемое вместе с

нормой $\|\varphi\| = \max_{(-h\le\vartheta\le 0)}\|\varphi(\vartheta)\|$. Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t), \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0; +\infty), \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $-h \le t < +\infty$, $F\colon \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ – любое непрерывное отображение и семейство отображений $x_t\colon [-h; 0] \to \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^+$, называемое h-траекторией отображения $x(t)$, задается формулой $x_t(\vartheta) = x(t + \vartheta)$, $-h \le \vartheta \le 0$.

Решением $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с начальными условиями $(t_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n)$ называется любое отображение $x(-, t_0, \varphi_0)\colon [t_0 - h; +\infty) \to \mathbb{R}^n$, $x(t, t_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^n$, $t_0 - h \le t < +\infty$, для которого выполнены следующие условия: 1) $x(t, t_0, \varphi_0)$, $t \ge t_0$ удовлетворяет уравнению (1), т. е. при $t \ge t_0$ справедливо равенство $\dot{x}(t, t_0, \varphi_0) = F(t, x_t(t_0, \varphi_0))$; 2) $x_{t_0}(t_0, \varphi_0) = \varphi_0$. Отображение $\varphi_0\colon [-h; 0] \to \mathbb{R}^n$ называется предысторией этого решения. Далее будем предполагать, что для непрерывного отображения $F(t, \varphi)$ выполнено локальное условие Липшица по переменной φ.

Производная непрерывного функционала $V\colon \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ в силу уравнения (1) определяется как отображение $\dot{V}\colon \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, задаваемое по формуле $\dot{V}(t, \varphi) = \overline{\lim}_{\delta\to+0}\{(V(t + \delta, x_{t+\delta}(t, \varphi)) - V(t, \varphi))/\delta\}$, где $x_\tau(t, \varphi)$ – h-траектория решения $x(\tau, t, \varphi)$ уравнения (1).

Далее для любой точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, и любого целого $1 \le k \le n$, будем использовать обозначение $y = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. Кроме того, для любого отображения $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in C([-h; 0], \mathbb{R}^n)$ и любого целого $1 \le s \le n$, будем использовать обозначение $\varphi^{(s)} = (\varphi_1, \dots, \varphi_s) \in C([-h; 0], \mathbb{R}^s)$. Наконец, для любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) семейство отображений $y_t\colon [-h; 0] \to \mathbb{R}^n$, где $y_t(t_0, \varphi_0) = x_t(t_0, \varphi_0)^{(k)}$, будем называть y-h-траекторией решения $x(t, t_0, \varphi_0)$.

Следующее определение является аналогом соответствующего определения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1]-[4].

Определение 1. Будем говорить, что решения (имеется в виду все решения) уравнения (1) эквиограничены по части переменных $y = (x_1, \dots, x_k)$, $1 \le k \le n$, с частичным контролем предысторий $\varphi_0^{(m)} = ((\varphi_0)_1, \dots, (\varphi_0)_m) \in C([-h; 0], \mathbb{R}^m)$, $k \le m \le n$, или, более кратко, y-эквиограничены с $\varphi_0^{(m)}$-контролем, если для произвольных $\alpha \ge 0$ и $t_0 \ge 0$ существует такое число $\beta = \beta(t_0, \alpha) > \alpha$, что для y-h-траектории $y_t(t_0, \varphi_0)$ каждого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0, удовлетворяющей условию $\left\|\varphi_0^{(m)}\right\| \le \alpha$, справедливо для всех $t \ge t_0$ неравенство $\|y_t(t_0, \varphi_0)\| \le \beta$. При $m = n$ (соотв. $k = m = n$) это определение становится определением y-эквиограниченности (соотв. эквиограниченности) решений уравнения (1).

Далее для произвольных функций $a(t, r)$ и $b(r)$, где $t, r \in \mathbb{R}^+$, будем использовать запись $a(t, r) \in K$ и $b(r) \in K$, если эти функции удовлетворяют, соответственно, следующим требованиям: 1) функция $a(t, r) \ge 0$ является при каждом фиксированном значении $t \in \mathbb{R}^+$ неубывающей по r функцией; 2) функция $b(r) \ge 0$ является неубывающей функцией, для которой выполнено условие $b(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$.

Теорема 1. Предположим, что для уравнения (1) существуют непрерывный функционал $V\colon \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ (функционал Ляпунова-Красовского), функции $b(r) \in K$, $a(t, r) \in K$ и целые числа $1 \le k \le m \le n$, для которых выполнены следующие условия: 1) для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n)$ справедливо двойное неравенство $b(\left\|\varphi^{(k)}(0)\right\|) \le V(t, \varphi) \le a(t, \left\|\varphi^{(m)}\right\|)$; 2) для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство $\dot{V}(t, \varphi) \le 0$. Тогда решения уравнения (1) являются y-эквиограниченными с $\varphi_0^{(m)}$-контролем.

При $m = n$ (соотв. $k = m = n$) теорема 1 становится достаточным условием y-эквиограниченности (соотв. эквиограниченности) решений уравнения (1).

Следующее определение является аналогом соответствующего определения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1], [4], [5].

Определение 2. Будем говорить, что решения (имеется в виду все решения) уравнения (1) эквиограничены в пределе по части переменных $y = (x_1, \dots, x_k)$, $1 \le k \le n$, с частичным контролем предысторий $\varphi_0^{(k)} \in C([-h; 0], \mathbb{R}^k)$ или, более кратко, y-эквиограничены в пределе с $\varphi_0^{(k)}$-контролем, если для этого уравнения найдется такое число $B > 0$, и для любых $\alpha \ge 0$ и $t_0 \ge 0$ существует такое число $T = T(t_0, \alpha) \ge 0$, что для y-h-траектории $y_t(t_0, \varphi_0)$ каждого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0, удовлетворяющей условию $\left\|\varphi_0^{(k)}\right\| \le \alpha$, справедливо неравенство $\|y_t(t_0, \varphi_0)\| < B$ для всех $t \ge t_0 + T$. При $k = n$ данное определение становится определением эквиограниченности в пределе решений уравнения (1).

Далее для произвольного фиксированного числа $R_0 > 0$ и любой непрерывной функции $c(r)$, где $r \in \mathbb{R}^+$, будем использовать запись $c(r) \in K(R_0)$, если для этой функции выполнено условие $c(r) > 0$ при $r > R_0$.

Теорема 2. Пусть для уравнения (1) существуют непрерывный функционал $V: \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ (функционал Ляпунова-Красовского), число $R_0 > 0$, функции $b(r) \in K$, $a(t, r) \in K$, $c(r) \in K(R_0)$ и целое число $1 \le k \le n$, для которых выполнены следующие условия: 1) для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C^{(k)}(R_0)$ верно двойное неравенство $b(\left\|\varphi^{(k)}(0)\right\|) \le V(t, \varphi) \le a(t, \left\|\varphi^{(k)}\right\|)$; 2) для любых элементов $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C^{(k)}(R_0)$ верно неравенство $\dot{V}(t, \varphi) \le -c(\left\|\varphi^{(k)}(0)\right\|)$; 3) существуют числа $R > R_0$ и $\gamma > 0$, для которых верно неравенство $a(t, R) \le \gamma$ при всех $t \ge 0$. Тогда решения уравнения y-эквиограничены в пределе с $\varphi_0^{(k)}$-контролем.

При $k = n$ теорема 2 становится достаточным условием y-эквиограниченности в пределе (соотв. эквиограниченности в пределе) решений уравнения (1).

Исследование третьего автора выполнено за счет гранта РНФ (проект № 25-21-00830).

Список литературы

1. Yoshizawa T. Liapunovs function and boundedness of solutions. // Funkcialaj Ekvacioj, 1959, V. 2. – P. 95–142.
2. Лапин К.С. Частичная равномерная ограниченность решений систем дифференциальных уравнений с частично контролируемыми начальными условиями // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 3. – С. 309–316.
3. Лапин К.С. Высшие производные функций Ляпунова и частичная ограниченность решений с частично контролируемыми начальными условиями // Математические заметки. 2017. Т. 101, № 6. – С. 883–893.
4. Лапин К.С. Ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений. – Саранск: РИЦ МГПУ, 2022.
5. Лапин К.С. Ограниченность в пределе решений систем дифференциальных уравнений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями. // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 10. – С 1281–1286.

УДК 517.968

ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ АБЕЛЯ НА ВСЕЙ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА

Асхабов С.Н.,
профессор кафедры «Математический анализ, алгебра и геометрия»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: askhabov@yandex.ru

Аннотация. *Найдены условия, при которых обобщенные интегральные операторы Абеля с постоянными и переменными коэффициентами на всей прямой $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ действуют непрерывно из вещественного пространства Лебега $L_p(\mathbb{R})$, $1<p<\infty$, в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(\mathbb{R})$, $p'=p/(p-1)$, и являются положительными (строго положительными) по Бохнеру. При этих условиях доказано, что нормы обобщенных операторов Абеля и сопряженных с ними операторов равны. Приводятся следствия, иллюстрирующие полученные результаты.*
Ключевые слова: *обобщенный оператор Абеля, положительный оператор по Бохнеру.*

GENERALIZED ABEL INTEGRAL OPERATORS ON THE ENTIRE LINE IN LEBESGUE SPACE

Askhabov S.N.,
Professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *Conditions are found under which generalized Abel integral operators with constant and variable coefficients on the whole line $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ act continuously from the real Lebesgue space $L_p(\mathbb{R})$, $1<p<\infty$, to its conjugate space $L_{p'}(\mathbb{R})$, $p'=p/(p-1)$, and are positive (strictly positive) according to Bochner. Under these conditions, it is proved that the norms of the generalized Abel operators and their adjoints are equal. The consequences illustrating the obtained results are given.*
Keywords: *generalized Abel operator, Bochner positive operator.*

Теория линейных обобщенных интегральных уравнений Абеля на прямой $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ с постоянными коэффициентами u и v:

$$(M^{\alpha}\varphi)(x)\equiv u\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}+v\int_{x}^{\infty}\frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}}=f(x),\ \ 0<\alpha<1, \qquad (1)$$

в настоящее время достаточно хорошо разработана и подробно изложена в известной монографии [1, § 30], где доказано, что это уравнение однозначно разрешимо в вещественном пространстве Лебега $L_p(\mathbb{R})$, $1<p<1/\alpha$, при любой правой части $f(x)$ из пространства дробных интегралов $I^{\alpha}(L_p)$ и получена формула, дающая все его решения, то есть найдено явное выражение для обратного оператора $(M^{\alpha})^{-1}$. Более того в [1, § 30] доказаны формулы, дающие явные решения уравнений вида (1) как с переменными внешними, так и переменными внутренними коэффициентами u и v в предположении, что они удовлетворяют условию гельдеровского типа.

Следует отметить, что впервые линейные обобщенные уравнения Абеля на конечном отрезке как с постоянными, так и с переменными коэффициентами изучались в работе Н. Зейлона, а затем в работах К.Д. Сакалюка, Л. Вольферсдорфа и других (подробнее см. [1, § 34], где также имеется информация о большом круге приложений таких уравнений, например, в теории краевых задач для дифференциальных уравнений смешанного и вырождающегося типов, в теории игр, в задачах магнитогидродинамики, теории ползучести и пластичности). Линейные обобщенные уравнения Абеля на всей прямой $\mathbb{R}$ как с постоянными, так и переменными коэффициентами были рассмотрены в ряде работ С.Г. Самко (см. [1, § 34]).

В данной работе в вещественном пространстве Лебега $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, изучаются как обобщенный оператор Абеля M^α с постоянными коэффициентами u и v, так и обобщенный оператор Абеля G^α с переменными коэффициентами $u(x)$ и $v(x)$:

$$(G^\alpha\varphi)(x) = u(x)\int_{-\infty}^{x}\frac{u(t)\cdot\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + v(x)\int_{x}^{\infty}\frac{v(t)\cdot\varphi(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}},\ \ 0<\alpha<1. \qquad (2)$$

Найдены условия на коэффициенты $u(x)$, $v(x)$ и параметр p, при которых операторы Абеля M^α и G^α действуют непрерывно из пространства $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(\mathbb{R})$, $p' = p/(p-1)$, и являются положительными (строго положительными) по Бохнеру.

Отметим, что вопрос о положительности операторов M^α и G^α по Бохнеру ранее не рассматривался.

Как известно, понятие положительного по Бохнеру оператора (далее, кратко, положительного оператора) тесно связано с понятием положительно определенной функции, играющим основополагающую роль в современном гармоническом анализе (см. [2, пункт 9.1], где отмечены работы С. Бохнера, М.М. Гельфанда, Д.А. Райкова и других). Поэтому исследование операторов на положительность представляет определенный научный интерес.

Приведем необходимые определения и обозначения. Пусть X – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и X^* – сопряженное с ним пространство. Обозначим через $\langle y, x\rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$. В частности, если X есть гильбертово пространство H, то $\langle y, x\rangle = (y, x)$, где (y, x) обозначает обычное скалярное произведение в H.

Определение 1. Оператор A, действующий из X в X^*, называется положительным, если для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\langle Ax, x\rangle \geq 0$. Если при этом $\langle Ax, x\rangle > 0$ при $x \neq 0$, то оператор A называется строго положительным.

В частности, если X есть вещественное пространство Лебега $L_p(\mathbb{R}), 1 < p < \infty$, с нормой $\|\cdot\|_p$, то $X^* = L_{p'}(\mathbb{R}), p' = p/(p-1)$, и для любых $\varphi \in L_p(\mathbb{R}), \psi \in L_{p'}(\mathbb{R})$ имеем

$$\|\varphi\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|^p dx\right)^{1/p},\quad \langle\varphi,\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\cdot\psi(x)dx\,.$$

Обозначим через $\Gamma(\alpha)$ гамма-функцию Эйлера. Норму линейного оператора A, действующего непрерывно из $L_p(a, b)$ в $L_{p'}(a, b)$, обозначим через $\|A\|_{p\to p'}$.

Введем в рассмотрение так называемые операторы левостороннего I_+^α и правостороннего I_-^α дробного интегрирования порядка $\alpha \in (0,1)$:

$$(I_+^\alpha\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad (I_-^\alpha\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{\infty}\frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}}\,.$$

Рассмотрим сначала обобщенный оператор Абеля с постоянными коэффициентами M^α. Заметим, что $M^\alpha = \Gamma(\alpha)\cdot(u\cdot I_+^\alpha + v\cdot I_-^\alpha)$. Используя теорему Харди-Литтлвуда с предельным показателем и аналог леммы 1 из [3], доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $u + v \geq 0$. *Тогда оператор* M^α *действует непрерывно из пространства* $L_{2/(1+\alpha)}(\mathbb{R})$ *в сопряженное с ним пространство* $L_{2/(1-\alpha)}(\mathbb{R})$ *и положителен (строго положителен, если* $u + v > 0$*). При этом для любого* $\varphi \in L_{2/(1+\alpha)}(\mathbb{R})$ *выполняются неравенства*:

$$\|M^\alpha\varphi\|_{2/(1-\alpha)} \leq \Gamma(\alpha)\cdot n(\alpha)\cdot(|u|+|v|)\cdot\|\varphi\|_{2/(1+\alpha)},$$

$$\langle M^\alpha\varphi,\varphi\rangle \geq 0 \ \text{ и } \ \langle M^\alpha\varphi,\varphi\rangle > 0 \ \text{ при } \ \varphi \neq 0, \ \text{ если } \ u + v > 0,$$

где $n(\alpha) = \|I_+^\alpha\|_{p\to p'} = \|I_-^\alpha\|_{p\to p'}$ *при* $p = 2/(1+\alpha)$.

Следствие 1. *Если* $1 < p < 2$, $u \geq 0$ и $v \geq 0$, *то оператор*

$$\left(M^{2/p-1}\varphi\right)(x) = u\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{2-2/p}} + v\int_{x}^{\infty}\frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{2-2/\mathrm{p}}}$$

действует непрерывно из $L_p(\mathbb{R})$ *в* $L_{p'}(\mathbb{R})$ *и положителен (строго положителен, если* $u > 0$ *или* $v > 0$*).*

Следствие 2. *Если* $2 < p < \infty$, $u \geq 0$ и $v \geq 0$, *то оператор*

$$\left(M^{1-2/p}\varphi\right)(x) = u\int_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{2/p}} + v\int_{x}^{\infty} \frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{2/\mathrm{p}}}$$

действует непрерывно из $L_{p'}(\mathbb{R})$ *в* $L_p(\mathbb{R})$ *и положителен (строго положителен, если* $u > 0$ *или* $v > 0$*).*

Следствие 2 оказывается полезным при исследовании нелинейных уравнений типа Гаммерштейна, содержащих оператор $M^{1-2/p}$ методом монотонных (по Браудеру-Минти) операторов (ср. [4]).

Введем теперь в рассмотрение операторы левостороннего G_+^α и правостороннего G_-^α дробного интегрирования с переменными коэффициентами $u(x)$ и $v(x)$:

$$(G_+^\alpha\varphi)(x) = \frac{u(x)}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x} \frac{u(t)\cdot\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad (G_-^\alpha\varphi)(x) = \frac{u(x)}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{\infty} \frac{u(t)\cdot\varphi(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}}.$$

Заметим, что $G^\alpha\varphi = \Gamma(\alpha)(G_+^\alpha\varphi + G_-^\alpha\varphi) = \Gamma(\alpha)(uI_+^\alpha(u\varphi) + vI_-^\alpha(v\varphi))$ и сопряженным с оператором G^α является оператор

$$((G^\alpha)^*\varphi)(x) = v(x)\int_{-\infty}^{x} \frac{v(t)\cdot\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + u(x)\int_{x}^{\infty} \frac{u(t)\cdot\varphi(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \ 0 < \alpha < 1. \qquad (3)$$

Используя теорему 1 доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $p \geq 2$ и $u, v \in L_{2p/[p(1+\alpha)-2]}(\mathbb{R})$. *Тогда оператор* G^α *действует непрерывно из пространства* $L_p(\mathbb{R})$ *в сопряженное с ним пространство* $L_{p'}(\mathbb{R})$ *и положителен (строго положителен, если* $u(x) \neq 0$ *или* $v(x) \neq 0$ *почти всюду на* $\mathbb{R}$*). При этом для любого* $\varphi \in L_p(\mathbb{R})$ *выполняются неравенства*:

$\|G^\alpha\varphi\|_{p'} \leq n(\alpha)\cdot\left(\|u\|^2_{2p/[p(1+\alpha)-2]} + \|v\|^2_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\right)\cdot\|\varphi\|_p$,

$\langle G^\alpha\varphi, \varphi\rangle \geq 0$ и $\langle G^\alpha\varphi, \varphi\rangle > 0$ *при* $\varphi \neq 0$, *если* $u(x) \neq 0$ *или* $v(x) \neq 0$ *п.в. на* $\mathbb{R}$, *где число* $n(\alpha) > 0$ *определено в теореме 1.*

При условиях теоремы 2 нормы операторов (2) и (3) равны: $\|G^\alpha\|_{p\to p'} = \|(G^\alpha)^*\|_{p\to p'}$.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект FEGS-2026-0004).

Список литературы

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка. – Минск: Наука и техника, 1987.
2. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном приложении. В 2-х томах. Том 1. – М.: Мир, 1985.
3. Асхабов С.Н. Интегральные уравнения дробного порядка с переменным внешним коэффициентом и монотонной нелинейностью // Чебышевский сборник. 2025. Т. 26, № 3. – С. 44–57.
4. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки в пространствах Лебега // Математические заметки. 2015. Т. 97, № 5. – С. 643–654.

УДК 517.968

О ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕГРАЛАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Асхабов С.Н.,
профессор кафедры «Математический анализ, алгебра и геометрия»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: askhabov@yandex.ru
Куликова М.Х.,
ассистент кафедры «Математический анализ, алгебра и геометрия»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: lika.kulikova.92@mail.ru

Аннотация. *Методом монотонных (по Браудеру-Минти) операторов доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решения для различных классов неоднородных нелинейных интегральных уравнений, в которые операторы дробного (по Риману-Лиувиллю) интегрирования входят линейно или нелинейно, либо эти операторы содержат нелинейность под знаком интеграла (уравнения типа Гаммерштейна). Во всех случаях важную роль играют найденные в работе условия, при которых операторы дробного интегрирования действуют непрерывно из вещественных пространств Лебега $L_p(a,b)$ в сопряженные с ними пространства и являются строго положительными. Доказанные теоремы в рамках пространства $L_2(a,b)$ охватывают соответствующие линейные уравнения с интегралами дробного порядка.*
Ключевые слова: *интегральные уравнения дробного порядка, монотонная нелинейность*.

ON THE GLOBAL SOLVABILITY OF NONLINEAR EQUATIONS WITH RIEMANN-LIOUVILLE INTEGRALS OF FRACTIONAL ORDER

Askhabov S.N.,
Professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry
Kadyrov Chechen State University
Kulikova M.Kh.,
Assistant Professor in the Department of Mathematical Analysis, Algebra, and Geometry
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *Using the method of monotone (in the sense of Browder-Minty) operators, global theorems on the existence, uniqueness, and estimates of the solution for various classes of inhomogeneous nonlinear integral equations are proved, in which the operators of fractional (in the sense of Riemann-Liouville) integration enter linearly or nonlinearly, or these operators contain nonlinearity under the sign of the integral (Gummerstein-type equations). In all cases, the conditions found in the work play an important role, under which the fractional integration operators act continuously from the real Lebesgue spaces $L_p(a,b)$ to the spaces conjugate to them and are strictly positive. The theorems proved within the framework of the space $L_2(a,b)$ cover the corresponding linear equations with integrals of fractional order.*
Keywords: *fractional-order integral equations, monotone nonlinearity.*

Изучаются нелинейные уравнения, содержащие оператор M_β^α, являющийся линейной комбинацией операторов левостороннего и правостороннего дробного интегрирования различных порядков α и β в смысле Римана-Лиувилля на отрезке $[a,b]$ с постоянными неотрицательными коэффициентами u и v :

$$\left(M_\beta^\alpha \varphi\right)(x) = u\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + v\int_x^b \frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{1-\beta}},\ \ 0<\alpha<1,\ \ 0<\beta<1,\ \ a<x<b\,.$$

При $\alpha=\beta$ оператор M_β^α называют обобщенным оператором Абеля и обозначают через M^α [1].

Обозначим через $\Gamma(\alpha)$ гамма-функцию Эйлера. Норму линейного оператора A, действующего непрерывно из $L_p(a,b)$ в $L_{p'}(a,b)$, обозначим через $\|A\|_{p\to p'}$.

В данной работе найдены условия на заданные параметр p и коэффициенты u, v, при которых оператор M_β^α действует непрерывно из пространства Лебега $L_p(a,b)$, $p>1$, в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(a,b)$, $p'=p/(p-1)$, и является положительным. При этих условиях методом монотонных операторов доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решения для нелинейных уравнений, содержащих оператор M_β^α.

Вопрос о положительности оператора M_β^α ранее не рассматривался и нелинейные уравнения с таким оператором не изучались. В случаях, когда $p=2$, $\alpha=\beta$ и либо $u=v=1$, либо $u=0$ или $v=0$, такие операторы подробно изучены в [2], где отмечена их важная роль в дробном исчислении и в теории дифференциальных уравнений смешанного типа.

Рассмотрим операторы дробного интегрирования Римана-Лиувилля порядка $\alpha\in(0,1)$

$$(I_{a+}^\alpha\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\ x>a,\quad (I_{b-}^\alpha\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b\frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}},\ x<b.$$

Теорема 1. *Пусть* $0<\alpha\le\beta<1$, $u\ge0$, $v\ge0$ *и* $2/(1+\alpha)\le p<\infty$. *Тогда оператор* M_β^α *действует непрерывно из пространства* $L_p(a,b)$ *в сопряженное с ним пространство* $L_{p'}(a,b)$ *и является положительным (строго положительным, если* $u>0$ *или* $v>0$ *), при этом для любого* $\varphi\in L_p(a,b)$ *выполняется неравенство*: $\left\|M_\beta^\alpha\varphi\right\|_{p'}\le C_1\cdot\|\varphi\|_p$, *где*

$$C_1=\begin{cases}(b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p}\cdot\left[u\Gamma(\alpha)n(\alpha)+v\Gamma(\beta)n(\beta)(b-a)^{\beta-\alpha}\right], & \text{если } 2/(1+\alpha)\le p<2,\\ (b-a)^{(p-2)/p}\cdot\left[u(b-a)^\alpha\alpha^{-1}+v(b-a)^\beta\beta^{-1}\right], & \text{если } p\ge2,\end{cases}$$

$n(\alpha)=\|I_{a+}^\alpha\|_{p\to p'}$ при $p=2/(1+\alpha)$ и $n(\beta)=\left\|I_{a+}^\beta\right\|_{p\to p'}$ при $p=2/(1+\beta)$.

В случае $\alpha\ge\beta$ аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $0<\beta\le\alpha<1$, $u\ge0$, $v\ge0$ *и* $2/(1+\beta)\le p<\infty$. *Тогда оператор* M_β^α *действует непрерывно из* $L_p(a,b)$ *в* $L_{p'}(a,b)$ *и является положительным (строго положительным, если* $u>0$ *или* $v>0$ *), при этом для любого* $\varphi\in L_p(a,b)$ *выполняется неравенство*: $\left\|M_\beta^\alpha\varphi\right\|_{p'}\le C_2\cdot\|\varphi\|_p$, *где*

$$C_2=\begin{cases}(b-a)^{[p(1+\beta)-2]/p}\cdot\left[u\Gamma(\alpha)n(\alpha)(b-a)^{\alpha-\beta}+v\Gamma(\beta)n(\beta)\right], & \text{если } 2/(1+\beta)\le p<2,\\ (b-a)^{(p-2)/p}\cdot\left[u(b-a)^\alpha\alpha^{-1}+v(b-a)^\beta\beta^{-1}\right], & \text{если } p\ge2.\end{cases}$$

При исследовании нелинейных сингулярных (со слабой или сильной особенностью в ядре) интегральных уравнений как правило предполагается (см., например, [3]), что нелинейность удовлетворяет условию Липшица, а параметр λ перед ней является достаточно малым по модулю. Кроме того, иногда на область существования решений также накладываются дополнительные ограничения. В данной работе, без ограничений на параметр $\lambda>0$ и область существования решений, при достаточно легко обозримых условиях на нелинейность методом монотонных (по Браудеру-Минти) операторов доказываются глобальные теоремы (ср. с [4] и [5]) об однозначной разрешимости для различных классов нелинейных уравнений, содержащих оператор M_β^α. При этом не требуется, чтобы нелинейность удовлетворяла весьма ограничительному условию Липшица. Всюду ниже предполагается, что функция $F(x,t)$, определяющая нелинейность рассматриваемых уравнений, определена при $x\in[a,b], t\in\mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x почти при каждом фиксированном t и почти при всех x непрерывна по t. Обозначим через F оператор суперпозиции $F\varphi=F[x,\varphi(x)]$, порожденный этой функцией $F(x,t)$, а через $L_p^+(a,b)$ – множество всех неотрицательных функций из $L_p(a,b)$.

Используя теорему 1 и основную теорему теории монотонных операторов (теорему Браудера-Минти), доказываются следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть* $0<\alpha\le\beta<1$, $u\ge0$, $v\ge0$ *и* $2/(1+\alpha)\le p<\infty$. *Если для почти всех* $x\in[a,b]$ *и всех* $t\in\mathbb{R}$ *нелинейность* $F(x,t)$ *удовлетворяет условиям*:

1). $|F(x,t)|\le c(x)+d_1|t|^{p-1}$, где $c\in L_{p'}^+(a,b), d_1>0$;

2). $F(x,t)$ *не убывает по* t *почти при каждом фиксированном* x;

3). $F(x,t)\cdot t \geq d_2|t|^p - D(x)$, где $D \in L_1^+(a,b), d_2 > 0$;

то при любых $\lambda > 0$ *и* $f \in L_{p'}(a,b)$ *уравнение* $\lambda \cdot F\varphi + M_\beta^\alpha \varphi = f$ *имеет решение* $\varphi^* \in L_p(a,b)$. *Это решение* φ^* *единственно, если функция* $F(x,t)$ *строго возрастает по* t *или если* $u > 0$, *либо* $v > 0$. *Кроме того, если условие 3) выполнено при* $D(x) = 0$, *то*

$$\|\varphi^*\|_p \leq \left(\lambda^{-1} d_2^{-1} \|f\|_{p'}\right)^{1/(p-1)}.$$

Теорема 4. *Пусть* $0 < \alpha \leq \beta < 1$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ *и* $1 < p \leq 2/(1-\alpha)$. *Если* $F(x,t)$ *удовлетворяет условиям 1)-3) теоремы 3, то уравнение* $\varphi + \lambda M_\beta^\alpha F\varphi = f$ *имеет единственное решение* $\varphi^* \in L_p(a,b)$ *при любых* $\lambda > 0$ *и* $f \in L_p(a,b)$. *Кроме того, если условия 1) и 3) выполнены при* $c(x) = D(x) = 0$, *то* $\|\varphi^*\|_p \leq d_1 \cdot d_2^{-1} \cdot \|f\|_p$.

Теорема 5. *Пусть* $0 < \alpha \leq \beta < 1$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ *и* $2/(1+\alpha) \leq p < \infty$. *Если для почти всех* $x \in [a,b]$ *и всех* $t \in \mathbb{R}$ *нелинейность* $F(x,t)$ *удовлетворяет условиям*:

4). $|F(x,t)| \leq g(x) + d_3 \cdot |t|^{1/(p-1)}$, *где* $g \in L_p^+(a,b)$, $d_3 > 0$;

5). $F(x,t)$ *строго возрастает по* t *почти при каждом фиксированном* x;

6). $F(x,t)\cdot t \geq d_4 \cdot |t|^{p/(p-1)} - D(x)$, *где* $D \in L_1^+(a,b)$, $d_4 > 0$,

то уравнение $\varphi + \lambda \cdot FM_\beta^\alpha \varphi = f$ *имеет единственное решение* $\varphi^* \in L_p(a,b)$ *при любых* $\lambda > 0$ и $f \in L_p(a,b)$. *Кроме того, если в условиях 4) и 6)* $g(x) = D(x) = 0$, *то справедлива оценка*: $\|\varphi^* - f\|_p \leq \lambda \cdot \left[d_3^p \cdot d_4^{-1} \cdot C_1 \cdot \|f\|_p\right]^{1/(p-1)}$, *где число* $C_1 > 0$ *определено в теореме 1*.

Если вместо теоремы 1 использовать теорему 2, то аналоги теорем 3–5 можно установить и в случае $0 < \beta \leq \alpha < 1$.

Исследование выполнено за счет гранта РНФ (проект № 25-21-00830).

Список литературы

1. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O. I. Fractional integrals and derivatives. Theory and applications. Yverdon: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003.
3. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1980.
4. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки в пространствах Лебега // Математические заметки. 2015. Т. 97, № 5. – С. 643–654.
5. Askhabov S.N. Equations with Fractional Integrals and Monotone Nonlinearity // Journal of Mathematical Sciences. 2025. – P. 1–10. https://doi.org/10.1007/s10958-025-07951-6.

УДК 532.612:543.42:539.211

ПОВЕРХНОСТНАЯ СЕГРЕГАЦИЯ В БИНАРНЫХ ТВЕРДЫХ СПЛАВАХ

Ашхотов О.Г.,
профессор кафедры компьютерных технологий и информационной безопасности,
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова
e-mail: oandi@rambler.ru
Ашхотова И.Б.,
доцент кафедры электроники и цифровых информационных технологий,
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова
e-mail: ashhotova-irina@rambler.ru
Магкоев Т.Т.,
профессор кафедры физики конденсированного состояния,
Северо-Осетинский государственный университет
e-mail: t_magkoev@mail.ru
Меляжев А.А.,
ассистент кафедры электроники и цифровых информационных технологий,
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова
e-mail: Melyazhev95@yandex.ru

Аннотация. *В настоящей работе изучены бинарные сплавы на основе индия в областях твердых растворов, гомогенных и двойных фаз, а также интерметаллидов. В работе выполнены измерения амплитуд и энергетического положения оже-пиков чистых In, Sn, Pb, Bi и их двойных твердых сплавов In-Sn, In-Bi, In-Pb во всем интервале объемных концентраций. По полученным экспериментальным данным сделаны расчеты поверхностных концентраций для твердых сплавов и построены изотермы поверхностного состава.*
Ключевые слова: *поверхность, электрон, вакуум, адсорбция, сплав, концентрация.*

SURFACE SEGREGATION IN BINARY SOLID ALLOYS

Ashkhotov O.G.,
Professor of the Berbekov
Kabardino-Balkarian State University
Ashkhotova I.B.,
Associate professor of the Berbekov
Kabardino-Balkarian State University
Magkoev T.T.,
Professor of the
North Ossetian State University
Melyazhev A.A.,
Assistant of the Berbekov
Kabardino-Balkarian State University

Abstract. *In this paper, binary indium-based alloys in the fields of solid solutions, homogeneous and double phases, as well as intermetallics are studied. The amplitudes and energy position of Auger peaks of pure In, Sn, Pb, Bi and their double solid alloys In-Sn, In-Bi, and In-Pb were measured over the entire range of volume concentrations. Based on the experimental data obtained, calculations of surface concentrations for solid alloys were made and isotherms of the surface composition were constructed.*
Keywords: *surface, electron, vacuum, adsorption, alloy, concentration.*

Легкоплавкие металлы, такие как висмут, индий и др., имеют очень высокие температуры кипения и относительно низкое давление насыщенных паров в области рабочих

температур реакторов. Поэтому такие сплавы представляют большой интерес в качестве низкотемпературных охлаждающих жидкостей для ядерной энергетики [4].

Практические приложения были бы невозможны без исследований поверхностных характеристик сплавов, таких как поверхностное натяжение, адсорбция, состав поверхностного слоя и др. Для твердого состояния подобные исследования тоже проводятся, но лишь для отдельных концентраций, чаще всего эвтектических.

Цель настоящей работы – исследование процессов поверхностной сегрегации в твердых сплавах *In-Sn, In-Pb, In-Bi* на всем интервале объемных концентраций.

При исследовании поверхности изученных сплавов использовали низкоэнергетические оже-переходы *In – $M_4N_{4,5}N_{4,5}$ (411 эВ), Sn – $M_4N_{4,5}N_{4,5}$ (430 эВ), Pb – $N_6O_{4,5}O_{4,5}$ (96 эВ), Bi – $N_7O_{4,5}O_{4,5}$ (101 эВ)* [1]. По полученным оже-спектрам рассчитаны поверхностные концентрации [2].

Система *In-Bi*. Рис. 1 иллюстрирует построенную по данным оже-анализа изотерму $X_{Bi}^{(\sigma)}$ (X_{Bi}). Со стороны *In* наблюдается «гладкий» ход с плавным снижением поверхностной концентрации висмута при увеличении объемного состава в интервале твердых растворов (*In*) и смеси (*In*)+$BiIn_2$. Видно, что ход изотермы больше подходит к системам, в которых имеют место относительно слабые взаимодействия компонентов *A* и *B*, отсутствуют устойчивые химические соединения типа A_mB_n, а также в области малых концентраций компонентов в поверхностном слое не образуются кластеры. Объяснить это можно преобладанием на поверхности твердого раствора (*In*). Дальнейшее достаточно резкое снижение поверхностной активности *Bi*, по-видимому, связано с появлением на поверхности группировок $BiIn_2$+Bi_3In_5. Так же, как и для (*In*)+$BiIn_2$, образцы, состоящие из смеси *BiIn* с твердым раствором (*Bi*), показали плавное, практически линейное снижение поверхностной концентрации висмута.

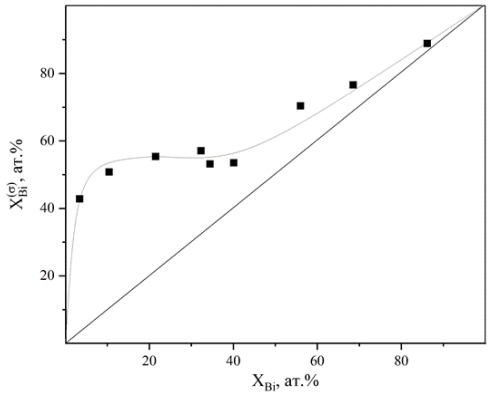

Рис. 1. *Изотерма $X_{Bi}^{(\sigma)}$ (X_{Bi}) для системы In-Bi при 20°C*

Система *In-Sn*. На рис. 2 приведена изотерма (*170°C*) поверхностного состава для твердых сплавов *In-Sn*. Компоненты сплавов проявляют взаимную поверхностную активность. При объемном фазовом переходе α→ß (*11,75 ат.%Sn*) поверхностный состав равен объемному $X_{Sn}^{(\sigma)}$ =X_{Sn}. На этом же рисунке иллюстрируется зависимость $X_{Sn}^{(\sigma)} = f(X_{Sn})$ из [5] для расплавов *In-Sn* (*370°C*). Можно отметить качественное согласие, но в твердом состоянии точка равных концентраций значительно смещается от эвтектики в сторону перехода α→ß.

Система *In-Pb*. Результаты расчетов $X_{Pb}^{(\sigma)}$ для разных объемных составов представлены на рис.3. Построенная изотерма $X_{Pb}^{(\sigma)}$ (X_{Pb}) имеет «гладкий» вид с плавным снижением поверхностной активности свинца при увеличении объемной концентрации свинца.

На изотерме $X_{Pb}^{(\sigma)}$ (X_{Pb}) (рис. 3) в области (*In*)-растворов можно отметить значительное отличие $X_{Pb}^{(\sigma)}$ от объемного состава ($X_{Pb}^{(\sigma)}$ для раствора *1,86 ат.% Pb* более чем в 20 раз превышает X_{Pb}).

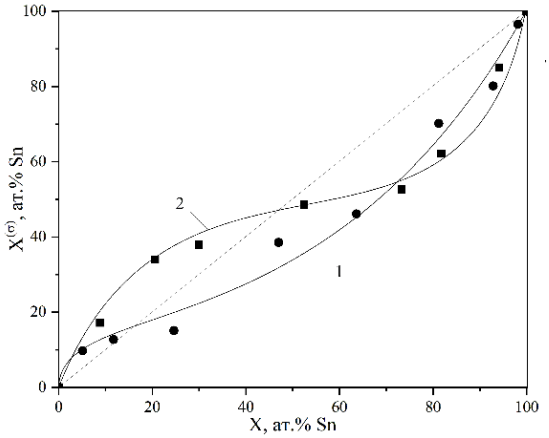

***Рис. 2**. Зависимости $X_{Sn}^{(\sigma)}(X_{Sn})$ для In-Sn: 1 – изотерма для твердых сплавов по результатам настоящей работы, полученным при 170°C, 2 – изотерма для расплавов по данным [5] при 500°C*

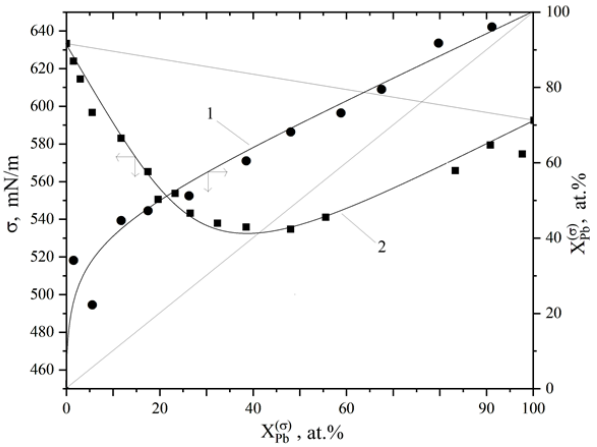

***Рис. 3.** Изотермы для бинарной системы In-Pb: $X_{Pb}^{(\sigma)}$ (X_{Pb}) (1) при 150°C по нашим данным и $\sigma_{solid}(X_{Pb})$ (2) при 147°C по данным [3].*

На рис. 3, для сравнения, приведена изотерма поверхностного натяжения из [3] (*147°C*) с пологим минимумом, свидетельствующим о взаимной поверхностной активности компонентов.

Список литературы

1. Ашхотов О.Г. Поверхностные характеристики р-металлов и их двойных сплавов: дис. … докт. физ.-мат. наук. Нальчик: КБГУ, 1997. – 147 с.
2. Ашхотов О.Г., Ашхотова И.Б., Алероев М.А., Магкоев Т.Т., Блиев А.П. Поверхностные свойства натрия, калия и их двойных сплавов в жидком состоянии // Журнал физической химии. 2017. Т. 91. № 7. – С. 1171–1176.
3. Королев В.И., Ластовцев А.Ю. Перспективы использования реакторов со свинцово-висмутовым теплоносителем на атомных ледоколах // Судостроение. 2006. № 3. – С. 33–36.
4. Хоконов Х.Б., Таова Т.М., Алчагиров Б.Б. Поверхностная энергия и поверхностное натяжение металлов и их бинарных сплавов в твердом состоянии // Известия Кабардино-Балкарского государственного университета. 2019. Т. 9. № 2. – С. 5–11.
5. Sekine T., Nagawa Y., Kudoch M. Handbook of AES. JEOL. 1982. – 223 p.

УДК 004.8

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ПОВЫШЕНИЯ ИНТЕРПРЕТИРУЕМОСТИ СВЕРТОЧНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ МЕДИЦИНСКОЙ ДИАГНОСТИКИ

Аюбов С.-М.М.,
ассистент кафедры «Программирование и инфокоммуникационные технологии»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: saidmuhammad8963@gmail.com

Аннотация. *В современных задачах медицинской визуализации, охватывающих рентгенографию, гистопатологию и дерматоскопию, сверточные нейронные сети (CNN) достигают исключительных результатов по точности. Дан систематический анализ инструментов интерпретации работы CNN, включая техники визуализации активационных слоев (CAM, Grad-CAM, Score-CAM), а также разнообразные подходы к атрибуции значимых признаков (Integrated Gradients, DeepLIFT, LRP) и концептуальные методы, такие как TCAV. Обсуждаются особенности применения вышеперечисленных методов к анализу медицинских изображений, специфика их ограничений. Критически оцениваются параметры клинической валидности предоставляемых объяснений и их релевантность для принятия врачебных решений – вопросы, имеющие ключевое значение для интеграции XAI в практику здравоохранения.*
Ключевые слова: *интерпретируемый искусственный интеллект, объяснимый ИИ (XAI), сверточные нейронные сети, медицинская диагностика, CAM, Grad-CAM, LIME, SHAP, LRP.*

STUDY OF METHODS FOR INCREASING THE INTERPRETABILITY OF CONVOLUTIONAL NEURAL NETWORKS IN SOLVING MEDICAL DIAGNOSTICS PROBLEMS

Ayubov S.-M.M.,
Associate Professor of the Department of General Physics
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *In modern medical imaging tasks spanning radiography, histopathology, and dermatoscopy, convolutional neural networks (CNNs) achieve exceptional accuracy. This paper systematically analyzes tools for interpreting CNN performance, including activation layer visualization techniques (CAM, Grad-CAM, Score-CAM), as well as various approaches to attribution of significant features (Integrated Gradients, DeepLIFT, LRP), and conceptual methods such as TCAV. The application of these methods to medical image analysis and their limitations are discussed. The clinical validity of the provided explanations and their relevance to clinical decision-making are critically assessed–issues of key importance for integrating CAI into healthcare practice.*
Keywords: *Interpretable artificial intelligence, explainable AI (XAI), convolutional neural networks, medical diagnostics, CAM, Grad-CAM, LIME, SHAP, LRP.*

Современные сверточные нейронные сети, применяемые в медицинских задачах, демонстрируют выдающиеся показатели точности при автоматическом анализе изображений: например, они способны идентифицировать пневмонию на рентгеновских снимках, меланому по данным дерматоскопии либо ретинопатию на основе снимков глазного дна. Несмотря на это, непрозрачность внутреннего устройства таких моделей всё ещё сдерживает широкое клиническое использование, поскольку отсутствует интерпретируемость решений, а полученные результаты зачастую вызывают настороженность у медицинских специалистов [2]. Для врача, принимающего клиническое решение, бинарный итог оказывается недостаточным – необходимы убедительные и клинически значимые объяснения, указывающие, какие морфологические признаки (например, контуры патологических очагов, мелкая текстура либо наличие кальцинатов) стали основанием для вывода сети. В противном случае сохраняется вероятность появления ложных связей, если модель опирается на технические дефекты снимка, вторичные маркеры или случайные паттерны, которые не несут смысла для диагностики.

В литературе представлены три основные категории алгоритмов повышения прозрачности нейросетевых предсказаний: методики генерации активационных карт (CAM,

Grad-CAM), инструменты распределения вклада исходных признаков (Integrated Gradients, LRP), а также аппроксимирующие прокси-модели (LIME, SHAP). Среди них особое место занимают семейства CAM-алгоритмов благодаря наглядности и высокой вычислительной эффективности. Оригинальная архитектура CAM требует модификации финальных слоёв: замена полносвязных слоёв на глобальный средний пулинг лимитирует применение к ранее обученным сетям. В противоположность этому, Grad-CAM расширяет возможности анализа, обеспечивая вычисление средних градиентов интересующего класса по признаковым картам и визуализируя полученные результаты в виде тепловых карт. Данный подход доказал свою практическую пользу, позволяя офтальмологам при оценке диабетической ретинопатии отличать реальные микроаневризмы от технических артефактов фокусировки [1].

И всё же, исходный Grad-CAM характеризуется невысоким пространственным разрешением, что затрудняет выявление малых структур, например микрокальцинатов размером менее 5 пикселей. При необходимости локализации нескольких очагов либо тонких морфологических элементов превосходство демонстрируют более совершенные решения: Grad-CAM++ (использующий производные второго порядка) и Score-CAM (отказывающийся от градиентов в пользу механизма маскирования карт признаков). Примечательно, что в области гистопатологических исследований применение Score-CAM увеличивает точность локализации злокачественных желез до 18% по сравнению с исходными методами. Вместе с тем общим ограничением всех CAM-подходов остаётся так называемое «подсвечивание» нерелевантных фрагментов, к примеру артефактов на фоне или элементов разметки, к которым модель может проявлять избыточное доверие после обучения.

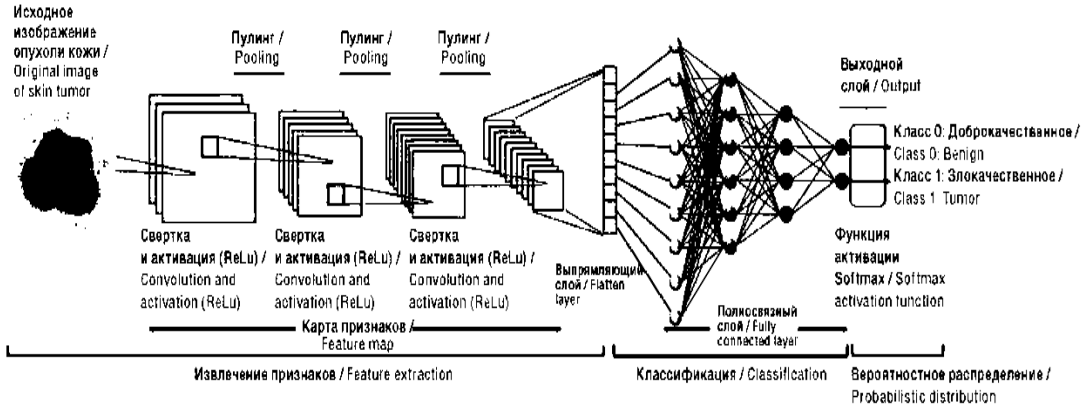

Рис 1. *Анализ исходного изображения с помощью нейронных сетей для выявления патологии*

Оценивание обоснований, предоставляемых медицинскими ИИ-системами, по-прежнему сопряжено с затруднениями. Существующие количественные показатели, такие как Pointing Game или Deletion AUC, не являются гарантами клинической применимости. Эмпирические работы с медработниками обнаружили неожиданный эффект: после внедрения Grad-CAM корректность определения пневмоторакса выросла с 76% до 84%, однако одновременно зафиксировано снижение чувствительности к искажениям, результатом чего стала усиленная склонность доверять ошибочным регионам тепловых карт [3]. Медицинские специалисты не всегда выявляли артефакты, невольно подтверждая ошибочные визуализации.

Неурегулированные вопросы данной области включают отсутствие эталонных («ground-truth») объяснений: различные эксперты могут выделять различные доминирующие признаки патологии. В качестве альтернативы разрабатываются внутренне объяснимые архитектуры: например, ProtoPNet осуществляет сопоставление элементов изображения с хранимыми обучаемыми прототипами («представленный фрагмент по своим признакам коррелирует с прототипом меланомы № 5»), а архитектуры с концептными ботлнеками сначала выделяют ключевые клинические критерии, затем агрегируют их в итоговый диагноз. Несмотря на инновационность, такие подходы пока уступают по точности классическим CNN на 3–7%, и одной из главных задач будущего остаётся преодоление этого разрыва [4].

В результате ни одна из имеющихся методик не может претендовать на универсальность. Для максимальной эффективности на практике предлагается комбинированный подход: использование Grad-CAM в качестве быстрой ориентировочной поддержки, применение LRP для углублённой инспекции сомнительных зон, а SHAP – для проверки отсутствия ошибочных взаимосвязей [5]. Только посредством интеграции производительности с прозрачностью выводов, пригодной для врачебной интерпретации, возможно воплощение подхода человеко-центрированного ИИ в сфере здравоохранения.

Список литературы

1. Беляев, М.И. Автоматизация анализа рентгеновских снимков грудной клетки с использованием методов глубокого обучения и объяснимого искусственного интеллекта / М.И. Беляев, А.Н. Аверкин, Ю.В. Трофимов, А.В. Шевченко, И.П. Муравьев // Системный анализ в науке и образовании. 2025. № 2. – С. – 32–41. EDN GXVEJD.
2. Трофимов, Ю.В. Нечёткие продукционные правила и нейросети глубокого обучения: объяснимый искусственный интеллект 2.0 для диагностики коронарных стенозов / Ю.В. Трофимов, В.С. Семашко, И.П. Муравьев, Е.М. Кузнецов, А.Н. Аверкин // Системный анализ в науке и образовании. 2025. № 2. – 87 с. EDN CXDCBU.
3. Аверкин, А. Н. Нейронечеткие модели в задачах извлечения правил из искусственных нейронных сетей / А.Н. Аверкин, М.В. Лишилин // Системный анализ в науке и образовании. 2024. № 1-2(118). – С. 10–14. DOI 10.32743/UniTech.2024.118.1.16682. EDN HFEEHI.
4. Аветисян, Д. Взгляд внутрь «черного ящика»: объясняем нейросети, распознающие опухоли мозга / Д. Аветисян // [Электронный ресурс]. 2026. Режим доступа: https://denisavetisyan.com/vzglyad-vnutr-chernogo-yashhika-obyasnyaem-nejroseti-raspoznayushhie-opuholi-mozga/ (дата обращения: 31.03.2026).
5. Аверкин, А.Н. Объяснимый искусственный интеллект в медицинской диагностике: методы визуализации решений сверточных нейронных сетей / А.Н. Аверкин, Ю.В. Трофимов // Государственный университет «Дубна». – Дубна, 2025. Т. 15, № 6. – С. 193–201. EDN PMIXYP.

УДК 004.8

ИССЛЕДОВАНИЕ СОЧЕТАНИЯ ГЕНЕРАТИВНЫХ СОСТЯЗАТЕЛЬНЫХ СЕТЕЙ И ДИФФУЗИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ФОТОРЕАЛИСТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Аюбов С.-М.М.,
ассистент кафедры «Программирование и инфокоммуникационные технологии»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: saidmuhammad8963@gmail.com
Хунариков М.-Э.А.,
магистрант 1 курса направления подготовки «Информатика и вычислительная техника»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»

Аннотация. *Исследуемые гибридные методики представляют собой интеграцию сильных сторон указанных генеративных подходов. В частности, подробно анализируется строение решений, таких как PaGoDA, SupResDiffGAN, Wavelet-Fourier-Diffusion, HART, а также оригинального алгоритма деформаций, использующего неявные нейронные представления, разработанного российскими специалистами. Эксперименты демонстрируют, что подобные гибридные системы способны обеспечить сопоставимое качество генерации изображений при одновременном сокращении продолжительности инференса вплоть до девятикратного снижения и уменьшении вычислительных затрат на 31% по сравнению с диффузионными моделями в чистом виде.*
Ключевые слова: *гибридные подходы, PaGoDA, SupResDiffGAN, мультимодальные модели, HART, генеративно-состязательные сети (GAN), неявные нейронные представления, фотореалистичный синтез изображений, диффузионные модели.*

STUDYING THE COMBINATION OF GENERATIVE ADVERSARY NETWORKS AND DIFFUSION MODELS OF PHOTOREALISTIC IMAGES.

Ayubov S.-M.M.,
Associate Professor of the Department of General Physics
Kadyrov Chechen State University
Khunarikov M.-E.A.,
Master's Student, 1st year
Field of study: «Computer Science and Computer Engineering»
Department of «Programming and Infocommunication Technologies»
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *The hybrid methods under study integrate the strengths of the aforementioned generative approaches. Specifically, the design of solutions such as PaGoDA, SupResDiffGAN, Wavelet-Fourier-Diffusion, and HART is analyzed in detail, as well as a unique deformation algorithm developed by Russian researchers using implicit neural representations. Experiments demonstrate that such hybrid systems can provide comparable image generation quality while simultaneously reducing inference time by up to ninefold and reducing computational costs by 31% compared to pure diffusion models.*
Keywords: *hybrid approaches, PaGoDA, SupResDiffGAN, multimodal models, HART, generative adversarial networks (GANs), implicit neural representations, photorealistic image synthesis, diffusion models.*

Одним из наиболее интересных направлений развития технологий генерации изображений являются гибриды, сочетающие в себе элементы генеративно-состязательных сетей (*GAN*) с потенциалом диффузионных моделей. Несмотря на то что классические *GAN* отличаются впечатляющей детализацией и быстрым процессом генерации, этот подход не лишён ряда существенных недостатков: архитектуры часто демонстрируют уязвимость к нестабильности при обучении, а также склонны к феномену коллапса моды, где вариативность создаваемых паттернов резко снижается и появляется ограниченный репертуар изображений.

В отличие от них, диффузионные модели демонстрируют выдающиеся метрики разнообразия и качества синтезируемых изображений (например, *FID* на *ImageNet-64* зачастую

опускается ниже отметки 3.0). Однако эти алгоритмы требуют значительных затрат: ресурсоёмкие вычисления и многошаговая процедура синтеза (количество итераций семплирования может достигать тысячи и более) существенно увеличивают время инференса [3]. Стремясь объединить сильные стороны обеих парадигм – быстродействие, характерное для GAN, и стабильное качество, присущее диффузионным сетям, – исследователи разрабатывают гибридные архитектуры. Иллюстративным примером таких решений является разработка *PaGoDA* (Progressive Growing of Diffusion Autoencoder), в которой интеграция структурных особенностей GAN и диффузионных стратегий позволяет создавать модели с более конкурентоспособным использованием вычислительных ресурсов. Магистерская работа из Варшавского политехнического университета, посвящённая сравнительному исследованию *StyleGAN-XL*, *EDM2* и *PaGoDA*, подтверждает, что подобные гибриды способны демонстрировать выдающиеся результаты при экономном расходовании ресурсов [4].

Значительный интерес представляют и специализированные решения, такие как *SupResDiffGAN*, спроектированный для задач восстановления сверхвысокого разрешения. В конструкции *SupResDiffGAN* предусмотрена оптимизация: внедрение латентных пространственных признаков и сокращение числа необходимых шагов диффузионного преобразования, что радикально ускоряет инференс без заметного ущерба для субъективного восприятия качества изображения. Более того, система адаптивного введения шума, предложенная авторами, способствует предотвращению переобучения дискриминатора, что устраняет одну из основных трудностей традиционных GAN-архитектур [1].

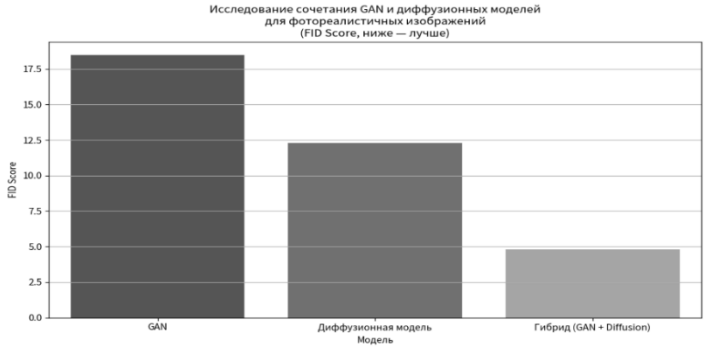

Рис. 1. *Сравнительный анализ диффузионных моделей*

Wavelet-Fourier-Diffusion-модель представляет собой инновационное объединение частотных и пространственных характеристик, поскольку сочетание элементов вейвлет-анализа и частичных преобразований Фурье формирует механизм, улавливающий как общую морфологию, так и мельчайшие детали визуальной информации. Подобная конструкция, адаптируя идею диффузионных процессов к смешанным частотным репрезентациям, особое значение приобретает при высокоуровневом анализе изображений [2]. Экспериментальные данные по наборам *CIFAR-10*, *CelebA-HQ* и *ImageNet* свидетельствуют о превосходстве этой схемы над классическими диффузионными генераторами и современными генеративно-состязательными сетями, что выражается в улучшенных значениях *FID* и *Inception Score*.

Значимый вклад в эволюцию гибридных генераторов вносят отечественные специалисты. Группа под руководством Игнатьева внедрила методологию деформирующего моделирования, где неявные нейронные представления сочетаются с архитектурой GAN для манипуляций формами и текстурами изображений. Такой алгоритм позволяет захватывать сложнейшие деформационные преобразования, в том числе необратимые, что расширяет возможности композиционного редактирования на практике.

Практическая релевантность гибридных решений подтверждается примером *HART* (*Hybrid Autoregressive Transformer*), разработанного исследователями *MIT* и *NVIDIA*. Здесь авторегрессионный компонент организует быструю генерацию крупномасштабной структуры, тогда как оптимизированная диффузионная часть, состоящая всего из 37 миллионов параметров, придает высокую детализацию итоговому результату. Система демонстрирует генеративное качество, сравнимое с диффузионными моделями объемом до двух миллиардов

параметров, осуществляя этот процесс с девятикратным преимуществом по скорости и снижением вычислительных затрат на 31%. Существенным достоинством *HART* является ее способность полноценно функционировать в среде обыденных пользовательских устройств, включая ноутбуки и смартфоны. В процессе интеграции гибридных моделей выделяются значительные трудности, такие как необходимость точечного использования диффузионного механизма на ранней фазе порождения данных, что может усилить накопление ошибок, согласно наблюдениям авторов *HART*. Практическим выходом служит внедрение диффузионного этапа лишь на завершающей стадии процесса, когда осуществляется предсказание остаточных токенов – это снижает потери при дискретизации информации. Однако совершенствование баланса между скоростью и точностью сохраняет актуальность: хотя методы дистилляции и уменьшения числа итеративных шагов обеспечили немалое ускорение вывода, гибридные схемы зачастую уступают чисто диффузионным моделям по *FID*, особенно применительно к наиболее сложным наборам данных [5].

Дальнейшее развитие гибридных моделей напрямую связано с созданием универсальных мультимодальных платформ, способных консолидировано обрабатывать визуальные, текстовые, аудио- и видеоматериалы. Как указано в аналитическом обзоре image inversion, именно гибридные конфигурации сегодня становятся краеугольным камнем для задач восстановления, редактирования и переноса стиля изображений в разных прикладных областях.

Список литературы

1. Игнатьев С., Егиазарян В., Рахимов Р., Бурнаев Е. Деформации на основе неявных нейронных представлений генеративных состязательных нейросетей для редактирования изображений // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2024. Т. 520, № 2. – С. 337–351. DOI: 10.31857/S268695432470070X.
2. Стародуб Я.Н., Вершинин Е.В. TinyML: технологии, области применения и экспериментальная реализация на платформе Grove Vision AI V2 // Оригинальные исследования. 2025. Т. 15, № 6. – С. 193–201.
3. Сазонов С.Н. Системы искусственного интеллекта: учебное пособие. – Ульяновск: Ульяновский государственный технический университет, 2023. – 84 с. ISBN 978-5-9795-2352-1
4. Зуйков М.А., До Ф.Х., Ле Ч.Д. и др. Исследование предиктивной аналитики на базе микроконтроллера с применением методов TinyML // Инновационное приборостроение. 2023. Т. 2, № 2. – С. 64–75. DOI: 10.31799/2949-0693-2023-2-64-75.
5. Аверкин А.Н. Объяснимый искусственный интеллект в медицинской диагностике: методы визуализации решений сверточных нейронных сетей / А.Н. Аверкин, Ю.В. Трофимов // Государственный университет «Дубна». – Дубна, 2025. Т. 15, № 6. – С. 193–201. EDN PMIXYP.

УДК 517

ОБ УВЕЛИЧЕНИИ ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ В ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ДИФФУЗИОННО-ЛОГИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Барабаш О.П.,
Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина
e-mail: navys9@yandex.ru
Половинкина М.В.,
Воронежский государственный университет инженерных технологий
e-mail: polovinkina–marina@yandex.ru
Половинкин И.П.,
Воронежский государственный университет,
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: polovinkin@yandex.ru

Аннотация. *Рассматривается проблема построения двухпараметрического семейства конечно–разностных схем для квазилинейного диффузионно-логистического уравнения, приводящих к трехдиагональным системам линейных алгебраических уравнений.*
Ключевые слова: *параболические уравнения, конечно-разностная схема, порядок аппроксимации.*

ON INCREASING THE ORDER OF APPROXIMATION IN A FAMILY OF DIFFERENCE SCHEMES FOR THE DIFFUSION-LOGISTIC EQUATION

Barabash O.P.,
Zhukovsky and Gagarin Air Force Academy
Polovinkina M.V.,
Voronezh State University of Engineering Technologies
Polovinkin I.P.,
Voronezh State University,
Belgorod State National Research University

Abstract. *The paper considers the problem of constructing a two-parameter family of finite-difference schemes for the quasi-linear diffusion-logistic equation, which leads to three-diagonal systems of linear algebraic equations.*
Keywords: *parabolic equations, finite difference scheme, approximation order.*

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Au(S-u), \quad (x,t) \in \Omega = (0 < x < 1, 0 < t \le T), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$u(0,t) = u_1(t), \quad u(1,t) = u_2(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{3}$$

Здесь A – постоянная роста, S – теоретический максимум функции u на множестве $\overline{\Omega} = (0 \le x \le 1, 0 \le t \le T)$.

Разобьем отрезки $[0,1]$ оси x и $[0,T]$ оси t на M и N частей соответственно. Тем самым мы вводим сетку

$$\overline{w}_{h\tau} = \overline{w}_h \times w_\tau = \{x_i = ih\} \times \{t_j = j\tau\}$$

с шагами $h = \frac{1}{N}$ и $\tau = \frac{T}{M}, i = 0,1,..,N,\ j = 0,1,..,M.$

рассмотрим следующее семейство разностных схем:

$$\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau}=\Lambda(\sigma y_i^{j+1}+(1-\sigma)y_i^j)+\phi_i^j,$$
$$\phi_i^j=(A-\beta)(S-y_i^j)y_i^{j+1}+\beta(S-y_i^{j+1})y_i^{j+1}, \quad (4)$$

где (см. [1])

$$\Lambda y_i=\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2},$$

$\sigma\in(0,1)$, $\beta\in(0,A)$, ϕ_i^j – сеточная аппроксимация правой части $f(u)=Au(S-u)$ уравнения (2) на внутренних узлах сетки. Начальное и краевые условия (2) и (3) соответственно аппроксимируются точно:

$$y_o^j=u_1^j, y_N^j=u_2^j,$$
$$y_i^0=y(x_i,0)=u_0(x_i).$$

Показано, что при $u\in C^4(\overline{\Omega})$ разностное уравнение (4) аппроксимирует (1) с порядком $O(h^2+\tau)$. При $\sigma=0$ схема становится явной.

В двухпараметрическом семействе конечно–разностных схем (4) имеется уникальная конечно–разностная схема, аналогичная схеме Кранка-Николсон, дающая порядок аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$. Она получается из (4) если и только если

$$\sigma=\eta=\frac{1}{2}, \alpha=\beta=\frac{A}{2}. \quad (5)$$

В работе [2] рассмотрен вопрос об устойчивости разностной схемы (4). Полученные в [2] достаточные условия устойчивости для схемы (4) в случае условий (5) повышенного порядка аппроксимации не выполняются. Однако там же указано, что численный эксперимент демонстрирует устойчивость без этих условий, и приведено большое количество результатов численных экспериментов применения семейства разностных схем (4) к задачам изучения роста и распространения глиомы.

Список литературы

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 432 с.
2. Barabash O.P., Polovinkin I.P. A discrete model of glioma growth and spread. Comput Math Model (2025). https://doi.org/10.1007/s10598–025–09643–x

УДК 004.89

ПРИНЦИП РАБОТЫ НЕЙРОСЕТИ В РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ ЯЗЫКОПОНИМАНИЯ

Батаева П.С.,
доцент кафедры «Бизнес-информатика»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»

Аннотация. *Статья посвящена проблеме языкового понимания в нейронных языковых моделях – одному из наиболее дискуссионных вопросов на пересечении современной вычислительной лингвистики, философии сознания и когнитивной науки. Рассматривается эволюция подходов к моделированию языка – от символических систем к коннекционистским архитектурам, – а также принципиальные изменения в концепции значения, связанные с введением векторных представлений слов и механизма внимания. Анализируются как вычислительные достижения трансформерных моделей (BERT, GPT), так и их системные ограничения, обусловленные отсутствием заземленности в физической реальности и телесном опыте. Делается вывод о том, что языковые модели реализуют специфическую – реляционно-дистрибутивную – форму языкового понимания, принципиально отличную от человеческого смыслопостижения, однако структурно изоморфную ему в отношении внутренней организации языковой системы.*
Ключевые слова: *нейронные языковые модели, векторные представления, дистрибутивная семантика, BERT, GPT, семантика.*

THE PRINCIPLE OF NEURAL NETWORK OPERATION IN SOLVING THE PROBLEM OF LINGUISTIC UNDERSTANDING

Bataeva P.S.,
Associate Professor, Department of «Business Informatics»
Kadyrov Chechen State University

Annotation. *The article is devoted to the problem of linguistic understanding in neural language models, one of the most controversial issues at the intersection of modern computational linguistics, philosophy of consciousness and cognitive science. The evolution of approaches to language modeling is considered, from symbolic systems to connectionist architectures, as well as fundamental changes in the concept of meaning associated with the introduction of vector representations of words and the mechanism of attention. The computational achievements of transformer models (BERT, GPT) and their system limitations due to the lack of grounding in physical reality and bodily experience are analyzed. It is concluded that language models implement a specific relational-distributive form of linguistic understanding, which is fundamentally different from human semantic comprehension, but structurally isomorphic to it in relation to the internal organization of the language system.*
Keywords: *neural language models, vector representations, distributive semantics, BERT, GPT, semantics.*

Вопрос о природе языкового понимания с давних пор занимает центральное место в лингвистике, философии и когнитивной науке. Однако с появлением больших языковых моделей – систем, способных порождать связные тексты, переводить, рассуждать и отвечать на вопросы, – этот вопрос приобрел принципиально новое измерение: что именно происходит внутри нейронной сети, когда она «читает» предложение? Является ли ее поведение подлинным пониманием смысла или лишь статистической имитацией, замечательно точной по форме, но пустой по содержанию?

Настоящая статья предпринимает попытку ответить на этот вопрос с позиций, объединяющих лингвистический анализ, философию сознания и достижения современной вычислительной лингвистики.

На протяжении нескольких десятилетий вычислительная лингвистика развивалась под знаком соперничества двух парадигм. Первая – символическая, восходящая к классическим работам Н. Хомского [1], – предполагала, что язык устроен как формальная система правил, оперирующая дискретными символами: словами, морфемами, синтаксическими категориями. Компьютерная программа, в рамках этого подхода, понимает язык постольку, поскольку корректно применяет грамматические правила, и именно в этой точной применимости и

состоит понимание. Вторая парадигма – коннекционистская, или нейросетевая, – берет свое начало в работах Д. Румельхарта и Дж. Макклелланда [2] и исходит из принципиально иной посылки: ментальные состояния, в том числе языковые, суть паттерны активации в распределенных сетях нейронов, а не символические структуры.

В 2003 году И. Бенжио с соавторами предложил нейронную вероятностную языковую модель, в которой каждое слово автоматически получало компактное непрерывное векторное представление – эмбеддинг [4]. Модель обучалась предсказывать следующее слово в тексте, и в процессе этого обучения семантически близкие слова естественным образом сближались в векторном пространстве. Это открытие получило широкую известность после выхода работы Т. Миколова с соавторами, создавших алгоритм Word2Vec [5]: выяснилось, что в пространстве эмбеддингов работают поразительно осмысленные арифметические соотношения. Классический пример: вектор(«король») − вектор(«мужчина») + вектор(«женщина») ≈ вектор(«королева»). Это не случайное совпадение, а симптом того, что модель научилась кодировать отношения между концептами в геометрических отношениях между точками пространства.

Подлинной революцией в области языкового моделирования стала архитектура трансформера, предложенная А. Васвани с соавторами в 2017 году [6]. Ее центральным элементом является механизм самовнимания (self-attention), позволяющий модели при обработке каждого слова динамически взвешивать все прочие слова в контексте – вне зависимости от их позиционного удаления. Также Й. Элман, исследуя рекуррентные нейронные сети, обнаружил, что простые сети способны самостоятельно извлекать из текстовых потоков грамматические структуры, никогда эксплицитно их не «изучая» [3].

На основе архитектуры трансформера Дж. Девлин с соавторами разработал модель BERT (Bidirectional Encoder Representations from Transformers), которая обучалась предсказывать замаскированные слова в тексте и следующее предложение [7]. Принципиальная новизна состояла в двунаправленности контекста: каждое слово кодировалось с учетом как левого, так и правого окружения. В результате BERT и его производные демонстрируют эффективность, прежде не достигавшуюся ни на одном из стандартных лингвистических бенчмарков – от синтаксического разбора до вывода о смысловых отношениях (NLI, natural language inference).

Л. Витгенштейн в «Философских исследованиях» [8] предлагает иной взгляд на природу понимания: понимать слово – значит уметь его правильно употреблять в соответствующих языковых играх. К. Манниг и Г. Шютце в своем фундаментальном учебнике по статистической обработке естественного языка [9] проводят важное различие между языковой компетенцией как знанием системы и языковой перформативностью как фактическим поведением. Модель GPT-3, описанная в работе Т. Брауна с соавторами [10], насчитывает 175 миллиардов параметров и обучена на сотнях миллиардов токенов. При этом она систематически терпит неудачу в задачах, требующих подлинного понимания физической реальности: например, в вопросах типа «Если я переверну кружку вверх дном и поставлю на стол, что произойдет с водой?» модели нередко дают неверные ответы – не потому, что не знают слов, а потому, что не имеют опыта взаимодействия с миром.

Отвечая на вопрос, вынесенный в заголовок статьи, следует признать, что нейронная языковая модель понимает язык – но понимает его иначе, чем человек. Ее понимание является реляционным, дистрибутивным и контекстуальным: она усвоила внутреннее устройство языковой системы – паттерны, иерархии, семантические поля, синтаксические зависимости – в объеме, недостижимом для любой предшествующей технологии. Вместе с тем это понимание лишено заземленности в телесном опыте, каузальной модели мира и субъективной перспективе – тех измерений, которые, по-видимому, конститутивны для полноценного человеческого смыслопостижения.

Список литературы

1. Chomsky N. Syntactic Structures. – The Hague: Mouton, 1957. – 117 p.

2. Rumelhart D. E., McClelland J. L. (eds.) Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition. Vol. 1: Foundations. – Cambridge: MIT Press, 1986. – 576 p.
3. Elman J. L. Finding Structure in Time // Cognitive Science. 1990. Vol. 14. № 2. – P. 179–211.
4. Bengio Y., Ducharme R., Vincent P., Jauvin C. A Neural Probabilistic Language Model // Journal of Machine Learning Research. – 2003. – Vol. 3. – P. 1137–1155.
5. Mikolov T., Chen K., Corrado G., Dean J. Efficient Estimation of Word Representations in Vector Space // arXiv preprint. 2013. arXiv:1301.3781.
6. Vaswani A., Shazeer N., Parmar N. et al. Attention Is All You Need // Advances in Neural Information Processing Systems. – 2017. – Vol. 30. – P. 5998–6008.
7. Devlin J., Chang M.-W., Lee K., Toutanova K. BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding // Proceedings of NAACL-HLT 2019. – Minneapolis, 2019. – P. 4171–4186.
8. Витгенштейн Л. Философские исследования / пер. с нем. М.С. Козловой, Ю.А. Асеева. – М.: АСТ: Астрель, 2011. – 347 с.
9. Manning C.D., Schütze H. Foundations of Statistical Natural Language Processing. – Cambridge: MIT Press, 1999. – 680 p.
10. Brown T.B., Mann B., Ryder N. et al. Language Models are Few-Shot Learners // Advances in Neural Information Processing Systems. 2020. Vol. 33. – P. 1877–1901.

УДК 517

ВОПРОСЫ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ В ГРУППАХ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Белецкий А.,
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
e-mail: abeletskiy@hse.ru

Аннотация. *В работе развивается систематический подход к изучению групп Энгеля на основе итеративной теории малых сокращений. Для n-энгелева соотношения En(x,y) = [...[x,y],y],...,y] построена геометрическая интерпретация, позволяющая анализировать расположение соотношений на диаграммах ван Кампена. Установлены комбинаторные оценки длин общих подслов энгелевых соотношений и получены условия выполнения условия малых сокращений C'(1/6). Предложен класс расширенных энгелевых соотношений, для которых доказано выполнение C'(1/6). Полученные результаты представляют систематический подход к проблеме нильпотентности Плоткина с позиций геометрической теории групп.*
Ключевые слова: *группы Энгеля, итеративная теория малых сокращений, проблема Плоткина, нильпотентность, диаграммы ван Кампена, условие C'(1/6).*

PROBLEMS OF CANONICAL FORM IN GROUPS OF NEGATIVE CURVATURE

Beletskiy A.,
National Research University Higher School of Economics

Abstract. *We develop a systematic approach to the study of Engel groups based on iterative small cancellation theory. For the n-Engel relation En(x,y) = [...[x,y],y],...,y], we construct a geometric interpretation enabling the analysis of relation placement on van Kampen diagrams. We establish combinatorial estimates for the lengths of common subwords of Engel relations and obtain conditions under which the C'(1/6) small cancellation condition holds. A class of extended Engel relations is introduced for which the C'(1/6) condition is proved. These results constitute the first systematic small cancellation approach to Plotkin's nilpotency problem.*
Keywords: *Engel groups, iterative small cancellation theory, Plotkin's problem, nilpotency, van Kampen diagrams, C'(1/6) condition.*

Группа G называется n-энгелевой, если для любых элементов x, y выполнено соотношение En(x,y) = 1, где En(x,y) = [...[x,y],y],...,y] (y входит n раз). Одним из центральных открытых вопросов в теории энгелевых групп является проблема Плоткина (1950-е годы): является ли всякая n-энгелева группа нильпотентной? Для $n \leq 4$ ответ положителен (Цорн [10], Хайнекен [6], Траустасон [9]), однако для $n \geq 5$ вопрос остаётся открытым.

Классические подходы к проблеме Плоткина основаны на коммутаторном исчислении и теории алгебр Ли. В данной работе мы предлагаем принципиально иной, геометрический подход, основанный на итеративной теории малых сокращений, развитой в [1, 2, 3]. Этот подход позволяет исследовать структуру энгелевых групп через комбинаторику диаграмм ван Кампена и условия малых сокращений.

Ключевым наблюдением является то, что энгелево соотношение En(x, y) допускает естественную рекурсивную геометрическую интерпретацию. Мы вводим индексированную запись, в которой соотношение представляется как произведение элементов y(j), и строим алгоритм геометрической конструкции, позволяющий визуализировать структуру соотношения на плоскости. Используя эту конструкцию, мы доказываем комбинаторные оценки: если два экземпляра соотношения En(x, y) пересекаются по элементу yi с минимальным индексом i, длина общего подслова равна 1 + 2^(n−i).

На основе этих оценок мы устанавливаем, что условие малых сокращений C'(1/6) нарушается лишь при склейке соотношений по элементам y0 или y1. Для преодоления этого препятствия вводится класс расширенных энгелевых соотношений, для которых доказано

выполнение условия C'(1/6). Кроме того, показано, что переход от букв к произвольным словам в энгелевых соотношениях сводится к буквенному случаю с помощью леммы Дена и свойств стандартных вхождений [4].

Развиваемый подход является первой систематической попыткой применить итеративную теорию малых сокращений в смысле И. Рипса к проблеме Плоткина и открывает новое направление исследований на стыке геометрической теории групп и теории энгелевых групп.

Работа выполнена совместно с А.Я. Беловым.

Список литературы

1. Atkarskaya A., Belov-Kanel A., Plotkin E., Rips E. Group-like Small Cancellation Theory for Rings // International Journal of Algebra and Computation. 2023.
2. Atkarskaya A., Belov-Kanel A., Plotkin E., Rips E. Group-like Small Cancellation Theory, Habilitationsschrift.
3. Beletskiy A., Ivanov-Pogodaev I. Iterative Small Cancellation Theory and Engel Groups // Preprint.
4. Collins D. J., Juhasz A. Graded Small Cancellation Theory // Preprint.
5. Gruenberg K. W. The Engel Elements of a Soluble Group // Illinois Journal of Mathematics. 1959. Vol. 3. – P. 151–168.
6. Heineken H. Engelsche Elemente der Länge drei // Illinois Journal of Mathematics. 1961. Vol. 5. – P. 681–707.
7. Ol'shanskii A. Yu. Geometry of Defining Relations in Groups. – Springer, 1991.
8. Rips E. Lecture Notes on Iterative Small Cancellation Theory, unpublished.
9. Traustason G. Engel Groups // Groups St Andrews 2009. – London Mathematical Society Lecture Note Series. – 2011. Vol. 388. – P. 520–550.
10. Zorn M. Nilpotency of Finite Groups // Bulletin of the American Mathematical Society. 1936. Vol. 42. – P. 485–486.
11. Zel'manov E. I. Solution of the Restricted Burnside Problem for Groups of Odd Exponent // Mathematics of the USSR-Izvestiya. 1991. Vol. 36, № 1. – P. 41–60.

УДК 517

СУЩЕСТВОВАНИЕ АПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ВО ВНЕШНЕМ БИЛЬЯРДЕ ОКОЛО ПРАВИЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА (КРОМЕ n=3, 4, 6)

Белый А.А.,
магистрант кафедры «Дискретная математика»
ФГАОУ ВО НИУ «Московский физико-технический институт»
e-mail: belyi.aa@phystech.edu
Канель-Белов А.Я.,
профессор кафедры «Математическая логика и теория алгоритмов»
ФГАОУ ВО «МГУ имени М.В. Ломоносова»
e-mail: kanelster@gmail.com
Рухович Ф.Д.,
доцент кафедры «Алгоритмы и технологии программирования»
ФГАОУ ВО НИУ «Московский физико-технический институт»
e-mail: dprpavlin@gmail.com
Тиморин В.А.,
профессор факультета математики
ФГАОУ ВО НИУ «Высшая школа экономики»
e-mail: vtimorin@hotmail.com

Аннотация. *Во внешнем бильярде около правильного многоугольника (кроме случаев треугольника, квадрата и шестиугольника) существует апериодическая точка. Другими словами, найдётся точка, такая что итерация её образов под действием внешнего бильярда порождает последовательность попарно различных точек. Этот результат отвечает на вопрос, поставленный Р. Шварцем на пленарном докладе на Международном математическом конгрессе 2022.*
Ключевые слова: *внешние бильярды, апериодическая точка, динамические системы.*

EXISTENCE OF AN APERIODIC POINT IN EXTERNAL BILLIARDS NEAR A REGULAR POLYGON (EXCEPT n=3,4,6)

Belyi A.A.,
Master's student, Department of Discrete Mathematics
National Research University «Moscow Institute of Physics and Technology»
Kanel-Belov A.Ya.,
Professor, Department of Mathematical Logic and Theory of Algorithms
Lomonosov Moscow State University
Rukhovich F.D.,
Associate Professor, Department of Algorithms and Programming Technologies,
Moscow Institute of Physics and Technology
Timorin V.A.,
Professor, Faculty of Mathematics,
National Research University Higher School of Economics

Abstract. *In exterior billiards, an aperiodic point exists near a regular polygon (except for triangles, squares, and hexagons). In other words, there exists a point such that iterating its images under the action of the exterior billiards generates a sequence of pairwise distinct points. This result answers the question posed by R. Schwartz in his plenary talk at the 2022 International Congress of Mathematicians.*
Keywords: *exterior billiards, aperiodic point, dynamical systems.*

Внешние биллиарды были введены Б. Нойманом (Bernhard Neumann) в 50-х годах XX века. Они стали популярны благодаря работам Ю. Мозера, где внешний, или двойственный, бильярд был предложен как важная модельная задача для выяснения роли гладкости в КАМ-

теории задачи многих тел. Классическим со времен 50-х является случай, когда M – правильный n-угольник. Если n=3, 4, 6, то плоскость разбивается на периодические области. С.Л. Табачников обнаружил самоподобие для случая n=5. Его исследования продолжили Бедари и Кассинем. Случаю n=8 посвящена монография Шварца, случаям n=8, 10, 12 – работа Ф.Д. Руховича.

На пленарном докладе на Международном математическом конгрессе 2022 Р. Шварцем была поставлена проблема: «The cases n = 8; 10; 12 also have a self-similar structure. Without having a reference, I have the sense that the case n = 7 is somewhat understood in the sense that there are some regions of renormalization. I think that the cases n = 9; 11 are not understood at all. G. Hughes has made beautiful and detailed pictures of outer billiards on regular polygons. These pictures (and earlier ones) suggest

Conjecture 6.5. Outer billiards on the regular n-gon has an aperiodic orbit if n ≠ 3; 4; 6.

I think that this is not known aside from n = 5; 8; 10; 12, and perhaps n = 7».

Теорема (Тиморин, Белов, Белый, Рухович).

Для любого внешнего билиарда вокруг правильного n-угольника при (n ≠ 3, 4, 6) существует апериодическая точка.

Р. Шварц, основываясь на компьютерных экспериментах, высказал предположение, что ТОЛЬКО для случаев n=5, 10, 8, 12 есть точное самоподобие, которое позволяет полностью описать периодические структуры и найти апериодические точки. Р. Шварц проводил эксперименты для случая $n=7$, и самоподобия ему найти не удалось. Тем не менее, более глубокий компьютерный анализ, сделанный нами, дал возможность установить, что в случаях $n=7, 14$ самоподобие все же существует. С его помощью, легко показать существование апериодической точки. В отличие от ранее исследованного случая правильных n-угольников при n=3, 4, 6, 8, 10, 12 нами установлены принципиально новые явления:

1. Существуют самоподобия с мультипликативно независимыми коэффициентами.
2. Существует континуум попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств (с различными символическими динамиками) – замыканий апериодических орбит точек. Тем самым показано, что существуют траектории, кодирующиеся неподстановочными системами.
3. Кроме того, во внешнем биллиарде вокруг правильного девятиугольника существуют самоподобия. Во внешнем биллиарде вокруг правильного девятиугольника (и 18-угольника) существует как минимум счетное число апериодических орбит, расположенных на ограниченной области.

Список литературы

1. Moser J., Outer billiards on kites, Vol. 77. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1973, Annals of Mathematics Studies;
2. Moser J., Is the solar system stable? The Mathematical Intelligencer, 1978, Vol. 1, issue 2. – P. 65–71
3. Tabachnikov S., On the dual billiard problem, Advances in Mathematics, 1995, Vol. 115, no. 2, 221–249.
4. Bedaride N. и Cassaigne J., Outer billiards outside regular polygons, Journal of the London Mathematical Society, 2011, Vol. 84, issue 2, 303–324
5. Schwartz R.E., The octagonal PETs. Vol. 197, Providence, RI: American Mathematical Society, 2014 (Mathematical Surveys and Monographs.
6. Рухович Ф.Д. Внешние биллиарды вне правильных многоугольников: ручной случай, Изв. РАН. Сер. матем., 86:3 (2022), 105–160,

УДК 519.63

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Бештоков М.Х.,
доцент, канд. физ.-мат. наук,
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
e-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Аннотация. *Исследовано интегро-дифференциальное уравнение гиперболического типа с краевыми условиями первого рода. Для приближенного решения поставленной задачи построена разностная схема повышенного порядка точности. Методом энергетических неравенств получена априорная оценка в разностной форме. Из априорной оценки следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части, а также сходимость со скоростью, равной порядку аппроксимации.*
Ключевые слова: *уравнение гиперболического типа, первая краевая задача, интегро-дифференциальное уравнение, разностная схема, схемы повышенного порядка, априорная оценка, устойчивость и сходимость разностной схемы.*

HIGH-ORDER FINITE DIFFERENCE SCHEME FOR A HYPERBOLIC INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

Beshtokov M.Kh.,
Associate Professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences.
Department of Computational Methods, Institute of Applied Mathematics and Automation,
Kabardino-Balkaria Scientific Center of the Russian Academy of Sciences

Abstract. *A hyperbolic-type integro-differential equation with first-kind boundary conditions has been investigated. A high-order finite-difference scheme has been constructed to approximate the solution of the problem. Using the method of energy inequalities, a discrete-form a priori estimate has been derived. The a priori estimate implies the uniqueness and stability of the solution with respect to initial data and the right-hand side, as well as convergence at a rate equal to the order of approximation.*
Keywords: *hyperbolic-type equation, first boundary-value problem, integro-differential equation, finite difference scheme, high-order schemes, a priori estimate, stability and convergence of difference scheme.*

Постановка задачи. В замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x,t): 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ рассмотрим первую краевую задачу для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа

$$u_{tt} + \int_0^t \rho(x,t,\xi)u(x,\xi)d\xi = (ku_x)_x - qu + f(x,t),\ 0 < x < l,\ 0 < t \le T, \quad (1)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \quad (2)$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ 0 \le x \le l, \quad (3)$$

где коэффициенты интегро-дифференциального уравнения (1) удовлетворяют следующим условиям ограниченности и гладкости

$$0 < c_0 \le k(x,t), q(x,t) \le c_1,\ |k_t, q_t, k_x, q_x, \rho| \le c_2,$$

$$q, \rho, f \in C^{4,2}(\overline{D}),\ u \in C^{6,4}(\overline{D}),\ k(x,t), \frac{1}{k(x,t)} \in C^{5,2}(\overline{D}). \quad (4)$$

На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ задаче (1)-(3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^4 + \tau^2)$:

$$y_{\bar{t}t} + \sum_{s=0}^{j} y_i^s\, \bar{\tau} = \Lambda y^{(\sigma,\sigma)} - \frac{h^2}{12}\Lambda(py_{\bar{t}t}) - \frac{h^2}{12}\Lambda\left(p\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} y_i^s\, \bar{\tau}\right) -$$

$$-dy^{(\sigma,\sigma)} + \frac{h^2}{12}\Lambda\left(pdy^{(\sigma,\sigma)}\right) + \varphi,\quad (x,t) \in \bar{\omega}_{h,\tau}, \quad (5)$$

$$y(0,t) = y_0 = 0,\ y(1,t) = y_N = 0,\ t \in \bar{\omega}_\tau, \quad (6)$$

$$y(x,0)=u_0(x),\ y_t(x,0)=u_1(x), x\in\omega_h, \tag{7}$$

где

$$\Lambda y=(ay_{\bar{x}})_x,\quad \varphi=f+\frac{h^2}{12}\Lambda(pf),\quad p(x,t)=\frac{1}{k(x,t)},$$

$$a(x,t)=6[p(x-h,t)+4p(x-0{,}5h,t)+p(x,t)]^{-1}=6\left[\frac{1}{k_{i-1}}+\frac{4}{k_{i-0,5}}+\frac{1}{k_i}\right]^{-1},$$

$$\sum_{s=0}^{j}y_i^s\,\bar{\tau}=\sum_{s=1}^{j}y_i^s\,\tau+\frac{\tau}{2}y_i^0,\quad \bar{\tau}=\begin{cases}\frac{\tau}{2},\ s=0,\\ \tau,\ s\neq 0,\end{cases}$$

$$\bar{u}_1(x)=u_1(x)+\frac{\tau}{2}\left[\left(k(x,0)u'(x,0)\right)'-q(x,0)u(x,0)+f(x,0)\right],\ x\in\omega_h,$$

$$d_i^j=q\left(x_i,t_{j+\frac{1}{2}}\right),\quad p_{(-1)}=p_{i-1},\quad a^{(-1)}=a^{j-1},$$

$$y^{(\sigma_1,\sigma_2)}=\sigma_1\hat{y}+(1-\sigma_1-\sigma_2)y+\sigma_2\check{y}=y+(\sigma_1-\sigma_2)\tau y_{\mathring{t}}+\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\tau^2y_{\bar{t}t},$$

$$y^{(\sigma,\sigma)}=\sigma\hat{y}+(1-2\sigma)y+\sigma\check{y}=y+\sigma\tau^2y_{\bar{t}t}\ \text{ при }\ \sigma_1=\sigma_2,\quad y_{\mathring{t}}=0.5(\hat{y}_{\bar{t}}+y_{\bar{t}}),$$

$$\hat{y}=y^{j+1},\quad \check{y}=y^{j-1},\quad y=y_i^j=y(x_i,t_j).$$

Теорема. Пусть выполнены условия ограниченности и гладкости (4), тогда если $\sigma\geq\frac{1}{2}$, $h\leq\sqrt{\frac{3c_0}{c_0c_1+1}}\tau$, $h\leq h_0(c_0,c_1,c_2,\sigma,T)$, $\tau\leq\tau_0(c_0,c_1,c_2,\sigma,T)$, то для решения разностной задачи (5)-(7) справедлива априорная оценка

$$\|\,y^{j+1}\,\|_1^2\leq M\left[\sum_{j'=1}^{j}\|\,\varphi^{j'}\,\|_0^2\,\tau+\|\,y^1\,\|_1^2\right],$$

где $M=const>0$, не зависящая от h и τ.

Из этой оценки следует устойчивость и сходимость схемы (5)-(7) со скоростью $O(h^4+\tau^2)$ в норме

$$\|\,y\,\|_1=[\|\,y_{\bar{t}}\,\|_0^2+\|\,y_{\bar{x}}]|_0^2+\|\,\check{y}_{\bar{x}}]|_0^2+\|\,y\,\|_0^2+\|\,\check{y}\,\|_0^2+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau^2\,\|\,y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Список литературы

1. Beshtokov M.KH. Difference Scheme of Higher Order of Approximation for the Hallaire's Equation with Variable Coefficients // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2024. Vol. 58, №3. – P. 734–737.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1973. – 416 с.

УДК 519.63

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Бештокова З.В.,
канд. физ.-мат. наук,
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
e-mail: zarabaeva@yandex.ru

Аннотация. *Исследуется многомерное уравнение параболического типа с дробной производной Капуто и граничными условиями третьего рода в произвольной области. Вместо исходного дифференциального уравнения рассматривается модифицированное уравнение параболического типа с дробной производной Капуто и параметром регуляризации $\varepsilon > 0$. Для приближенного решения модифицированной задачи используется метод конечных разностей. С помощью принципа максимума получена априорная оценка в равномерной метрике в норме C. Доказаны устойчивость разностной схемы и равномерная сходимость решения предложенной разностной схемы к решению исходной дифференциальной задачи при любых значениях $0 < \alpha < 1$. Проведен подробный анализ выбора оптимальных значений ε.*

Ключевые слова: *уравнение параболического типа, дробная производная в смысле Капуто, третья краевая задача, принцип максимума, априорная оценка, устойчивость и сходимость.*

NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE THIRD BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A MULTIDIMENSIONAL PARABOLIC-TYPE EQUATION

Beshtokova Z.V.,
candidate of Physical and Mathematical Sciences.
Institute of Applied Mathematics and Automation,
Kabardino-Balkaria Scientific Center of the Russian Academy of Sciences

Abstract. *A multidimensional parabolic-type equation with the Caputo fractional derivative and third-kind boundary conditions in an arbitrary domain is investigated. Instead of the original differential equation, a modified parabolic-type equation with the Caputo fractional derivative and a regularization parameter $\varepsilon > 0$ is considered. The finite difference method is employed to approximate the solution of the modified problem. Using the maximum principle, an a priori estimate in the uniform metric in the C-norm is obtained. The stability of the difference scheme and the uniform convergence of the proposed difference scheme's solution to the original differential problem for all values of $0 < \alpha < 1$ are proven. A detailed analysis of the optimal choice of ε is conducted.*

Keywords: *parabolic-type equation, Caputo fractional derivative, third boundary value problem, maximum principle, a priori estimate, stability and convergence.*

Постановка задачи. В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \le t \le T]$ рассмотрим третью краевую задачу для уравнения параболического типа с дробной производной Капуто [1]–[2]:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T,$$

$$\Theta_k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_k} = \beta_{-k}(x,t)u - \mu_{-k}(x,t), \quad x_k = x_k^-, \quad t \ge 0,$$

$$-\Theta_k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_k} = \beta_{+k}(x,t)u - \mu_{+k}(x,t), \quad x_k = x_k^+, \quad t \ge 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G},$$

где $\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{\partial u(x,\eta)}{\partial \eta}\frac{d\eta}{(t-\eta)^{\alpha}}, 0 < \alpha < 1$ – дробная производная Капуто порядка α,

$$L = \sum_{k=1}^{p} L_k, \quad L_k u = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Theta_k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - q_k(x,t)u, \quad k = 1,2,\dots,p,$$

$$0 < c_0 \le \Theta_k(x,t), q_k(x,t) \le c_1, \quad \beta_{\pm k} \ge c_0 > 0, \quad c_0, c_1 = const > 0,$$

$$\mu_{+k} = \mu(x_k^+, x', t),\ \mu_{-k} = \mu(x_k^-, x', t),\ Q_T = G \times (0 < t \le T], \quad k = 1, \dots, p,$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_p),\ x' = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p).$$

$x_k^-, x_k^+ -$ левая и правая граничные значения x_k соответственно, $\Gamma_k = \{x_k^-, x_k^+\} \in \Gamma$, $\Gamma -$ граница области G, $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) -$ точка p-мерного евклидового пространства R_p.

Далее предположим, что решение $u(x,t)$ задачи (1) – (4) существует и единственно, коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют условиям гладкости, необходимым для построения разностной схемы:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_\nu^2}, \frac{\partial^4 u^\varepsilon}{\partial x_k^2 \partial x_\nu^2}, \frac{\partial^3 u^\varepsilon}{\partial x_k^2 \partial t}, \frac{\partial^{2+\alpha} u}{\partial x_k^2 \partial t^\alpha}, \frac{\partial^{2+\alpha} u^\varepsilon}{\partial x_k^2 \partial t^\alpha}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2},$$

$$\Theta_k(x,t) \in C^{3,1}(\overline{Q}_T),\ q_k(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q}_T),\ 1 \le k,\ \nu \le p, \quad k \ne \nu, \quad 0 < \alpha < 1.$$

В той же области $\overline{Q}_T$ вместо задачи (1) – (4) рассмотрим следующую задачу с малым параметром ε

$$\varepsilon u_t^\varepsilon + \partial_{0t}^\alpha u^\varepsilon = Lu^\varepsilon + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T,$$

$$\Theta_k(x,t)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k} = \beta_{-k}(x,t)u^\varepsilon - \mu_{-k}(x,t), \quad x_k = x_k^-, \quad t \ge 0,$$

$$-\Theta_k(x,t)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k} = \beta_{+k}(x,t)u^\varepsilon - \mu_{+k}(x,t), \quad x_k = x_k^+, \quad t \ge 0,$$

$$u^\varepsilon(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G},$$

где $\varepsilon = const > 0$.

Так как при $t = 0$ начальные условия для уравнений (1) и (5) совпадают, то в окрестности t=0 производная u_t^ε не обладает особенностью типа пограничного слоя [3] (см. также [4, с. 10]).

Список литературы

1. Лафишева М.М., Шхануков-Лафишев М.Х. Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 2. № 10. – С. 1878–1887.
2. Бештокова З.В., Бештоков М.Х., Шхануков-Лафишев М.Х. Об одной разностной схеме решения задачи Дирихле для многомерного уравнения диффузии с дробной производной Капуто в области с произвольной границей // Владикавказский математический журнал, 2022. Т.24. № 3. – С. 37–54.
3. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1967. Т.12. № 5. – С. 3–122.
4. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. – М.: Наука. 1977. – 439 с.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
6. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1973. – 416 с.

УДК 517

ПРОСТРАНСТВА ТИПА ОРЛИЧА, СВЯЗАННЫЕ С НЕЛИНЕЙНЫМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ

Борисов Д.И.,
главный научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений,
Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН
e-mail: borisovdi@yandex.ru

Аннотация. *В работе на основе нелинейных нелокальных функционалов свёрточного типа вводятся и исследуются пространства типа Орлича.*
Ключевые слова: *нелинейный нелокальный функционал, пространство типа Орлича.*

ORLICZ TYPE SPACES RELATED WITH NONLINEAR NONLOCAL FUNCTIONALS

Borisov D.I.,
Principal Scientific Researcher, Department of Differential Equations,
Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Center RAS

Abstract. *In the work, on the base of nonlinear nonlocal functionals of convolution type, we introduce Orlicz type spaces and study their properties.*
Keywords: *nonlinear nonlocal functional, Orlicz type space.*

В работе на основе нелинейных нелокальных функционалов свёрточного типа вводятся пространства типа Орлича. Исследуются основные свойства таких пространств. Доказано, что эти пространства банаховы, сепарабельны, и множество финитных бесконечно дифференцируемых функций плотно в них. Описана структура сопряжённых пространств, получены представления для линейных функционалов.

Работа выполнена совместно с А.Л. Пятницким.

УДК 517

КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ФУЛЛЕРЕНОВ

Бухштабер В.М.,
Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук
e-mail: buchstab@mi-ras.ru

Аннотация. *Доклад посвящен математической теории и её приложениям в задачах о фуллеренах и нанотрубках – фундаментальных объектах квантовой физики, квантовой химии и нанотехнологий. Изложение доступно широкой аудитории.*
Ключевые слова*: фуллерен, нанотрубка, многогранник Погорелова.*

COMBINATORIAL GEOMETRY AND SPECTRAL THEORY OF FULLERENES

Buchstaber V.M.,
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences

Abstract. *This talk explores mathematical theory and its applications to problems involving fullerenes and nanotubes – fundamental objects in quantum physics, quantum chemistry, and nanotechnology. It is accessible to a wide audience.*
Keywords: *fullerene, nanotube, Pogorelov polytope.*

Королевская шведская академия наук в 1996 году присудила Нобелевскую премию по химии Роберту Ф. Кёрлу, Гарольду В. Крото и Ричарду Э. Смалли за открытие фуллеренов.

Математическим фуллереном называется выпуклый простой трехмерный многогранник, все грани которого представляют собой пятиугольники и шестиугольники. Из классических результатов комбинаторной геометрии следует, что число пятиугольников обязательно равно 12. В настоящее время этот результат стал широко известен далеко за пределами математики как фундаментальное математическое условие существования объекта квантовой физики и квантовой химии. Это нашло отражение в лекциях лауреатов Нобелевской премии.

В докладе будут представлены и другие ограничения на существование физических фуллеренов и углеродных нанотрубок, которые следуют из математических результатов комбинаторной геометрии и спектральной теории графов. В центре внимания будет проблема классификации математических фуллеренов, их связь с многогранниками Погорелова и геометрией Лобачевского.

Список литературы

1. Бухштабер В.М., Ероховец Н.Ю. Конструкции семейств трехмерных многогранников, характеристические фрагменты фуллеренов и многогранники Погорелова // Известия РАН. Серия матем. 2017. Т. 81, № 5. – С. 15–91.
2. Bille Artur, Buchstaber Victor, Spodarev Evgeny. Some open mathematical problems on fullerenes // J. Chem. Inf. Model. 2025. V. 65, № 6. – P. 2911–2923.

УДК 517

О РАЗРЕШИМОСТИ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОНУСЕ

Васильев В.Б.,
профессор кафедры «Прикладная математика и компьютерное моделирование»
ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»
e-mail: vbv57@inbox.ru
Муджтаба Явар,
аспирант кафедры «Прикладная математика и компьютерное моделирование»
ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»
e-mail: mujtabajawar99@gmail.com
Тарасова А.С.,
аспирант кафедры «Прикладная математика и компьютерное моделирование»
ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»
e-mail: tarasova_as@bsuedu.ru

Аннотация. *Для модельного эллиптического псевдодифференциального уравнения в многомерном конусе получены условия разрешимости в пространстве Соболева-Слободецкого. Предполагается, что эллиптический символ допускает специальную факторизацию с определенным индексом.*
Ключевые слова: *псевдодифференциальное уравнение, эллиптический символ, конус.*

ON SOLVABILITY OF DISCRETE EQUATIONS IN A CONE

Vasilyev V.B.,
Professor of the Department of Applied Mathematis and Computer Modeling
«Belgorod State National Research University»
Mujtaba Yawar,
Postgraduate student of the Department of Applied Mathematis and Computer Modeling
«Belgorod State National Research University»
Tarasova A.S.,
Postgraduate student of the Department of Applied Mathematis and Computer Modeling
«Belgorod State National Research University»

Abstract. *Solvability conditions for a model elliptic pseudo-differential equation in Sobolev-Slobodetskii space are obtained. It is assumed that an elliptic symbol admits a special factorization with a certain index.*
Keywords: *pseudo-differential equation, elliptic symbol, cone.*

Работа посвящена дальнейшему исследованию дискретных псевдодифференциальных уравнений в конусах:

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \tilde{x} \in C_d, \qquad (1)$$

которое было начато в работах [1–6]. В отличие от предыдущих работ этого направления, здесь будет рассмотрен случай, когда для получения решения из нужного класса требуется потребовать от правой части уравнения выполнения определенных условий.

Пусть $\mathbb{Z}^{m+1}$ – целочисленная решетка в $\mathbb{R}^{m+1}$. Обозначим $C = C_+^{a_n} \times (0; +\infty)$, где $C_+^{a_n} = \{x \epsilon \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), x_m > a_n|x'|, a_n > 0, a_n$ может принимать значения $n, \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Таким образом, C – выпуклый острый конус в $\mathbb{R}^{m+1}$, и множество $C_d = h\mathbb{Z}^2 \cap C, h > 0$, мы будем называть дискретным конусом. Для функций дискретного аргумента $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{m+1}) \in h\mathbb{Z}^{m+1}$, можно определить дискретное преобразование Фурье формулой

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} u_d(\tilde{x}) h^2, \qquad \xi \in \hbar\mathbb{T}^{m+1},$$

$\mathbb{T}^{m+1}$ - куб $[-\pi,\pi]^{m+1}, \hbar = h^{-1}$. Разделенная разность первого порядка по k-ой переменной определяется стандартно

$$\left(\Delta_k^{(1)} u_d\right)(\tilde{x}) := \frac{u_d(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k + h, \dots, x_{m+1}) - u_d(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{m+1})}{h},$$

и далее по индукции $\Delta_k^{(j)} u_d - \Delta_k^{(1)}(\Delta_k^{(j-1)} u_d)(\tilde{x})$.

С помощью разделенных разностей и их дискретных преобразований Фурье мы определим дискретные пространства Соболева–Слободецкого $H^s(C_d)$ для исследования разрешимости уравнения (1).

Пространство $H^s(C_d)$ состоит из дискретных функций из пространства $H^s(h\mathbb{Z}^{m+1})$, чьи носители содержатся в $\overline{C_d}$. Норма в пространстве $H^s(C_d)$ индуцируется нормой пространства $H^s(h\mathbb{Z}^{m+1})$

$$\|u_d\|_s = \left(\int_{\hbar\mathbb{T}^{m+1}} (1 + |\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2},$$

где $\zeta^2 = \hbar^2 \sum_{k=1}^{m+1} \left(e^{ih\cdot\xi_k} - 1\right)^2$.

Если $\tilde{A}_d(\xi)$ – измеримая периодическая функция в $\mathbb{R}^{m+1}$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^{m+1}$, то дискретным модельным псевдодифференциальным оператором A_d с символом $\tilde{A}_d(\xi)$ в дискретном конусе C_d называется оператор следующего вида

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^2} h^2 \int_{\hbar\mathbb{T}^2} \tilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \qquad \tilde{x} \in C_d,$$

Рассматривать класс символов, удовлетворяющих условию

$$c_1(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2} \le \left|\tilde{A}_d(\xi)\right| \le c_2(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2}$$

с постоянными c_1, c_2, не зависящими от h.

Ключевую роль в исследовании разрешимости уравнения (1) играет понятие периодической волновой факторизации эллиптического символа $\tilde{A}_d(\xi)$, под которой понимается его представление в виде:

$$\tilde{A}_d(\xi) = A_{d,\neq}(\xi) A_{d,=}(\xi),$$

где сомножители $A_{d,\neq}(\xi), A_{d,=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в трубчатые области $\mathcal{T}_h\left(\overset{*}{C}\right), \mathcal{T}_h\left(-\overset{*}{C}\right)$ вида $\hbar\mathbb{T}^{m+1} \pm \overset{*}{C}$ соответственно и удовлетворяют оценкам

$$c_1\left(1 + \left|\hat{\zeta}^2\right|\right)^{\frac{æ}{2}} \le \left|A_{d,\neq}(\xi + i\tau)\right| \le c_1'\left(1 + \left|\hat{\zeta}^2\right|\right)^{\frac{æ}{2}}$$
$$c_2\left(1 + \left|\hat{\zeta}^2\right|\right)^{\frac{\alpha-æ}{2}} \le \left|A_{d,=}(\xi - i\tau)\right| \le c_2'\left(1 + \left|\hat{\zeta}^2\right|\right)^{\frac{\alpha-æ}{2}},$$

с постоянными c_1, c'_1, c_2, c'_2 не зависящими от h, где

$$\hat{\zeta}^2 \equiv \hbar^2 \left(\sum_{k=1}^{m+1} \left(e^{ih(\xi_k + i\tau_k)} - 1 \right)^2 \right), \qquad \xi \in \hbar\mathbb{T}^{m+1}, \qquad \tau \in C,$$

$\overset{*}{C}$ – сопряженный конус. Число æ ∈ ℝ называется индексом периодической волновой факторизации.

Теорема. *Если символ $\tilde{A}_d(\xi)$ допускает волновую факторизацию с индексом æ таким, что æ-s=-n+ε, n∈N, |ε|<1/2, то для того, чтобы уравнение (1) имело единственное решение в пространстве $H^s(C_d)$ для правой части $v_d \in H^{s-a}(C_d)$ необходимо и достаточно выполнения условий:*

$$\Delta_{m+1}^{(j-1)} A_{d,=} (\ell v_d)_{|C_+^{an}} = 0, \qquad j=1,2,\ldots n,$$

где ℓv_d – произвольное продолжение v_d на $H^{s-a}(h\mathbb{Z}^{m+1})$.

Список литературы

1. Васильев В.Б. Операторы и уравнения: дискретное и непрерывное // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2019. Т. 160. – С. 18–27.
2. Васильев В.Б., Машинец А.А. О дискретной краевой задаче в четверти плоскости // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 142. – С. 169–181.
3. Васильев В.Б., Ходырева А.А. О дискретных краевых задачах в четверти плоскости // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 223. – С. 14–23.
4. Vasilyev A., Vasilyev V. Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space // Math. Model. Anal. 2018. V. 23, № 3. – P. 492–506.
5. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B., Tarasova O.A. Discrete boundary value problems as approximate constructions // Lobachevskii J. Math. V. 43, № 6. – P. 1446–1457.
6. Vasilyev V.B. Discreteness, periodicity, holomorphy, and factorization // In: Constanda C. (ed.) et al., Integral Methods in Science and Engineering. Vol. 1. Theoretical Techniques. Based on talks given at the 14th International Conference, Padova, Italy, July 25–29< 2016. Basel: Birkhäuser/Springer. 2017. – P. 315–324.

УДК 517.983.8

ОБ АСИМПТОТИКЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ДИСКРЕТНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Гадзова Л.Х.,
научный сотрудник отдела дробного исчисления,
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
e-mail: macaneeva@mail.ru

Аннотация. *Исследован вопрос об асимптотике фундаментального решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами при больших значениях спектрального параметра λ.*
Ключевые слова: *асимптотическое разложение, оператор дробного дифференцирования, производная Капуто, фундаментальное решение.*

ON THE ASYMPTOTICS OF THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF A GENERAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH A FRACTIONAL DISCRETE-DISTRIBUTED DIFFERENTIATION OPERATOR

Gadzova L.Kh.,
Scientific Researcher at the Fractional Calculus Department,
Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Center of RAS

Abstract. *The asymptotics of the fundamental solution of the linear ordinary differential equation of fractional order with constant coefficients, for large values of spectral parameter λ, is found.*
Keywords: *asymptotic expansion, operator of fractional differentiation, derivative of Caputo, fundamental solution.*

В интервале $0 < x < 1$ рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j \, \partial_{0x}^{\alpha_j} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \tag{1}$$

где $\alpha_j \in]1,2[$, $\lambda, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\beta_1 > 0$, $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_m$, $\partial_{0x}^{\gamma} u(x)$ – производная Герасимова–Капуто [1, с. 11].

В настоящее время имеется огромное количество работ, относящихся к теории и приложениям дифференциальных уравнений дробного порядка. Относительно изложения результатов и библиографии работ, связанных с линейными дифференциальными уравнениями дробного порядка, укажем работы [2] – [4]. В данной работе строится асимптотическая формула для фундаментального решения при больших значениях λ [5].

Введем в рассмотрение функцию

$$G_m^{\mu}(x) = G_m^{\mu}(x;\, \nu_1, \dots, \nu_m; \gamma_1, \dots, \gamma_m) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t} S_m^{\mu}(x;\, \nu_1 t, \dots, \nu_m t; \gamma_1, \dots, \gamma_m)\, dt,$$

где

$$\nu_1 = -\frac{\lambda}{\beta_1},\ \nu_j = -\frac{\beta_j}{\beta_1}, \qquad \gamma_1 = \alpha_1, \qquad \gamma_j = \alpha_1 - \alpha_j, \qquad j = \overline{2, m},$$

$$S_m^{\mu}(x;\, \nu_1 t, \dots, \nu_m t; \gamma_1, \dots, \gamma_m) = (h_1 * h_2 * \dots * h_m)(x),$$

$$h_j = h_j(x) \equiv x^{\mu_j - 1} \phi\left(\gamma_j, \mu_j; z_j x^{\gamma_j}\right),$$

а через

$$(g * h)(x) = \int_0^x g(t) h(x-t) dt, \qquad \phi(\rho, \varsigma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\, \Gamma(\rho k + \varsigma)}$$

обозначены соответственно свертка Лапласа функций $g(x)$ и $h(x)$ и функция Райта [6].

Далее считаем, что параметры функции $G_m^{\mu}(x)$

$$x > 0, \qquad \nu_j \in \mathbb{R}, \qquad \gamma_j > 0, \qquad \mu_j > 0.$$

Заметим, что функция $G_m^{\mu}(x)$ не зависит от распределения чисел $\mu_j > 0$, а зависит лишь от их суммы $\mu = \sum_{j=1}^{m} \mu_j$.

Полученный результат запишем в виде теоремы.

Теорема. *При* $\lambda > 0$ *справедлива асимптотическая формула*

$$G_m^{\mu}(x,\lambda) = -\beta_1 \sum_{l=0}^{n-1} \frac{Q_l}{(-\lambda)^{l+1}} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^{n+1}}\right), \qquad 0 < x < 1,$$

где

$$Q_l = \sum_{l_1+l_2+\cdots+l_m=l} \frac{l!}{l_1!\, l_2! \ldots l_m!} \prod_{j=1}^{m} {\beta_j}^{l_j} \frac{x^{\mu-\alpha_1-\sum_{j=1}^{m}\alpha_j l_j-1}}{\Gamma(\mu-\alpha_1-\sum_{j=1}^{m}\alpha_j l_j)}.$$

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект FEGS-2026–0004).

Список литературы

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003.
2. Джрбашян М.М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966.
3. Kilbas A.A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Math. Stud., Elsevier, Amsterdam, 2006.
4. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. –М.: Наука, 2005.
5. Гадзова Л. Х. Об асимптотике фундаментального решения обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 13, № 2. – С. 7–11.
6. Wright E. M. On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc. 1933. Vol. 8, № 29. – Pp. 71–79.

УДК 576.112: 004.89

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В БИОЛОГИЧЕСКИХ НАУКАХ: СОВРЕМЕННЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Гайрабеков Р.Х.,
доцент кафедры «Международное медицинское образование»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: ruslan.sarmat@mail.ru

Аннотация. *В работе представлен комплексный анализ применения методов искусственного интеллекта (ИИ) и компьютерных технологий в современных биологических исследованиях. Рассмотрены ключевые направления: геномика, протеомика, системная биология, медицинская диагностика и экология. Проведён критический анализ преимуществ и ограничений использования ИИ в биологии, а также обозначены перспективные направления развития. Показано, что интеграция ИИ с традиционными методами исследования существенно повышает точность и скорость анализа биологических данных, открывая новые возможности для персонализированной медицины и изучения сложных биологических систем.*
Ключевые слова: *искусственный интеллект, биоинформатика, геномика, машинное обучение, компьютерное моделирование, протеомика.*

USE OF COMPUTER TECHNOLOGIES IN BIOLOGICAL SCIENCES: CONTEMPORARY ACHIEVEMENTS AND PROSPECTS

Gayrabekov R.Kh.,
Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education,
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *This paper presents a comprehensive analysis of the application of artificial intelligence (AI) and computer technologies in modern biological research. Key areas of research are considered: genomics, proteomics, systems biology, medical diagnostics, and ecology. A critical analysis of the advantages and limitations of using AI in biology is provided, and promising areas for development are outlined. It is shown that the integration of AI with traditional research methods significantly improves the accuracy and speed of biological data analysis, opening up new possibilities for personalized medicine and the study of complex biological systems.*
Keywords: *artificial intelligence, bioinformatics, genomics, machine learning, computer modeling, proteomics.*

Мы живем в веке цифровых технологий и разработки, внедрения искусственного интеллекта. В настоящее время нет ни одной отрасли народного хозяйства, в которой не применялись бы цифровые технологии и искусственный интеллект (ИИ) [1–9]. Современные биологические науки характеризуются экспоненциальным ростом объёма данных, генерируемых в ходе экспериментов: секвенирование геномов, транскриптомика, протеомика и метаболомика создают массивы информации, требующие принципиально новых подходов к обработке и анализу. Традиционные методы, основанные на ручном анализе и статистической обработке, уже не справляются с этой нагрузкой.

ИИ и компьютерные технологии предлагают эффективные решения для обработки больших данных (Big Data), выявления скрытых закономерностей, прогнозирования биологических процессов, автоматизации рутинных задач.

Целью работы является систематизация современных достижений в области применения цифровых технологий в биологии, а также оценка их вклада в развитие науки и обозначение перспективных направлений исследования.

В ходе исследования проведён анализ научных публикаций за 2015–2023 гг. из баз данных PubMed, Scopus и Web of Science по ключевым словам: «artificial intelligence in biology», «machine learning in genomics», «bioinformatics tools». Отобрано и проанализировано 120 релевантных источников, включая обзорные и экспериментальные статьи, а также технические описания программных инструментов.

Методы исследования: системный анализ научных публикаций; сравнительная оценка эффективности различных алгоритмов ИИ; критический разбор ограничений и перспектив их применения [10–13].

Анализ геномных данных – одна из наиболее ресурсоёмких задач в современной биологии. Методы машинного обучения (МО) позволяют предсказывать функции генов и регуляторных элементов, выявлять генетические маркеры заболеваний, реконструировать эволюционные деревья, аннотировать геномы новых видов.

Главная задача протеомики состоит в выявлении механизма взаимодействия огромного числа белков в одном организме. Результаты подобных исследований необходимы фармакологам, медикам, в связи с тем, что зачастую прослеживается тесная связь между изменениями в белковом составе и болезненным состоянием человека. Эти данные позволят произвести быструю разработку новых лекарственных средств и передовых методов диагностики и лечения различных заболеваний, которые были проблемными для медицины в течение долгого времени ее существования. В настоящее время протеомика в купе с геномикой и биоинформатикой дают серьезные результаты, а в перспективе с использованием ИИ результаты могут значительно возрасти. Так, в результате разработки и внедрения программы AlphaFold2 произошло в структурной биологии революционное скачкообразное развитие [10–13].

Компьютерное моделирование позволяет изучать поведение биологических систем на разных уровнях – от молекулярных сетей до экосистем. Используемые подходы: дифференциальные уравнения для описания динамики метаболических путей; агентные модели для симуляции поведения клеток в тканях; байесовские сети для анализа регуляторных механизмов.

Цифровые технологии помогают отслеживать миграцию животных с помощью GPS-меток и дронов, анализировать спутниковые снимки для оценки состояния экосистем, создавать модели распространения инвазивных видов.

Преимущества: ускорение анализа больших данных в 10–100 раз по сравнению с традиционными методами; повышение точности прогнозов (например, предсказание структуры белка с точностью >90%); автоматизация рутинных задач (подсчёт клеток, анализ микрофотографий); возможность моделирования сложных процессов, недоступных для прямого эксперимента.

Ограничения: необходимость больших объёмов качественных данных для обучения моделей; риск переобучения и ложных корреляций; сложность интерпретации результатов «чёрных ящиков» (особенно для глубоких сетей); высокие требования к вычислительным ресурсам.

Ключевые направления на ближайшие годы: интеграция мультиомных данных (геномика + протеомика + метаболомика); развитие explainable AI (интерпретируемого ИИ) для биологии; использование квантовых вычислений для моделирования молекулярных взаимодействий; создание цифровых двойников биологических систем (органов, организмов, экосистем).

Использование компьютерных технологий и ИИ радикально трансформирует биологические науки. Эти инструменты не заменяют традиционные методы, но существенно расширяют их возможности, позволяя решать задачи, ранее считавшиеся невыполнимыми. Дальнейшее развитие будет зависеть от междисциплинарного сотрудничества биологов, математиков и программистов; совершенствования алгоритмов и аппаратного обеспечения; стандартизации данных и методов оценки результатов.

Перспективным направлением является создание унифицированных платформ для интеграции биологических данных и инструментов ИИ, что позволит ускорить научные открытия и их внедрение в практику.

Список литературы

1. Абдурахманов Г.М. Динамика показателей заболеваемости населения острым инфарктом миокарда в связи с экологией // Г.М. Абдурахманов, Э.С. Эржапова, Т.И. Гайрабекова // Естественные науки. 2011. № 4 (37). – С. 73–81.
2. Гайрабекова Ф.Р. Способ иммунологического прогнозирования малых повреждений миокарда // Ф.Р. Гайрабекова, М.А. Чичкова, Т.И. Гайрабекова // Патент на изобретение RU 2585391 C1, 27.05.2016. Заявка № 2014151807/15 от 19.12.2014.
3. Гайрабекова Т.И. Формирование рационального состава исполнителей бизнес-процессов в сельском хозяйстве // Т.И. Гайрабекова, И.Ю. Квятковская // Известия Волгоградского государственного технического университета. 2012. № 4 (91). – С. 98–103.
4. Гайрабекова Т.И. Разработка информационно-аналитической системы управления региональным агропромышленным комплексом // Т.И. Гайрабекова, И.Ю. Квятковская // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2012. № 6 (96). – С. 28–33.
5. Гайрабекова Т.И. Аналитико-синтетический подход к проектированию информационных систем управления агропромышленным комплексом Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1. – С. 165–170.
6. Гайрабекова Т.И. Алгоритм прогнозирования динамики развития фасциолезной инвазии // Т.И. Гайрабекова, Р.Х. Гайрабеков // Естественные и технические науки. 2020. № 10 (148). – С. 31–34.
7. Гайрабекова Т.И. Особенности информатизации предприятий агропромышленного комплекса // Гайрабекова Т.И., Юсупова А.Ш. // В сборнике: Современные проблемы экономического развития региона. Сборник научных трудов по материалам всероссийской научно-практической конференции. 2009. – С. 116–125.
8. Гишлакаев С.У. Информационные технологии и прогресс общества // С.У. Гишлакаев, Т.И. Гайрабекова // В сборнике: Тенденции развития естественных наук в современном информационном пространстве и их применение в агробиотехнологиях. Сборник статей I студенческой научно-практической конференции. – Грозный, 2021. – С. 41–44.
9. Скульский Д.В. Управление бизнес-процессами в муниципальных образованиях на основе искусственного интеллекта // Д.В. Скульский, В.Ф. Шуршев, М.И. Шикульский, Т.И. Гайрабекова // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 3. – С. 71–79.
10. Aliper A. et al. Deep learning in biomedicine // Nature Biotechnology. 2016. Vol. 34. – P. 1116–1124.
11. Jumper J. et al. Highly accurate protein structure prediction with AlphaFold // Nature. 2021. Vol. 596. – P. 583–589.
12. LeCun Y., Bengio Y., Hinton G. Deep learning // Nature. 2015. Vol. 521. – P. 436–444.
13. Zou J. et al. A primer on deep learning in genomics // Nature Genetics. 2019. Vol. 51. – P. 12–18.

УДК 004.8

РИСКИ И ПЕРСПЕКТИВЫ, СВЯЗАННЫЕ С РАЗВИТИЕМ И ВНЕДРЕНИЕМ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Гайрабекова Ф.Р.,
доцент кафедры «Кардиология ФПО»
ФГБОУ ВО «Астраханский ГМУ» Минздрава России
e-mail: miss-orstho@mail.ru
Гайрабеков Р.Х.,
доцент кафедры «Международное медицинское образование»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: ruslan.sarmat@mail.ru

Аннотация. *Современные социально-политические взаимодействия претерпевают существенные изменения под влиянием технологий искусственного интеллекта (ИИ) и нейросетевых алгоритмов. Их активное внедрение в цифровую коммуникационную среду порождает комплекс новых вызовов. В частности, возникает необходимость оценки масштаба и специфики воздействия этих технологий на общественные процессы. Анализ выявляет широкий спектр связанных с ними социально-политических рисков. Для их нейтрализации и эффективного использования потенциала ИИ требуется реализация целенаправленных мер.*
Ключевые слова: *искусственный интеллект, внедрение, человек, рынок, умные энергетические системы, риск, алгоритм, этика, ответственность.*

RISKS AND PROSPECTS ASSOCIATED WITH THE DEVELOPMENT AND IMPLEMENTATION OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE

Gairabekova F.R.,
Associate Professor of the Cardiology Department of the Faculty of Postgraduate Education
Astrakhan State Medical University of the Ministry of Health of the Russian Federation
Gayrabekov R.Kh.,
Associate Professor, Department of International Medical Education
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *Modern socio-political interactions are undergoing significant changes under the influence of artificial intelligence (AI) technologies and neural network algorithms. Their active implementation in the digital communications environment is creating a host of new challenges. In particular, it is necessary to assess the scale and specific impact of these technologies on social processes. Analysis reveals a wide range of associated socio-political risks. Targeted measures are required to mitigate these risks and effectively utilize the potential of AI.*
Keywords: *artificial intelligence, implementation, people, market, smart energy systems, risk, algorithm, ethics, responsibility.*

За последние годы компьютерные технологии стали стремительно развиваться и так же стремительно внедряться в различные отрасли народного хозяйства [4]. Искусственный интеллект (ИИ) стал одним из самых значимых и быстрорастущих направлений в мировой индустрии. Его широкое применение обещает революционные перемены в различных сферах, начиная от медицины и заканчивая промышленностью и образованием. Тем не менее, наряду с огромным потенциалом, использование ИИ сопровождается рядом серьезных рисков и вызовов, требующих внимательного рассмотрения.

Искусственный интеллект способен значительно повысить качество жизни человека, улучшив медицинское обслуживание, образование, транспорт и коммунальные услуги. Например, в медицине ИИ уже успешно применяется для диагностики заболеваний, распознавания опухолей и рекомендаций по лечению [1, 2]. Более того, автономные системы вождения обещают радикально изменить наши представления о транспорте, сделав его безопасным и эффективным.

Развитие технологий искусственного интеллекта запускает масштабные перемены в экономике и обществе. Прежде всего, оно даёт толчок появлению принципиально новых высокотехнологичных секторов и повышает спрос на специалистов с углублённой подготовкой. По оценкам аналитиков, в ближайшие десятилетия мировой рынок ИИ может выйти на уровень капитализации в триллионы долларов, что сделает эту сферу одним из главных факторов международной конкурентоспособности [5, 6].

Не менее значима роль ИИ в переходе к «зелёной» экономике. Интеллектуальные системы управления энергопотреблением, инструменты мониторинга использования ресурсов и алгоритмы прогнозной аналитики помогают существенно повысить энергоэффективность. Благодаря этому удаётся сократить углеродный след и добиться более стабильной и рациональной работы как промышленных предприятий, так и городской инфраструктуры в целом [5].

Вместе с тем бурное развитие ИИ ставит перед обществом серьёзные этические вопросы. Решения, принимаемые алгоритмами, всё чаще влияют на жизнь людей, поэтому особенно остро встаёт проблема моральной ответственности. Чтобы снизить возможные риски, требуется создать надёжную нормативно-правовую базу. Она должна регулировать деятельность всех участников рынка и одновременно гарантировать справедливость, беспристрастность и прозрачность работы интеллектуальных систем [3, 6–8].

Автоматизация многих профессий и постепенная замена человеческого труда алгоритмами вызывают опасения по поводу роста безработицы. Хотя эксперты полагают, что появятся новые специальности, вопрос адаптации работников остаётся крайне актуальным. Это требует продуманной политики занятости и эффективной системы социальной защиты [5].

Ещё одна проблема связана с тем, что алгоритмы ИИ могут перенимать стереотипы и предубеждения, присутствующие в исходных данных для обучения. В результате возникают ошибки в рекомендациях и риск дискриминации отдельных групп населения. Чтобы избежать несправедливости и неравенства, необходимо регулярно проверять качество и объективность алгоритмов [3, 5–8].

Рост популярности ИИ также увеличивает риски кибератак и утечек персональных данных. Поскольку алгоритмы обрабатывают огромные массивы информации, защита личной информации выходит на первый план. Для обеспечения безопасности нужно разрабатывать надёжные системы защиты и внедрять современные стандарты шифрования [3].

Частичная замена людей алгоритмами способна ослабить межличностное общение и подорвать доверие между людьми. Поэтому важно сохранять эмоциональный компонент взаимодействия – особенно в сферах, где требуется забота и внимание к клиентам или пациентам [3].

Чтобы максимально использовать преимущества ИИ и одновременно минимизировать риски, необходим комплексный подход. Он должен охватывать следующие ключевые направления:

1. **Создание этико-правовой базы.** На международном уровне нужно разработать чёткие этические правила и законодательные нормы, регулирующие разработку и применение ИИ. Такие документы должны определять допустимые границы использования технологий.
2. **Контроль качества и объективности данных.** Важно регулярно проводить аудит и очистку массивов данных, на которых обучаются нейросети. Это поможет исключить ошибки, дискриминацию и предвзятость, которые могут закладываться в алгоритмы на ранних этапах.
3. **Развитие человеческого капитала.** Система образования должна адаптироваться к новым реалиям: необходимо расширять программы переподготовки и непрерывного обучения специалистов. Это позволит работникам быстрее осваивать новые технологии и успешно конкурировать на меняющемся рынке труда.
4. **Учреждение независимого надзора.** Для контроля за соблюдением установленных правил следует создать специальные регулирующие органы. Их задача –

отслеживать деятельность компаний, занимающихся разработкой и внедрением ИИ, и обеспечивать безопасность и прозрачность их решений для общества.

5. **Укрепление кибербезопасности.** Требуется активно развивать защитные технологии и протоколы шифрования, чтобы предотвращать несанкционированный доступ к данным и их хищение.

Искусственный интеллект открывает колоссальные возможности для прогресса человечества, однако несет серьезные риски и вызовы. Успех его внедрения и безопасного использования возможен лишь при активном участии государства, общественных институтов и международного сообщества. Только при условии совместного сотрудничества удастся добиться максимальной пользы от искусственного интеллекта, избежав нежелательных последствий и укрепив доверие общества к новым технологиям.

Список литературы

1. Аверьянова О.А. Искусственный интеллект в условиях современной медицины / О.А. Аверьянова, В.И. Коршак // Естественные и математические науки в современном мире. 2016. №5 (40). – С. 36.
2. Алексеева М.Г. Искусственный интеллект в медицине // М.Г. Алексеева, А.И. Зубов, М.Ю. Новиков // Международный научно-исследовательский журнал. 2022. № 7 (121). – С 10–13.
3. Володенков С.В. Риски, угрозы и вызовы внедрения искусственного интеллекта и нейросетевых алгоритмов в современную систему социально-политических коммуникаций: по материалам экспертного исследования // С.В. Володенков, С.Н. Федорченко, Н.М. Печенкин // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: ПОЛИТОЛОГИЯ 2024 Vol. 26 No. 2. – С. 406–424.
4. Гайрабекова Ф.Р. Способ иммунологического прогнозирования малых повреждений миокарда // Ф.Р. Гайрабекова, М.А. Чичкова, Т.И. Гайрабекова // Патент на изобретение RU 2585391 C1, 27.05.2016. Заявка № 2014151807/15 от 19.12.2014.
5. Массель Л.В. Современный этап развития искусственного интеллекта (ИИ) и применение методов и систем ИИ в энергетике // Информационные и математические технологии в науке и управлении 2021. № 4 (24). – С. 5–16.
6. Минаков А.В. Внедрение технологий искусственного интеллекта в реальном секторе экономики // А.В. Минаков, Н.Д. Эриашвили // Аудиторские ведомости. 2024. № 2. – С. 223–230.
7. Романова И.Н. Внедрение технологий искусственного интеллекта: анализ вероятных рисков и возможных угроз // Материалы Ивановских чтений. 2021. № 4 (35). – С. 15–18.
8. Соколов Ю.И. Глобальные социальные риски высоких технологий XXI века // Проблемы анализа риска. 2012. Т. 9, № 6. – С. 4–29.

УДК 579:004

ЦИФРОВИЗАЦИЯ В ОБЛАСТИ МИКРОБИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ: НОВЫЕ ГОРИЗОНТЫ НАУКИ

Гайрабекова Р.Х.,
доцент кафедры «Микробиология и биология»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: gair.raisa@mail.ru

Аннотация. *В статье анализируется влияние цифровизации и искусственного интеллекта (ИИ) на микробиологические исследования. Рассмотрены ключевые направления внедрения цифровых технологий: компьютерное зрение для анализа микроскопических изображений, автоматизация подсчёта колоний, улучшение качества снимков с помощью ИИ-алгоритмов, интеграция с лабораторными информационными системами (ЛИС), развитие мобильных решений и телемедицины. Освещены основные преимущества цифровизации – повышение скорости и точности исследований, масштабируемость, экономия ресурсов и расширение доступности диагностики, – а также ключевые вызовы: высокие затраты на внедрение, сложности интеграции, вопросы безопасности данных и необходимость обучения персонала.*
Ключевые слова: *цифровизация, микробиологические исследования, искусственный интеллект, компьютерное зрение, автоматизация лабораторных процессов, антимикробная резистентность.*

DIGITALIZATION IN MICROBIOLOGICAL RESEARCH: NEW HORIZONS OF SCIENCE

Gayrabekova R.Kh.,
Associate Professor, Department of Microbiology and Biology
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *This article analyzes the impact of digitalization and artificial intelligence (AI) on microbiological research. Key areas of digital technology implementation are discussed: computer vision for microscopic image analysis, automated colony counting, image quality improvement using AI algorithms, integration with laboratory information systems (LIS), and the development of mobile solutions and telemedicine. The article highlights the key benefits of digitalization – increased research speed and accuracy, scalability, resource savings, and expanded diagnostic availability – as well as key challenges: high implementation costs, integration difficulties, data security issues, and the need for personnel training.*
Keywords: *digitalization, microbiological research, artificial intelligence, computer vision, laboratory process automation, antimicrobial resistance.*

Микробиологические исследования играют ключевую роль в медицине, фармацевтике, пищевой промышленности и экологии [1–3]. Традиционные методы анализа требуют значительных временных и трудовых затрат, а также подвержены человеческим ошибкам. Цифровизация и внедрение искусственного интеллекта (ИИ) открывают новые возможности для повышения точности, скорости и масштабируемости микробиологических исследований.

Основные направления цифровизации:

1. Компьютерное зрение для анализа изображений

Микроскопические изображения – основной источник данных в микробиологии. Компьютерное зрение позволяет автоматически классифицировать клетки и микроорганизмы, сегментировать изображения для выделения отдельных объектов, обнаруживать аномалии в клеточных структурах. Например, в Университетской больнице Монклендс (Шотландия) ИИ-системы анализируют образцы на наличие вируса папилломы человека (ВПЧ), ускоряя скрининг рака шейки матки [8].

2. Автоматизация подсчёта колоний

Подсчёт колоний микроорганизмов – трудоёмкий процесс, особенно при большом объёме образцов. Системы на базе ИИ сканируют чашки Петри и планшеты, определяют

границы колоний даже при их перекрытии, измеряют размер и плотность колоний. Например, система ProtoCOL 3 позволяет увеличить пропускную способность лабораторий с 16 до 300 планшетов в день [5, 8].

3. Улучшение качества микроскопических изображений. ИИ-алгоритмы помогают устранять шумы и размытие, повышать контрастность, восстанавливать детали на низкокачественных снимках. Например, разработана специальная программа для анализа цифровых изображений бактерий, полученных с помощью трансмиссионного электронного микроскопа. Метод основан на автоматическом выделении областей с пониженной яркостью и анализе их геометрических и яркостных характеристик [4].

4. Интеграция с лабораторными информационными системами (ЛИС). Цифровые платформы объединяют данные микроскопического анализа, результаты биохимических тестов, информацию о чувствительности к антибиотикам [7].

5. Мобильные решения и телемедицина. Компактные микроскопы с ИИ-поддержкой позволяют проводить экспресс-диагностику в полевых условиях, передавать данные для удалённой консультации, создавать базы данных патогенов в реальном времени.

Важным направлением является адаптация технологий компьютерного зрения для экстремальных условий, включая космические полёты. Исследования показывают, что специализированное ПО на базе Python способно в реальном времени обрабатывать изображения микробиоты, количественно оценивать тинкториальные и морфологические характеристики бактерий и автоматически классифицировать их типы [1]. Это открывает перспективы для мониторинга микробиологического состояния в условиях длительных космических миссий.

В России активно развиваются отечественные решения: автоматизированные счётчики колоний с ИИ (разработка НПП «Итэлма»), оптические сканеры для анализа биоплёнок, системы для мониторинга антимикробной резистентности. Эти технологии способствуют достижению технологического суверенитета и снижению зависимости от зарубежного оборудования [6].

Преимущества цифровизации:

1. Скорость – анализ данных ускоряется в десятки раз.
2. Точность – минимизация человеческих ошибок.
3. Масштабируемость – обработка больших объёмов данных без пропорционального увеличения штата.
4. Экономичность – снижение затрат на ручной труд.
5. Доступность – возможность удалённого анализа и консультаций.

Несмотря на очевидные преимущества, внедрение цифровых технологий сталкивается с рядом проблем:

1. Высокие начальные затраты – покупка оборудования и ПО требует значительных инвестиций.
2. Интеграция – сложность совмещения новых систем с существующими рабочими процессами.
3. Безопасность данных – необходимость защиты конфиденциальной информации, особенно в медицинских исследованиях.
4. Обучение персонала – потребность в переподготовке специалистов.
5. Обслуживание – необходимость регулярного обновления и калибровки систем.

Кроме того, для эффективного обучения ИИ-систем требуется большой объём качественных данных, что может быть затруднительно в условиях ограниченных ресурсов [7, 11].

Перспективы развития – ключевые тренды на ближайшие годы:

1. Развитие моделей ИИ, требующих меньшего объёма обучающих данных.
2. Внедрение мобильной микроскопии для удалённых районов.
3. Интеграция с Big Data и облачными платформами.

4. Создание международных баз данных микроорганизмов.
5. Применение ИИ для прогнозирования распространения инфекций [7, 9, 10].

Цифровизация микробиологических исследований – неизбежный этап развития науки. Внедрение ИИ и компьютерных технологий не только повышает эффективность лабораторий, но и открывает новые возможности для диагностики, разработки лекарств и мониторинга инфекционных заболеваний [3, 5]. Несмотря на существующие вызовы, долгосрочные выгоды делают эти инвестиции оправданными. Будущее микробиологии неразрывно связано с цифровыми инновациями, которые позволят вывести исследования на принципиально новый уровень.

Список литературы

1. Гайрабекова Ф.Р. Способ иммунологического прогнозирования малых повреждений миокарда // Ф.Р. Гайрабекова, М.А. Чичкова, Т.И. Гайрабекова // Патент на изобретение RU 2585391 C1, 27.05.2016. Заявка № 2014151807/15 от 19.12.2014.
2. Гайрабекова Т.И. Алгоритм прогнозирования динамики развития фасциолезной инвазии // Т.И. Гайрабекова, Р.Х. Гайрабеков // Естественные и технические науки. 2020. № 10 (148). – С. 31–34.
3. Кузнецов Е.Д., Шеблаев М.В., Соловьёва З.О. Методы компьютерного зрения для микробиологических исследований в условиях космического полёта // Доклад на международной конференции «Иванниковские чтения», 17 мая 2024 года. Веб-сайт: https://www.ivannikov-ws.org/
4. Навольнев С.О. Разработка компьютерной программы для количественной оценки цифрового изображения бактерий, полученного с помощью трансмиссионного электронного микроскопа // Бактериология. 2017. Т. 2, № 2. – С. 20–23.
5. Филиппов П.Н., Комаров А.Г., Лобастов К.М., Хакимов Р.А., Шевцов В.В., Усова Н.А. Prospects for using an artificial intelligence model as an educational platform for training microbiologists // RUDN Journal of Informatization in Education. 2025. Т. 22, № 4. – С. 41–434.
6. Хужаева Ш. А. Применение искусственного интеллекта в предмете микробиологии // КиберЛенинка.
7. Zhang X., Zhang D., Zhang X., Zhang X. Artificial intelligence applications in the diagnosis and treatment of bacterial infections // Frontiers in Microbiology. 2024. Vol. 15. – P. 1449844.
8. Ultralytics. Компьютерное зрение в микробиологии.
9. WHO. Global Antimicrobial Resistance and Use Surveillance System (GLASS) Report 2023. Geneva: World Health Organization, 2023.
10. European Centre for Disease Prevention and Control (ECDC). Antimicrobial resistance in the EU/EEA – 2023 data. Stockholm: ECDC, 2024.
11. Smith J., Brown A., Johnson L. Challenges of implementing AI in clinical microbiology laboratories // Journal of Clinical Microbiology. 2023. Vol. 61, № 3. – P. e01234–22.

УДК 63:004.77

РОЛЬ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ИССЛЕДОВАНИЙ В РАСТЕНИЕВОДСТВЕ

Гайрабекова Т.И.,
доцент кафедры «Прикладная математика и компьютерные технологии»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: sti_ing@mail.ru
Гишкаева Л.С.,
доцент кафедры «Агротехнологии»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: lima.gishkaieva.66@mail.ru
Исаева Л.М.,
доцент кафедры «Информационные технологии»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный педагогический университет»
e-mail: lz_256@mail.ru

Аннотация. *Статья посвящена роли цифровых технологий в современных исследованиях растениеводства. Раскрываются перспективы и особенности применения информационных технологий, искусственного интеллекта, Интернета вещей и робототехники для повышения эффективности исследований, оптимизации агротехнологий и повышения урожайности. Показано, как цифровизация меняет подходы к проведению научных изысканий, выдвигая на первый план принципиально новые инструменты анализа и моделирования, которые значительно сокращают временные и материальные затраты. Обосновывается необходимость скорейшего внедрения цифровых технологий для поддержания устойчивого развития растениеводства в России и мире.*
Ключевые слова: *цифровые технологии, растениеводство, моделирование.*

THE ROLE OF DIGITAL TECHNOLOGIES IN CROP RESEARCH

Gairabekova T.I.,
Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Technology,
Kadyrov Chechen State University
Gishkaeva L.S.,
Associate Professor, Department of Agricultural Technology
Kadyrov Chechen State University
Isaeva L.M.,
Associate Professor, Department of Information Technology
Chechen State Pedagogical University

Abstract. *This article examines the role of digital technologies in modern crop production research. It explores the potential and specific applications of information technology, artificial intelligence, the Internet of Things, and robotics to improve research efficiency, optimize agricultural practices, and increase crop yields. It demonstrates how digitalization is changing approaches to scientific research, highlighting fundamentally new analytical and modeling tools that significantly reduce time and material costs. It also substantiates the need for rapid implementation of digital technologies to support sustainable crop production in Russia and globally.*
Keywords*: digital technologies, crop production, modeling.*

Растениеводство в настоящее время перестало оставаться консервативной областью, изолированной от технического прогресса. Активное внедрение цифровых технологий изменяет сам подход к процессу исследований и производству. В настоящее время, научные исследования строго ориентированы на повышение продуктивности сельскохозяйственных культур, устойчивости растений к агрессивным внешним условиям и уменьшение вреда, наносимого природе. Поэтому информационные технологии превращаются в ключевой инструмент для достижения поставленных задач. Вместо прежних классических методов постановки экспериментов наука переходит к системному подходу, который основывается на

сборе и анализе значительных объемов данных, позволяющих создать и использовать прогнозные модели.

Огромные массивы динамических данных в сельском хозяйстве, накапливающиеся при проведении экспериментов, подвергаются обработке и детальному анализу, с использованием современных цифровых технологий. Сбор экспериментальных данных проводится благодаря размещению на опытных участках чувствительных сенсоров, беспилотных летательных аппаратов (БПЛА), космических спутников, что позволяет сформировать наиболее полную картину происходящих процессов роста и развития растений, а также получать информацию о влажности грунтов и насыщенности их минеральными веществами, сведения по температурным показателям и физиологически активной радиации, обеспечивающих благоприятное формирование посевов растений и их урожайности.

Искусственный интеллект нашел свое применение в агротехнологиях, главным образом в обработке изображений, прогнозировании урожайности и выборе оптимальных решений по уходу за культурами. Нейросети обучаются на массивах данных, полученных с полей, и формируют прогнозы, касающиеся болезней растений, состояния почвы и урожайности культур [1, 2].

Автономные системы управления и роботизированные агрегаты активно внедряются в современный агросектор. Автоматизированные тракторы, оборудованные системой автопилота, обладают способностью обходить препятствия и следовать строго заданному маршруту. Аналогично, беспилотные летательные аппараты совершают регулярные облеты полей, передавая в режиме реального времени фотографии и данные о состоянии посевов.

Моделирование процессов роста и развития растений и изменения окружающей среды стало ключевым компонентом исследований в растениеводстве. Такой подход позволяет не только глубоко понимать текущее состояние растений, но и прогнозировать их дальнейший рост и развитие, заблаговременно выявляя периоды повышенного риска заболеваний, оптимизируя способы и технику проведения орошения, внесения минеральных и органических удобрений.

Цифровые технологии, можно сказать, произвели настоящую революцию в подходе к изучению формирования урожая сельскохозяйственных растений. Ученые получили возможность конструировать виртуальные модели сложных биологических процессов, следить за ними в режиме реального времени и ставить максимально точные научные опыты. Помимо прочего, цифровизация помогает существенно сократить затраты на проведение исследований в растениеводстве, минимизировать потери урожая и повысить рентабельность аграрного сектора благодаря использованию наиболее эффективных приемов возделывания культур [3–5].

Современные исследования в научной агрономии тесно связаны с цифровой трансформацией. Правильно выбранные и грамотно реализуемые цифровые технологии открывают перед специалистами-аграриями новые горизонты повышения урожайности, оптимизации использования почвенно-климатических, биологических и материально-технических ресурсов и стабильного развития сельскохозяйственного производства.

Россия, несмотря на имеющиеся трудности в освоении этих технологий, имеет хорошие шансы занять лидирующие позиции в международной конкуренции благодаря активному внедрению digital-технологий в исследования и агропрактику.

Список литературы

1. Гайрабекова Т.И., Бабатиева С.С.-М., Гишкаева Л.С. Расчет продуктивности люцерны. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Номер свидетельства: RU 2023665711. Патентное ведомство: Россия. Год публикации: 2023. Номер заявки: 2023664689. Дата регистрации: 10.07.2023. Дата публикации: 19.07.202.
2. Гишкаева Л.С., Гайрабекова Т.И. Алгоритм прогнозирования урожайности зеленой массы люцерны в Чеченской Республике. / Актуальные вопросы в развитии АПК Юга России. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Грозный, 2022. – С. 85–91.

3. Гишкаева Л.С., Гайрабекова Т.И. Некоторые возможности информационных технологий для выполнения дисперсионного анализа продуктивности сортов озимой пшеницы в Чеченской Республике, Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Грозный, 2022. – С. 97–102.
4. Гишкаева Л.С., Гайрабекова Т.И. Сравнительный анализ урожайности сортов озимого ячменя в Чеченской Республике. В сборнике: Актуальные проблемы теории и практики развития приоритетных направлений. Материалы Международной научно-практической конференции. – Грозный, 2023. – С. 82–85.
5. Гайрабекова Т.И., Гишкаева Л.С. Программа обработки первичных результатов исследования в растениеводстве. В сборнике: Цифровая трансформация: новые горизонты устойчивого развития. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Грозный, 2025. – С. 13–16.

УДК 616: 004

ЦИФРОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В КАРДИОЛОГИИ

Гайрабекова Ф.Р.,
доцент кафедры «Кардиология ФПО»
ФГБОУ ВО «Астраханский ГМУ» Минздрава России
e-mail: miss-orstho@mail.ru
Лискани С.А.-А.,
врач-кардиолог
ГБУЗ АО «Александро-Мариинская областная клиническая больница»
e-mail: sliskani@mail.ru
Гайрабекова Т.И.,
доцент кафедры «Прикладная математика и компьютерные технологии»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: sti_ing@mail.ru

Аннотация. *В обзоре рассматриваются современные перспективы внедрения цифровых технологий (ЦТ) в клиническую практику врача-кардиолога и научные исследования в области медицины, также анализируются ключевые направления их применения такие, как разбор электрокардиограмм (ЭКГ), интерпретация данных эхокардиографии (ЭхоКГ) и томографии, стратификация рисков сердечно-сосудистых осложнений при ишемической болезни сердца, сердечной недостаточности, фибрилляции предсердий и других заболеваниях. Также обсуждаются ограничения внедрения ЦТ в клиническую практику и возможные негативные последствия.*
Ключевые слова: *цифровые технологии, кардиология, сердечно-сосудистые заболевания, искусственный интеллект.*

DIGITAL TECHNOLOGIES IN CARDIOLOGY

Gairabekova F.R.,
Associate Professor of the Cardiology Department of the Faculty of Postgraduate Education
Astrakhan State Medical University of the Ministry of Health of the Russian Federation
Liskani S.A.-A.,
Cardiologist,
Alexandro-Mariinskaya Regional Clinical Hospital
Gairabekova T.I.,
Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Technology
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *This review examines the current prospects for implementing digital technologies (DT) in cardiology clinical practice and medical research. It also analyzes key areas of their application, such as electrocardiogram (ECG) analysis, echocardiography (EchoCG) and tomography interpretation, and cardiovascular risk stratification for coronary heart disease, heart failure, atrial fibrillation, and other conditions. The limitations of implementing digital technologies in clinical practice, including potential negative consequences, are also discussed.*
Keywords: *digital technologies, cardiology, cardiovascular diseases, artificial intelligence.*

В настоящее время по данным Всемирной организации здравоохранения (ВОЗ), сердечно-сосудистые заболевания занимают ведущее место по смертности населения во всем мире. В этих условиях колоссальную актуальность приобретает внедрение передовых цифровых технологий (ЦТ). Стремительный рост вычислительных мощностей и развитие искусственного интеллекта открывают беспрецедентные возможности для трансформации кардиологической помощи. Цифровизация позволяет перейти от реактивного лечения уже развившихся заболеваний к предиктивной и персонализированной медицине, где ключевую роль играют ранняя диагностика, прогнозирование рисков на основе анализа больших данных и непрерывный мониторинг состояния пациента [2–5].

Внедрению ЦТ в клиническую практику медицины всегда предшествует серьезный и многоэтапный период научных исследований, благодаря чему обрабатываются большие объемы данных, моделируются вероятности развития заболеваний и пути их решения. Научные исследования в кардиологии переходят от разрозненных клинических наблюдений к работе с огромными массивами данных и сложными вычислительными моделями. Цифровая трансформация позволяет объединить информацию из тысяч источников в единые базы данных и биобанки.

ЦТ в медицине – это не просто внедрение электронных карт, но и фундаментальное изменение модели оказания медицинской помощи. ЦТ решает такие задачи, как:

- Сдвиг парадигмы от реактивной к проактивной медицине, то есть цифровизация позволяет сместить фокус с лечения уже возникших заболеваний на их прогнозирование и предотвращение (превентивная медицина). Непрерывный мониторинг с помощью носимых устройств (умные часы, трекер-браслеты) и имплантируемых сенсоров (например, система удаленного непрерывного мониторинга ЭКГ – Reveal LINQ) собирает данные о здоровье человека в реальном времени, позволяя отслеживать хроническое течение заболевания и выявлять отклонения на ранней стадии развития сердечно-сосудистых заболеваний.
- Доступность и удобство – телемедицина (онлайн-консультации, онлайн-консилиумы с участием врачей различных специальностей по стандартам оказания медицинской помощи) стирает географические границы, делая специализированную помощь доступной для жителей отдаленных регионов и маломобильных групп населения.
- Цифровой пациент – это активное участие человека в самом процессе диагностики и оказания медицинской помощи. Пациент имеет постоянный доступ к своей электронной медицинской карте, результатам лабораторных анализов и инструментальным исследованиям, рекомендациям врача через мобильные приложения, в том числе и «Госуслуги». Также пациент имеет возможность самому записаться на прием к врачам, используя мобильные приложения: «Госуслуги», «Доктор 30» (используется в г. Астрахань) и др.
- Автоматизация рутины – это внедрение систем поддержки принятия врачебных решений и голосовой ввод данных, что освободит медицинский персонал от бумажной работы, сокращая время на заполнение медицинских карт и увеличивая время на общение и физикальный осмотр пациентов.
- Единое цифровое пространство – интеграция медицинских клиник, лабораторий и аптек в единую сеть («ПроМед» в г. Астрахань – региональная информационно-аналитическая медицинская система, ЕГИСЗ – единая государственная информационная система в сфере здравоохранения в Российской Федерации) исключает потерю данных, дублирование исследований и позволяет видеть полную картину здоровья пациента любому авторизованному врачу. Основными функциями систем является полный доступ к медицинской документации пациентов, оформление листков нетрудоспособности, выписка рецептов на препараты, направления на лабораторные и инструментальные исследования в цифровом виде.
- Оптимизация ресурсов – предиктивная аналитика помогает прогнозировать загрузку стационаров медицинских клиник, выявить потребность в лекарственных препаратах, медицинских расходных материалах для процедур и перевязок, планировать график работы оборудования и медицинского персонала, снижая издержки.
- Искусственный интеллект (ИИ) как помощник врача-кардиолога. Алгоритмы ИИ анализируют медицинские изображения (ЭКГ, ЭхоКГ, магнитно-резонансной и компьютерной томографий, рентгенологических снимков) с точностью, порой превосходящей человеческую, находя патологии, незаметные глазу. ИИ может быстро и точно сегментировать камеры сердца, рассчитывая конечно-диастолический и конечно-систолический объемы, фракцию выброса без участия человека. Таким образом снижается вариабельность ЭхоКГ-результатов между разными врачами функциональной диагностики. ИИ также позволяет

прогнозировать гемодинамическую значимость стенозов коронарных артерий на основе результатов компьютерной томоангиографии, без выполнения коронароангиографии [1].

- Прогнозирование рисков – ИИ способен анализировать тысячи факторов риска сердечно-сосудистых заболеваний, может предсказать риск развития инфаркта миокарда, инсульта или других осложнений у конкретного пациента. ИИ использует шкалы: CRUSADE, CHA_2DS_2-VASc, EuroSCORE II, GRACE и другие для стратификации рисков.

Однако возникает множество вопросов, связанных с распределением ответственности между врачом и алгоритмом, на которых лежат ответственность за принятие окончательного решения, безопасность и медицинская этика. Цифровая трансформация медицинских данных требует беспрецедентных мер защиты персональных данных и устойчивости медицинских систем к взломам. Также при использовании цифровых технологий возникают сложности у пожилых пациентов из-за отсутствия навыков и умений работы с ними. Такая категория пациентов может оказаться исключенной из системы ИИ в здравоохранении, если не сохранить традиционные каналы оказания медицинской помощи.

В потоке информации медицинский персонал рискует перегрузиться данными от носимых устройств, программ и ЦТ. В ИИ необходимы интеллектуальные фильтры, сигнализирующие только о критических изменениях в состоянии здоровья человека.

Тем не менее, рост маркетплейсов медицинских услуг и телемедицинских платформ, которые меняют традиционные отношения «врач-пациент-клиника», создают новые модели в здравоохранении.

Цифровая трансформация в медицине – это не замена врача машиной, а создание инструментов, которые делают врача более эффективным, а медицину – более человечной, доступной и точной.

Список литературы

1. Беленков Ю.Н., Кожевникова М.В., Хабарова Н.В. и др. Роль искусственного интеллекта в кардиологии. Кардиология. 2025; 65(2): 3–16.
2. Гайрабекова Т.И., Гайрабекова Ф.Р., Гараев М.Х. Алгоритм прогнозирования и диагностики развития инфаркта миокарда. Естественные и технические науки № 4(179), 2023. – С. 121–125.
3. Гайрабекова Т.И., Гайрабекова Ф.Р. Расчет интервала QT с прогнозированием желудочковых тахикардий. / Международный научно-исследовательский журнал, № 7 (157), 2025.
4. Гайрабекова Ф.Р., Чичкова М.А., Чичков Ю.М. Способ оптимизации ранней иммунологической диагностики осложнений чрескожного коронарного вмешательства у пациентов с ишемической болезнью сердца. Печатная, патент на изобретение / RUS 2709458C2. 18.12.2019.
5. Прогнозирование и диагностика развития инфаркта миокарда: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022660706 Российская Федерация / Т.И. Гайрабекова, М.Х. Гараев. № 2022619987; регист.: 30.05.2022; опубл. 08.06.2022, 1 л.

УДК 517

ЧТО ТАКОЕ СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ?

Гасников А.В.,
Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук,
e-mail: gasnikov@yandex.ru

Аннотация. *В докладе рассматривается вопрос о том, как можно измерить критерии решения задач обзорной оптимизацией. Почему традиционные оракульные подходы, в которых используется метод вычисления градиента или функции значений, не всегда отражают реальную временную схему? И здесь речь не идет о параллелизации вычислений, а о том, что оракул может быть неточным. Чем точнее мы хотим получить функцию градиента или значения, тем дороже это может стоить. В связи с этим возникает вопрос: как выбрать точность оракула, чтобы суммарное время работы алгоритма было меньшим? На конкретных примерах мы покажем, как можно получить ответ на этот вопрос.*
Ключевые слова*: выпуклая оптимизация, безградиентная оптимизация, стохастическая оптимизация.*

WHAT IS THE COMPLEXITY OF OPTIMIZATION PROBLEMS?

Gasnikov A.V.,
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences

Abstract. *In this talk, we'll discuss how to measure the performance of optimization problems using survey optimization. Why do traditional oracle approaches, which use gradient or value function calculations, not always reflect the actual timing? This isn't about parallelization of computations, but rather about the fact that an oracle can be imprecise, and the more accurate we want to obtain a gradient or value function, the more expensive it can be. This raises the question of how to choose the oracle's accuracy to minimize the overall algorithm execution time. We'll attempt to answer this question through specific examples.*
Keywords: *convex optimization, gradient-free optimization, stochastic optimization.*

В докладе обсуждается вопрос о том, как можно измерять сложность решения задач выпуклой оптимизации, а также почему традиционные оракульные подходы, в которых оценивают число вычислений градиента или значения функции не всегда отражают реальную временную сложность. Подчеркнем, что речь идет не про параллелизацию вычислений, а про то, что оракул может быть неточный и чем точнее мы хотим получить градиент или значение функции, тем дороже это может стоит. В этой связи естественно возникает вопрос о том, как оптимально выбирать точность оракула, чтобы суммарное время работы алгоритма было бы наименьшим? На конкретных примерах мы покажем, как можно получить ответ на этот вопрос.

УДК 517.955, 517.957

МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Гишларкаев В.И.,
Институт математики, физики и информационных технологий
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: vakhag@mail.ru

Аннотация. *Предлагается метод анализа задачи Коши для широкого класса эволюционных уравнений в частных производных со степенными нелинейностями. Найдены функциональные пространства решений, в которых доказана локальная по времени разрешимость задачи Коши для рассматриваемых уравнений.*
Ключевые слова: *преобразование Фурье, теоремы Пэли-Винера, свертка, уравнения со степенными нелинейностями, интегро-дифференциальные уравнения.*

FORIER TRANSFORM METHOD FOR SEMILINIAR PARTIAL DIFFERENCE EQUATIONS

Gishlarkaev V.I.,
Institute of Mathematics, Physics and Information Technologies
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *A method for analyzing the Cauchy problem for a wide class of evolution partial differential equations with power-law nonlinearities is proposed. Function spaces of solutions are found in which the local-in-time solvability of the Cauchy problem for the equations under consideration is proved.*
Keywords: *Fourier transform, Paley-Wiener theorems, convolution, equations with power-law nonlinearities, integro-differential equations.*

В данной работе метод из [1, 2], основанный на преобразовании Фурье, применяется с соответствующими изменениями к полулинейным уравнениям.

Рассмотрены вопросы существования решений задачи Коши для уравнений со степенными нелинейностями по искомой функции u:

$$\partial_t^{\mathrm{l}} u(t,x) + \sum_{|\alpha|\le \mathrm{l}} a_\alpha \, \partial_x^\alpha u(t,x) + \sum_{k=2}^{k_0} a_{0k}\,(x) u^k(t,x) = f(x) \qquad (1.1)$$

Так же, как и в [2], мы пользуемся тем, что преобразование Фурье является гомоморфизмом из алгебры со сверточным умножением в алгебру с поточечным умножением, сводя применением преобразования Фурье исходное уравнение в частных производных к интегро-дифференциальному уравнению, которое можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение в подходящем банаховом пространстве. Существование решения задачи Коши для этого уравнения доказываем методом последовательных приближений.

Введем пространства и операторы, связанные с задачей Коши для уравнения (1.1). Обозначения для прямого и обратного преобразований Фурье: $F[\phi](\xi) = \hat{\phi}(\xi) = \int_{R_x^n} \phi\,(x) e^{i(\xi,x)} dx$, $F^{-1}[f](x) = \check{f}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{R_\xi^n} f\,(\xi) e^{-i(\xi,x)} d\xi$

Пространства Соболева: $H^s(R^n) := \{u \in S'(R^n) : \breve{u}(\xi) \in L_2\big(\mu_s(d\xi)\big)\}$, где $\mu_s(\omega) := \int_\omega (1+|\xi|^2)^s \, d\xi$ - мера, определенная на борелевской σ-алгебре $B(R^n)$; $S'(R^n)$ - пространство обобщенных функций умеренного роста; $\|u\|_{H^s(R^n)} := \|\breve{u}\|_{L_2(\mu_s)} := \Big(\int (1+|\xi|^2)^s |\breve{u}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}$; $\breve{H}^s(R^n) := F^{-1}\big(H^s(R^n)\big)$. Очевидно, $\breve{H}^s(R^n) = L_2(\mu_s)$; $\|\cdot\|_s := \|\cdot\|_{\breve{H}^s(R^n)} := \|\cdot\|_{L_2(\mu_s)}$. Используются также счетно-нормированные пространства: $H^\infty(R^n)$

$:=\cap_{m=1}^{\infty} H^m(R^n)$ с системой норм $\{\|\cdot\|_{H^m(R^n)}\}_1^{\infty}$; $\breve{H}^{\infty}(R^n):=\cap_{m=1}^{\infty}\breve{H}^m(R^n)$ с системой норм $\{\|\cdot\|_m\}_1^{\infty}$. Очевидно, $F^{-1}\left(H^{\infty}(R^n)\right)=\breve{H}^{\infty}(R^n)$.

Пространство Берлинга:

$$A_m^1(R^n):=\{f\in L_1(R^n):\|f\|_{A_m^1}:=\int_{R^n}\left|\check{f}(\xi)\right|(1+|\xi|)^{2m}d\xi<\infty\},$$

$\widetilde{A_m^1}(R^n):=F^{-1}\left(A_m^1(R^n)\right)$, очевидно, $\widetilde{A_m^1}(R^n)\subset L_1(R^n,(1+|\xi|)^{2m}=:\omega)$, $\|u\|_{1m}:=\int(1+|\xi|)^{2m}|u(\xi)|d\xi$.

Пусть $\{w_i\}_1^{\infty}\subset\widetilde{A_m^1}(R^n)$ и фундаментальна $L_1(R^n,\omega)$. Тогда для предельной в $L_1(R^n,\omega)$ функции w верно $\widehat{w}\in A_m^1(R^n)$. Пространство Берлинга вкладывается в пространство Соболева: $A_m^1(R^n)\subset H^m(R^n)$.

Используется также пространство $L_{1\infty}(R^n)=\cap_{m=1}^{\infty}L_1(R^n,(1+|x|)^{2m})$, выполняется вложение $\breve{H}^{\infty}(R^n)\subset L_{1\infty}(R^n)$.

Пространство коэффициентов и начальных данных:

$$C_F^A(R^n)=\{\Phi|_{R^n}:(\Phi:C^n\to C-\text{целая функция}:((Im\Phi(x)=0\ \forall x\in R^n)\wedge$$
$$\left(\int_{R^n}|\Phi(x)|^2\,dx<\infty\right)\wedge(\exists c,r\in R:\ |\Phi(z)|<ce^{r\|Imz\|_{R^n}}\ \forall z\in C^n))\}.$$

Согласно теореме Пэли-Винера о Фурье-образах $\left(\left(\check{v}(\xi)\in L_2(R^n)\right)\wedge(supp\check{v}\Subset R^n)\right)\Leftrightarrow\left(v(x)\in C_F^A(R^n)\right)$. Отсюда имеем $\left(v(x)\in C_F^A(R^n)\Rightarrow\check{v}(\xi)\in\breve{H}^{\infty}(R^n)\right)$

Применение обратного преобразования Фурье к уравнению (1.1) приводит к необходимости рассмотрения следующих операторов, соответствующих нелинейной части:

$$\forall g\in\breve{H}^{\infty}(R^n)\quad A_k(g)(\xi):=\int_{R_\zeta^{nk}}b_k(\xi-\zeta^1-\cdots-\zeta^k)\cdot g(\zeta^1)\cdot\ldots\cdot g(\zeta^k)d\zeta,$$

где $\zeta=(\zeta^1,\cdots,\zeta^k),\zeta^i=\left(\zeta_1^i,\cdots,\zeta_n^i\right)$. Аналогично вводятся операторы, соответствующие линейной части $\mathcal{A}_\alpha$, определенные на $\breve{H}^{\infty}(R^n)$:

$$\forall g\in\breve{H}^{\infty}(R^n)\quad\mathcal{A}_\alpha g(\xi):=i^{|\alpha|}\xi^\alpha a_\alpha g(\xi)$$

Лемма 2.1. *Если* $a_\alpha\in R,a_{0k}\in C_F^A(R^n)$, *то операторы* $\mathcal{A}_\alpha,A_k$, *определённые на* $\breve{H}^{\infty}(R^n)$, *действуют непрерывно в* $\breve{H}^{\infty}(R^n)$.

Для доказательства сначала выводится оценка $\left(\|\left(A_k(g)\right)(\cdot)\|_m\right)^2\le C(m,n,k,b_k)\cdot(\|g\|_{m+l})^{2k}$, где $l=nk+[(n+1)/2]+1$, $[\cdot]$ - целая часть числа. Из этой оценки имеем, что если $g(\cdot)\in\breve{H}^{\infty}(R^n)$, то $(A_kg)(\cdot)\in\breve{H}^{\infty}(R^n)$. Непрерывность A_k следует из неравенства $(\|A_k(g)-A_k(h)\|_m)^2\le C(m,n,k,b_k)\left(\|g-h\|_{m+l}\sum_{j=1}^{k}(\|g\|_{m+l})^{k-j}(\|h\|_{m+l})^{j-1}\right)^2$. Для линейных операторов $\mathcal{A}_\alpha$ лемма очевидна.

Из приведенных двух неравенств легко выводятся соответствующие неравенства и утверждение леммы для оператора $A:=\sum_{|\alpha|\le M}\mathcal{A}_\alpha+\sum_{k=2}^{k_0}A_k$, определенного на $\breve{H}^{\infty}(R^n)$.

Также верны следующие оценки для оператора A

$$\|\left(A(g)\right)(\cdot)\|_{1m}\le c_1(a_\alpha,a_{0k},k_0,\mathrm{I})\left(1+\|g\|_{1m+\mathrm{I}}^{k_0}\right),$$
$$\|A(g)-A(h)\|_{1m}\le c_2(a_\alpha,a_{0k},k_0,\mathrm{I})\|g-h\|_{1m+\mathrm{I}}\left(1+\sum_{k=2}^{k_0}\sum_{i=1}^{k}\|g\|_{1m+\mathrm{I}}^{k-i}\|h\|_{1m+\mathrm{I}}^{i-1}\right)\quad(2.1)$$

Из-за наличия суммы произведений некоторых степеней $\|g\|,\|h\|$ в правой части приведенных оценок не удается применить принцип сжимающих отображений. В данном случае мы получим лишь некоторую итерационную последовательность, сходящуюся к решению задачи.

Теорема 1. *Пусть*

$$\partial_t^{\mathfrak{l}} u(t,x) + \sum_{|\alpha|\le \mathfrak{l}} a_\alpha \, \partial_x^\alpha u(t,x) + \sum_{k=1}^{k_0} a_{0k}\,(x) u^k(t,x) = 0;$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), u_t|_{t=0} = u_1(x), \cdots, \partial_t^{\mathfrak{l}-1} u|_{t=0} = u_{\mathfrak{l}-1}(x) \qquad (3.1)$$

где все $u_i, a_{0k} \in C_F^A(R^n); a_\alpha \in R, \mathfrak{l} \ge 1.$

Тогда для любого натурального $m > n2^{-1} + 2\mathfrak{l}$, $\exists T > 0: \exists u \in L_1\left([0,T]; H^{m-\mathfrak{l}}(R^n)\right)$ *такая, что* $u(\cdot,x) \in C^{\mathfrak{l}}(0,T)\ \forall x \in R^n$, *и является решением задачи* (3.1).

Для доказательства применяется обратное преобразование Фурье к задаче (3.1). Полученная задача Коши для интегро-дифференциального уравнения с начальным условием $\check{u}|_{t=0} = \check{u}_0(\xi), \check{u}_t|_{t=0} = \check{u}_1(\xi), \cdots, \partial_t^{\mathfrak{l}-1} u|_{t=0} = \check{u}_{\mathfrak{l}-1}(\xi) \in L_2(R^n)$ записывается в эквивалентной форме:

$$\check{u}(t,\xi) = B\big(\check{u}(t,\xi)\big), B: L_1([0,T]; L_1(R^n, (1+|\xi|)^{2m}) \to L_1([0,T]; L_1(R^n, (1+|\xi|)^{2m-\mathfrak{l}}),$$

$$B(g) = \sum_{i=0}^{\mathfrak{l}-1} \check{u}_i\,(\xi)\frac{t^i}{i!} - \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{\mathfrak{l}-2}} \int_0^{t_{\mathfrak{l}-1}} A\,(g(t_{\mathfrak{l}},\cdot)(t_{\mathfrak{l}},\xi) dt_{\mathfrak{l}} dt_{\mathfrak{l}-1} \cdots dt_2 dt_1,$$

где $A = \sum_{|\alpha|\le \mathfrak{l}} \mathcal{A}_\alpha + \sum_{k=2}^{k_0} A_k$. Доказывается сходимость последовательности

$$v_0(t,\xi) = \sum_{i=0}^{\mathfrak{l}-1} \check{u}_i\,(\xi)\frac{t^i}{i!}, v_1(t,\xi) = B(v_0)(t,\xi), \ldots, v_k(t,\xi) = B(v_{k-1})(t,\xi), \ldots;\ t \in [0,T]$$

в пространстве $L_1\big([0,T]; L_1(R^n, (1+|\xi|)^{2m})\big)$ при соответствующем выборе T. При этом $\{\hat{v}_k(t,\cdot), \hat{v}(t,\cdot\} \subset A_\omega^1(R^n)$, где v- предельная функция. В силу свойств пространств Берлинга $\hat{v}(t,\cdot) \in H^m(R^n)$.

Покажем, что v является неподвижной точкой оператора B. То есть

$$v \leftarrow v_{k+1} = B(v_k) \to B(v) \qquad (3.2)$$

При этом левое предельное соотношение выполняется в $L_1\big([0,T]; L_1(R^n, \omega)\big)$.

Для обоснования правого предельного соотношения воспользуемся вторым неравенством из (2.1). Рассматривая в правой части (3.2) оператор B как оператор из $L_1\big([0,T]; L_1(R^n, (1+|\xi|)^{2m})\big)$ в $L_1\left([0,T]; L_1(R^n, (1+|\xi|)^{2m-2\mathfrak{l}})\right)$, который при этом будет непрерывен, получим, что $\lim_{k\to\infty} B(v_k) = B(v)$

Список литературы

1. Гишларкаев В.И. «Метод преобразования Фурье для уравнений в частных производных: формулы представления решений задачи Коши». Вестник Санкт-Петербургского Университета. Математика. Механика. Астрономия., 9(67):3 (2022), 480–494.
2. Гишларкаев В.И. «Метод преобразования Фурье для уравнений в частных производных. Часть 2. Существование и единственность решений задачи Коши для линейных уравнений». Вестник Санкт-Петербургского Университета. Математика. Механика. Астрономия., 10:1 (2023), 21–35.

УДК 538.9

ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРЫ И СВОЙСТВ КЕРАМИКИ НА ОСНОВЕ BNT-KNN, МОДИФИЦИРОВАННОЙ ФЕРРИТОМ ВИСМУТА

Глазунова Е.В.,
канд.физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
Научно-исследовательский институт физики Южного Федерально университета,
г. Ростов-на-Дону;
Комплексный научно-исследовательский институт им. Х.И. Ибрагимова
Российской академии наук, Российская Федерация, г. Грозный
e-mail: kate93g@mail.ru
Лымарь Д. В.,
магистрант 2-го года обучения, лаб.-исследователь,
Научно-исследовательский институт физики Южного Федерально университета,
г. Ростов-на-Дону
Хасбулатов С.В.,
канд. физ.-мат. наук, заведующий лабораторией экспериментальной физики,
Комплексный научно-исследовательский институт им. Х.И. Ибрагимова
Российской академии наук, г. Грозный
e-mail: kate93g@mail.ru

Аннотация. *Твердые растворы системы (1-y) ($0,9Bi_{0.5}Na_{0.5}TiO_3$-$0,1Na_{0.5}K_{0.5}NbO_3$) – $yBiFeO_3$ были синтезированы с использованием метода твердофазной реакции. В работе представлены результаты рентгеновской дифракции, микроструктурного анализа и диэлектрической спектроскопии. Показано, что в системе (1-y) ($0,9Bi_{0.5}Na_{0.5}TiO_3$-$0,1Na_{0.5}K_{0.5}NbO_3$) – $yBiFeO_3$ происходят следующие фазовые переходы: морфотропный фазовый переход из кубической в ромбоэдрическую фазу в диапазоне $0,3 < y < 0,5$ и фазовый переход типа спинодального распада ромбоэдрической фазы в диапазоне $0,6 < y < 0,7$. Поведение диэлектрических спектров свидетельствует о релаксорной природе объектов.*
Ключевые слова: *бессвинцовые сегнетопьезоэлектрики, морфотропный фазовый переход, релаксорная природа.*

STRUCTURAL AND PROPERTIES OF BNT-KNN-BASED CERAMICS MODIFIED WITH BISMUTH FERRITE

Glazunova E.V.,
Ph.D., senior researcher,
Institute of Physics, Southern Federal University, Rostov-on-Don bComprehensive Research
Institute named after. H.I. Ibragimov Russian Academy of Sciences, Russian Federation, Grozny
Lymar D.V.,
2nd year master's student, laboratory researcher,
Institute of Physics, Southern Federal University, Rostov-on-Don bComprehensive
Khasbulatov S.V.,
Ph.D., Head of the Laboratory of Experimental Physics aResearch
Institute named after. H.I. Ibragimov Russian Academy of Sciences, Grozny

Abstract. *Solid solutions of the (1-y)($0.9Bi_{0.5}Na_{0.5}TiO_3$-$0.1Na_{0.5}K_{0.5}NbO_3$) – $yBiFeO_3$ system were synthesized using the solid-state reaction method. The paper presents the results of X-ray diffraction, analysis of microstructure and dielectric characteristics. It is shown that the phase transitions occur in the (1-y)($0.9Bi_{0.5}Na_{0.5}TiO_3$-$0.1Na_{0.5}K_{0.5}NbO_3$) – $yBiFeO_3$ system: a morphotropic phase transition from the cubic to the rhombohedral phase in the range of $0.3 < y < 0.5$ and a phase transition of the spinodal decomposition type of the rhombohedral phase in the range of $0.6 < y < 0.7$. The behavior of the dielectric spectra indicates the relaxor nature of the objects.*
Keywords: *lead-free ferropiezoelectrics, morphotropic phase transition, relaxor nature.*

Развитие современных электронных устройств стимулирует активный поиск новых функциональных материалов. Особое место среди них занимают пьезоэлектрические оксиды,

способные к прямому и обратному преобразованию электрической и механической энергии, что делает их перспективными в устройствах преобразования и хранения энергии [1]. Несмотря на доминирование на рынке поликристаллических материалов на основе свинецсодержащей керамики типа цирконата-титаната свинца (PZT), в последние годы остро встает проблема токсичности такой продукции. В связи с этим приоритетной задачей материаловедения становится разработка недорогих и экологичных бессвинцовых сегнетопьезоэлектриков с необходимыми эксплуатационными характеристиками.

Наиболее перспективными кандидатами на замену свинецсодержащим материалам считаются твердые растворы на основе $Na_{0.5}K_{0.5}NbO_3$ (KNN) демонстрирующий хорошие пьезоэлектрические свойства, особенно в области морфотропных фазовых границ. А также $Bi_{0.5}Na_{0.5}TiO_3$ (BNT), характеризующийся высокой остаточной поляризацией, но имеющий высокую коэрцитивную силу и повышенную проводимость.

Перспективным подходом к преодолению этих ограничений является химическое модифицирование, то есть создание твердых растворов (ТР) на основе систем BNT-KNN. Исследования также показывают, что керамика с участием BNT и $BiFeO_3$ (BFO), [2] имеет превосходную термическую и частотную стабильностью в диапазоне 30–170 °C и хорошие характеристики запасания и преобразования энергии Wrec = 1.68 Дж/см^3, η = 90 % соответственно. В системе BNKT–BFO значения пьезокоэффициента d_{33} достигает ~170 пКл/Н [3].

Таким образом целью данной работы является установление закономерностей формирования кристаллической и зеренной структуры, а также диэлектрических свойств ТР системы (1-x-y) BNT – xKNN – yBFO.

В качестве объектов исследования выступили ТР системы (1-y)(0.9 BNT -0.1 KNN) – yBFO, с $0.2 \leq y \leq 0.9$, $\Delta y = 0.1$. Изготовление ТР проводили методом двухстадийного твердофазного синтеза при температурах $T_{1,2}$=1123 К, $\tau_{1,2}$= 5 ч. Спекание керамики осуществляли по традиционной керамической технологии при $T_{сп.}$=1393 К в течение 2 ч.

Рентгеноструктурные исследования проводились на дифрактометре ДРОН-3 (фильтрованное CoKα-излучение, фокусировка по схеме Брэгга-Брентано).

Микроструктуру спечённых керамик оценивали на сколе образца с помощью сканирующего электронного микроскопа JSM-6390L (Япония).

Зависимости действительной ($\varepsilon'/\varepsilon_0$) и мнимой ($\varepsilon''/\varepsilon_0$) частей относительной комплексной диэлектрической проницаемости и тангенса угла диэлектрических потерь (tgδ) от температуры измеряли в диапазоне температур Т=300-650 К на частотах 1кГц-МГц с помощью LCR-метра Agilent E4980A.

Результаты и обсуждения. Анализ дифрактограмм ТР системы (1-y)(0.9 BNT -0.1 KNN) – yBFO показал, что все ТР кристаллизовались в структуре типа перовскита без примесных фаз. При *y*=0.2-0.3 ТР имеет кубическую симметрию. При y выше 0.4 появляется ромбоэдрическая фаза наряду с кубической. При увеличении концентрации *y* выше 0.5, ТР имеют ромбоэдрическую симметрию (табл.1). В ТР с *y*=0.8 и *y*=0.9 заметны двойные пики 111 и 200, что указывает на возникновение двух ромбоэдрических фаз с близкими параметрами элементарной ячейки. Очевидно, что твердые растворы системы (1-y)(0.9 BNT -0.1 KNN) – yBFO являются неоднородными, состоят из областей, отличающихся химическим составом.

Характер изменения микроструктуры согласуется с изменениями на фазовой диаграмме системы $Bi_{0.5}Na_{0.5}TiO_3$-$Na_{0.5}K_{0.5}NbO_3$-$BiFeO_3$. До фазового перехода наблюдается в основном мелкозернистая микроструктура со средним размером зерен до 2,5 мкм. При увеличении концентрации y до 0,5 постепенно возрастает неоднородность микроструктуры. Наиболее неоднородная микроструктура и низкая относительная плотность керамики, $\rho_{отн,}$ наблюдается вблизи морфотропной области при y = 0,5. Размер зерен также увеличивается, достигая максимума при y = 0,6, в котором средний размер зерен увеличивается до 8,4 мкм. В твердых растворах с $y \geq 0.7$ микроструктура снова становится мелкозернистой со средним размером зерен до 2,4 мкм., что связано с возникновением в этих ТР двух ромбоэдрических фаз.

Зависимости $\varepsilon'/\varepsilon_0$ и tgδ, от температуры ТР системы (1-y)(0.9 BNT -0.1 KNN) – yBFO показали, что при y=0,2–0,4 наблюдаются широкие размытые по температуре релаксирующие максимумы, смещающиеся в высокотемпературную область при увеличении частоты электрического поля.

Таблица 1.

Линейный, a, угловой, α, параметры элементарной ячейки и $\rho_{отн, \%}$ ТР системы (1-y)(0.9 BNT -0.1 KNN) – yBFO

y	*a*, Å	α (°)	*V*, Å^3	$\rho_{отн, \%}$
0.2	3.909	-	59.716	89.28
0.3	3.914	-	60.07	89.51
0.4	3.924	89.94	60.404	83.31
0.5	3.934	89.81	60.88	79.74
0.6	3.938	89.61	61.09	91.17
0.7	3.949	89.45	61.602	97.08
0.8	3.955	89.57	61.87	96.3
0.9	3.961	89.5	62.15	95.72

При комнатной температуре значения $\varepsilon'/\varepsilon_0$ уменьшаются с увеличением концентрации BFO, варьируясь от 1040 до 160 на частоте 1 МГц. Значение $\varepsilon'/\varepsilon_0$ в максимуме (f=1 МГц) снижается от 2380 до 1900 с увеличением концентрации y в диапазоне y=0,2–0,4. При концентрации BFO, превышающей y=0,5, пики на кривой $\varepsilon'/\varepsilon_0$ (T), связанные с фазовым переходом в ромбоэдрическую фазу, становятся более выраженными. Максимальная температура сегнетоэлектрического перехода (T_m) возрастает до 760 К при y=0,7, при этом $\varepsilon'/\varepsilon_0$ достигает значения 3900 на частоте 1 МГц. Однако при дальнейшем увеличении концентрации BFO наблюдается снижение значений $\varepsilon'/\varepsilon_0$ в максимуме и его размытие, вероятно связанное со структурными и микроструктурными изменениями в этих ТР.

Свойства накопления энергии, полученные на основе анализа петель гистерезиса ТР системы (1-y)(0.9 BNT -0.1 KNN) – yBFO с y = 0,2 - 0,9, измеренных при 4 кВ, показали, что наибольшие значения W_{rec}, и η достигаются при в ТР с y = 0,2 и равны 0,08 кДж/см³ и 74% соответственно.

Выводы. ТР системы (1-y)(0.9 BNT -0.1 KNN) – yBFO с x=0.2-0.9 и Δx=0.1 были получены твердофазным методом и спеканием по обычной керамической технологии. При комнатной температуре в системе наблюдается два морфотропных фазовых перехода. Изменение микроструктуры коррелирует с изменениями на фазовой диаграмме системы. Диэлектрические спектры ТР системы (1-y)(0.9 BNT -0.1 KNN) – yBFO свидетельствуют об их релаксорной природе. Выявлены наиболее перспективные ТР системы (1-y)(0.9 BNT -0.1 KNN) – yBFO с точки зрения разработки материалов для накопления энергии.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Государственное задание в сфере научной деятельности. Проект № FENW-2026-0022). Использовано оборудование ЦКП НИИ физики Южного федерального университета "Электромагнитные, электромеханические и тепловые свойства твердых тел".

Список литературы

1. Dakai Chen, Xinhai Kong, Jin Zhang, Mingchao Du, Wei Cai Review on the optimization of energy storage performance in sodium niobate-based dielectric ceramics // Ceramics International.2025. V. 51. №21. Part B.P. 33865–33884.
2. Mengshan Wang, Aiwen Xie, Jian Fu, Ruzhong Zuo Energy storage properties under moderate electric fields in $BiFeO_3$-based lead-free relaxor ferroelectric ceramics // Chemical Engineering Journal. 2022. V. 440. – P. 135789.
3. Xuefan Zhou, Guoliang Xue, Hang Luo, Chris R. Bowen, Dou Zhang Phase structure and properties of sodium bismuth titanate lead-free piezoelectric ceramics // Progress in Materials Science. 2021. 122. – P.100836.

УДК 532.6

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ЗАВИСИМОСТИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ РАСТВОРОВ ОТ СОСТАВА

Дадашев Р.Х.,
профессор кафедры общей физики
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
Элимханов Д.З.,
доцент кафедры общей физики
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: edzhabrail@mail.ru
Дадашева З.И.,
доцент кафедры общей физики
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
Умархаджиев Х.С.,
научный сотрудник лаборатории прикладной математики
ФГБУН «Комплексный научно-исследовательский университет им. Х.И. Ибрагимова»
Имхаджиев Ш.И.,
магистрант кафедры общей физики
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»

Аннотация. *Методом математического планирования эксперимента проведено исследование концентрационной зависимости поверхностного натяжения. Выявлены основные преимущества и недостатки симплекс решёточного планирования на примере тройных расплавов индий-свинец-таллий с особенностями на изотермах поверхностного натяжения граничной двойной системы индий-свинец-таллий. Получена зависимость поверхностного натяжения расплавов индий-свинец-таллий от состава и температуры.*
Ключевые слова: *Планирование эксперимента, метод симплексных решеток, поверхностное натяжение.*

EXPERIMENTAL PLANNING FOR STUDYING THE DEPENDENCE OF SURFACE TENSION OF MULTICOMPONENT SOLUTIONS ON COMPOSITION

Dadashev R.Kh.,
Professor, Department of General Physics
Kadyrov Chechen State University
Elimkhanov D.Z.,
Associate Professor, Department of General Physics
Kadyrov Chechen State University
Dadasheva Z.I.,
Associate Professor, Department of General Physics
Kadyrov Chechen State University
Umarkhadzhiev Kh.S.,
Researcher, Laboratory of Applied Mathematics
Kh. Ibragimov Complex Institute of the Russian Academy of Sciences
Imkhadzhiev Sh.I,
Master's Student, Department of General Physics
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *A study of the concentration dependence of surface tension was conducted using the mathematical design of experiments method. The main advantages and disadvantages of simplex lattice design were identified using ternary indium-lead-thallium melts with specific features in the surface tension isotherms of the boundary binary indium-lead-thallium system. The dependence of the surface tension of indium-lead-thallium melts on composition and temperature was obtained.*

Keywords: *Experimental design, simplex lattice method, surface tension.*

На современном этапе развития науки, техники и новых технологий все острее ощущается нехватка материалов с комплексом физико-химических свойств, необходимых для решения поставленных задач. Природные материалы давно исчерпали себя, и проблема получения материалов с заранее заданными свойствами стала актуальной. Следует отметить, что это обширная и многогранная проблема, решением которой занимаются специалисты разных профилей и направлений науки.

В последние годы бурно и результативно идёт процесс разработки новых композиционных и наноматериалов. Получены твёрдые материалы с уникальными физико-химическими свойствами. В практической деятельности все шире начали использовать не только твёрдые, но жидкие материалы, среди которых особое место занимают жидкометаллические системы. Жидкие металлы и расплавы находят широкое применение качестве легкоплавких припоев в микроэлектронике, теплоносителей в атомных реакторах [1,2] и т.д. При этом, точно измеряемым свойством межфазного слоя жидких металлов и сплавов является поверхностное натяжение, которое определяет адсорбцию, состав поверхностного слоя, угол смачивания и скорость растекания жидкого сплава по твёрдой поверхности. Поэтому экспериментальное изучение зависимости поверхностного натяжения от состава и температуры и разработка на этой основе полуэмпирических и теоретических моделей прогноза остаётся актуальной задачей.

Экспериментальное изучение концентрационной зависимости поверхностного натяжения (σ) многокомпонентных металлических расплавов задача сложная и трудоёмкая, так как связана с необходимостью получения глубокого вакуума и проведения эксперимента при высоких температурах. Достачно сказать, что при переходе от изучения двойных к исследованию концентрационной зависимости σ тройных систем, объем экспериментальных исследовании увеличивается многократно. Исходя из этого для повышения производительности экспериментальных исследовании, уменьшения расходов дорогостоящих материалов и сокращения времени проведения эксперимента нами разработаны уникальные приборы, позволяющие готовить сплавы различных составов и проводить измерения температурных зависимостей плотности, поверхностного натяжения и работы выхода электрона, не вскрывая прибора и не нарушая в нем вакуума. Эти приборы подробно описаны в работах [3, 4] и нет необходимости останавливаться на особенностях их использования при изучении концентрационной зависимости физико-химических свойств многокомпонентных систем.

Второе направление развития методов исследования многокомпонентных систем связано с широким использованием математических методов планирования эксперимента. В середине XX века эти методы интенсивно разрабатывались и находили широкое применение на практике. Однако указанные методы не лишены недостатков и их использование для определения концентрационной зависимости физических свойств имеют свои особенности, которые требуют крайней осторожности и необходимости учёта влияния многих факторов.

В связи с этим в данной работе рассмотрены методические особенности использования математического метода планирования эксперимента при исследовании концентрационной зависимости поверхностного натяжения тройных систем. Выявлены преимущества и недостатки симплекс решёточного планирования на примере тройных металлических систем с особенностями на изотермах поверхностного натяжения граничных двойных

При исследовании концентрационной зависимости поверхностного натяжения тройных расплавов используют метод симплексных решеток [5, 6-8], сущность которого в том, что строится математическая модель, которая устанавливает функциональную зависимость поверхностного натяжения от молярных долей компонентов В случае n-компонентной системы исследуемое свойство (в нашем случае поверхностное натяжение) представляют в виде полинома степени n [5,7]:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{g} \beta_i x_i + \sum_{m=2}^{n} \left\{ \sum_{i,j=1}^{g} \beta_{ij}^{m} x_i x_j \left(x_i - x_j\right)^{m-2} \right\} + \sum_{m=3}^{n} \left\{ \sum_{1 \le i \le i_2 \ldots i_m \le g}^{g} \beta_s x_{i1}^{s_1} x_{i2}^{s_2} \ldots x_{im}^{s_m} \right\} \quad (1)$$

Для вычисления коэффициентов полинома экспериментально определяют значение поверхностного натяжения расплавов строго определённых составов. Как правило [5], для этих целей используют планы, обеспечивающие равномерный разброс экспериментальных точек по всему симплексу (т. е. по треугольнику составов в случае тройных систем).

Коэффициенты полинома (1) определяются из системы уравнений, которые получаются подстановкой в (1) экспериментальных значений σ и координат точек плана x. Запишем выражение (1) для трёхкомпонентной системы в виде полинома третьей степени:

$$\sigma = \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + Y_{12} x_1 x_2 (x_1 - x_2) + Y_{13} x_1 x_3 (x_1 - x_3) + Y_{23} x_2 x_3 (x_2 - x_3) + \beta_{123} x_1 x_2 x_3 \quad (2)$$

На практике нередко используют специальную кубическую модель, в которой пренебрегают членами $Y_{ij} x_i x_j (x_i - x_j)$. Коэффициенты полной кубической модели вычисляются по формулам.

Для определения точности предсказания эту функцию необходимо проверить на адекватность. Для этих целей необходимо провести измерения поверхностного натяжения нескольких расплавов, составы которых расположены в точках, в которых вероятны эффекты тройных взаимодействий), или разбросаны равномерно по всему треугольнику составов. Если вычисленные по полиному результаты сильно отличаются от экспериментальных значений, то переходят к модели более высокого порядка.

Использование методов планирования, наряду с преимуществами, имеет свои недостатки. В особенности это относится к случаю, когда важно описать функциональную зависимость не только поверхностного натяжения, но и первой производной от состава раствора. В этом случае увеличение степени полинома далеко не всегда приводит к увеличению точности прогнозирования. Впервые с использованием математического планирования эксперимента зависимость поверхностного натяжения тройных и четверных систем от состава была изучена автором [6], который показал, что оптимальной степенью модели с большой долей вероятности является та, которая подходит для описания изотерм σ всех граничных бинарных расплавов. Этот вывод, хотя и сделан на ограниченном числе экспериментальных данных, значительно облегчает процедуру выбора оптимальной модели для описания изотермической поверхности σ многокомпонентных расплавов.

Таким образом, использование методов математического планирования эксперимента является мощным инструментом для изучения зависимости физико-химических свойств от состава тройных систем. Нами проводятся исследования концентрационной зависимости поверхностного натяжения тройных систем, которые объединяет то, что граничные двойные системы (индий-олово и таллий-свинец) имеют на изотермах поверхностного натяжения пологий минимум. Свинец вызывает понижение поверхностного натяжения индия, таллия и всех расплавов индий-таллий.

В обсуждаемой системе минимум на изотермах σ тройных разрезов исчезает при сравнительно небольшом содержании индия (0,25 молярных долей). На изотермической поверхности σ эта особенность проявляется в виде локализованной «впадины» в небольшой области, непосредственно прилегающей к стороне Tl-Sn. Наиболее интересной особенностью концентрационной зависимости σ в обсуждаемой системе является наличие буферной секущей, то есть разреза концентрационного треугольника с постоянным значением поверхностного натяжения. Действительно, при изменении состава по секущему разрезу с постоянным отношением молярных долей индия к свинцу x_{In}:x_{Pb} = 1 поверхностное натяжение не зависит от содержания таллия, то есть $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_{Tl}}\right)_{X_{In}:X_{Pb}} = 0$.

Это явление в водных и солевых растворах обнаружено давно и получило название «явление концентрационной буферности поверхностного натяжения». Теоретический анализ и обзор имеющихся экспериментальных данных по концентрационной буферности σ даются в работе [3]. Однако из анализа этих работ видно, что в литературе отсутствует однозначность

даже в определении явления концентрационной буферности поверхностного натяжения, и этот вопрос требует дальнейших исследований.

Таким образом, в работе рассмотрены особенности использования методов планирования эксперимента при изучении зависимости поверхностного натяжения от состава тройных систем. В качестве примера найдена функциональная зависимость поверхностного натяжения от состава тройной системы индий-таллий-свинец.

Список литературы

1. Камболов Д.А., Кашежев А.З., Кутуев Р.А. [и др.]. Политермы плотности, поверхностного натяжения висмутистого свинца и угла смачивания высоконикелевых и ферритно-мартенситных сталей сплавом Pb-Bi // Теплофизика высоких температур. 2014. Т. 52, № 3. – С. 392. DOI 10.7868/S0040364414030144. EDN SDXFKZ.
2. Хасанов А.И., Хоконов Х.Л., Шхануков М.Х., Гуфан Ю.М. Политермы углов смачивания конструкционных реакторных сталей жидкими свинцом и висмутом при высоких температурах // Известия Кабардино-Балкарского государственного университета. 2019. Т. 9, № 2. – С. 53–57. EDN EVKSRM.
3. Dadashev R.Kh. Thermodynamics of Surface Phenomena / R.Kh. Dadashev; CAMBRIDGE INTERNATIONAL SCIENCE PUBLISHING. Great Abington: Cambridge International Science Publishing Ltd, 2008. 310 p. ISBN 978-1-904602-77-4. EDN XFDYSL.
4. Ибрагимов Х.И., Саввин В.С., Дадашев Р.Х. Прибор для определения плотности жидких металлических растворов // Журнал физической химии. 1976. Т. 50. № 8. – С. 62.
5. Чемлева Т.А., Микешина Н.Г. Применение симплекс-решетчатого планирования при исследовании диаграмм состав – свойство // Новые идеи в планировании эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С. 194–206.
6. Гойтемиров Р.У. Исследование поверхностных свойств многокомпонентных систем с применением математического планирования эксперимента: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Грозный, ЧИГУ, 1987. – 180 с.
7. Зедгенидзе И.Г., Новик Ф.С., Чемлева Т.А. Планирование многокомпонентных систем// Применение математических методов для исследования многокомпонентных систем. – М.: Металлургия, 1974. – С. 3–11.
8. Scheffe H. The simplex-centroid desigi for experiments with mixtures // I. Hoy. Statis.Soc. S.B. 1963. V. 25, № 2. 235.

УДК 378.004

ПЕРСОНАЛИЗАЦИЯ ОБУЧЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АДАПТИВНЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПЛАТФОРМ НА БАЗЕ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Датаев А.А.,
ассистент кафедры «Программирование и инфокоммуникационные технологии»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: ask.hab@mail.ru

Аннотация. *В условиях стремительной цифровой трансформации образования особое значение приобретает поиск эффективных механизмов, позволяющих преодолеть ограничения традиционной классно-урочной системы, ориентированной на «усредненного» обучающегося. Настоящая работа посвящена рассмотрению феномена персонализации обучения, реализуемого посредством интеграции адаптивных образовательных платформ, функционирующих на базе технологий искусственного интеллекта. Анализируется роль искусственного интеллекта как ключевого драйвера данного процесса: именно алгоритмы машинного обучения позволяют платформам в режиме реального времени анализировать цифровые следы действий пользователя, выявлять пробелы в понимании и динамически корректировать контент, предлагая релевантные задания или дополнительные объяснения. В работе подчеркивается, что такие системы берут на себя функцию оперативной обратной связи и интеллектуальной поддержки, что качественно изменяет характер взаимодействия между преподавателем и студентом, смещая акцент в сторону наставничества и развития критического мышления. Особое внимание уделяется дидактическому потенциалу адаптивных сред, которые не просто транслируют знания, но и способствуют формированию устойчивой внутренней мотивации, поскольку обучающийся перестает быть пассивным получателем информации.*
Ключевые слова: *Персонализация обучения, адаптивные образовательные платформы, искусственный интеллект, индивидуальная образовательная траектория, интеллектуальные обучающие системы, цифровая дидактика.*

PERSONALIZING LEARNING WITH ADAPTIVE EDUCATIONAL PLATFORMS BASED ON ARTIFICIAL INTELLIGENCE

Dataev A.A.,
Assistant Department of Programming and Infocommunication Technologies
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *In the context of the rapid digital transformation of education, the search for effective mechanisms to overcome the limitations of the traditional classroom-based system, which is oriented toward the "average" student, is particularly important. This paper examines the phenomenon of personalized learning, realized through the integration of adaptive educational platforms powered by artificial intelligence technologies. The role of artificial intelligence as a key driver of this process is analyzed: machine learning algorithms enable platforms to analyze digital traces of user actions in real time, identify gaps in understanding, and dynamically adjust content, offering relevant tasks or additional explanations. The paper emphasizes that such systems provide prompt feedback and intellectual support, fundamentally changing the nature of interaction between teacher and student, shifting the emphasis toward mentoring and the development of critical thinking. Particular attention is paid to the didactic potential of adaptive environments, which not only transmit knowledge but also foster sustainable intrinsic motivation, as learners are no longer passive recipients of information.*
Keywords: *Personalized learning, adaptive educational platforms, artificial intelligence, individualized educational trajectory, intelligent learning systems, digital didactics.*

Современный этап развития педагогической науки и образовательной практики характеризуется глубинным переосмыслением устоявшихся представлений о природе, целях и способах организации учебного процесса. Исследователи и практики все более отчетливо осознают, что эффективность усвоения знаний и формирования компетенций находится в прямой зависимости от того, насколько полно образовательная среда учитывает индивидуальные различия обучающихся, включающие не только стартовый уровень подготовки по предмету, но и доминирующий тип восприятия и переработки информации, скорость протекания когнитивных процессов, особенности мотивационно-потребностной

сферы, а также эмоциональное состояние в каждый конкретный момент учебной деятельности.

Традиционные методы дифференциации и индивидуализации обучения, разработанные в рамках классической педагогики и, безусловно, внесшие значительный вклад в развитие теории и практики образования, обладают, однако, вполне определенными ограничениями, поскольку их инструментарий зачастую оказывается недостаточно гибким и оперативным для осуществления тонкой, непрерывной настройки учебного процесса под динамически изменяющиеся характеристики конкретного индивида. Именно поэтому внимание научного сообщества, разработчиков образовательных технологий и педагогов-новаторов все более приковывают адаптивные обучающие системы, технологическим ядром которых выступают методы и алгоритмы искусственного интеллекта, открывающие поистине беспрецедентные возможности для реализации глубоко персонализированного подхода в условиях массового образования, сохраняя при этом его экономическую эффективность и организационную реализуемость.

Данное положение указывает на необходимость комплексного, междисциплинарного подхода к проектированию и внедрению адаптивных платформ, в рамках которого технологические решения должны быть органично сопряжены с глубоким пониманием психологических закономерностей процесса учения и развития личности. Концепция адаптивного обучения, реализуемая на базе цифровых платформ, предполагает создание динамической, постоянно обновляющейся модели обучающегося, которая строится на основе непрерывного сбора и анализа данных о его взаимодействии с учебным контентом.

Это положение напрямую коррелирует с задачами внедрения адаптивных платформ, эффективность которых определяется не только совершенством заложенных в них алгоритмов, но и тем, насколько органично они интегрируются в существующую педагогическую реальность, дополняя и обогащая ее, а не вступая в противоречие с устоявшимися, продуктивными практиками обучения и воспитания. В основе функционирования адаптивных платформ лежат сложные математические модели и алгоритмы машинного обучения, которые позволяют системе не просто реагировать на действия пользователя, но и в определенном смысле предвосхищать его возможные затруднения, предлагая упреждающую поддержку.

Методологическая основа исследования персонализации обучения с помощью адаптивных образовательных платформ на базе искусственного интеллекта базируется на интеграции системного, компетентностного и личностно-ориентированного подходов, что позволяет рассматривать образовательный процесс как сложную, самоорганизующуюся систему, функционирующую на пересечении педагогических, психологических и информационно-технологических детерминант. В основу исследования положена гипотетико-дедуктивная стратегия, предполагающая выдвижение теоретических положений о влиянии адаптивных алгоритмов на эффективность усвоения знаний с последующей их эмпирической верификацией.

Данный аспект исследуется с использованием методов включенного наблюдения и экспертного опроса преподавателей, имеющих опыт работы с интеллектуальными обучающими системами. Таким образом, предлагаемая методика носит комплексный, многоуровневый характер, обеспечивая всестороннее изучение феномена персонализации обучения с помощью адаптивных платформ на базе искусственного интеллекта в единстве его теоретических, технологических и психолого-педагогических аспектов.

Цифровая трансформация представляет собой не просто внедрение цифровых инструментов в существующую образовательную практику, а фундаментальное изменение всех аспектов образовательной деятельности, включая ее цели, содержание, методы и организационные формы. Адаптивные платформы на базе искусственного интеллекта выступают одним из ключевых драйверов этой трансформации, поскольку они не только повышают эффективность существующих процессов, но и порождают принципиально новые формы образовательной активности.

В тех случаях, когда преподаватели активно включали данные адаптивной платформы в процесс планирования и проведения занятий, используя их для организации дифференцированной работы и индивидуальных консультаций, образовательные результаты оказались максимально высокими.

Персонализация обучения с помощью адаптивных образовательных платформ на базе искусственного интеллекта представляет собой эффективное направление развития современного образования, позволяющее существенно повысить его качество и индивидуализировать образовательный процесс в соответствии с потребностями и возможностями каждого обучающегося. Эффективность адаптивного обучения обеспечивается комплексом факторов: когнитивных (индивидуализация темпа и последовательности предъявления материала, оперативная диагностика затруднений), мотивационных (создание ситуации успеха, поддержка внутренней мотивации) и метакогнитивных (развитие рефлексии и саморегуляции).

Список литературы

1. Акгун С., Гринхоу К. (2022). Искусственный интеллект в образовании: решение этических проблем в школах K-12. ИИ и этика, 2(3), 431–440.
2. Исаева З.И., Базуева К.И. Психолого-педагогическое сопровождение процессов адаптации и мотивации студентов вуза // Научный бюллетень Чеченского государственного университета им. А.А. Кадырова. 2025. № 4 (8). – С. 115–119.
3. Косумова Л.М., Арскиева З.А., Арскиева Р.У. Психологические аспекты применения искусственного интеллекта (ИИ) и нейросетей на уроках английского языка // Научный бюллетень Чеченского государственного университета им. А.А. Кадырова. 2025. № 4 (8). – С. 120–125.
4. Лукин Р., Чукурова М. (2019). Разработка образовательных технологий в эпоху ИИ: подход, основанный на науках об обучении. Британский журнал образовательных технологий, 50(6), 2824–2838.
5. Холмс В., Туоми И. (2022). Современное состояние и практика применения ИИ в образовании. Европейский журнал образования, 57(4), 542–570.

УДК 517.983.8

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НАХОЖДЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ

Джабраилов А.Л.,
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель
кафедры математического анализа, алгебры и геометрии
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: ahmed_0065@mail.ru

Аннотация. *К решению и исследованию линейных интегро-дифференциальных уравнений применялись различные методы. В конечном итоге все методы приводят к построению так называемого разрешающего интегрального уравнения, с помощью которого доказываются теоремы существования и единственности, ограниченности и периодичности решения соответствующей краевой задачи. В настоящей работе идеи метода Н.К. Куликова использованы для решения и исследования интегро-дифференциального уравнения заданного вида.*
Ключевые слова: *интегро-дифференциальные уравнения, разрешающее интегральное уравнение, теоремы существования и единственности, ограниченности и периодичности решения.*

A METHOD FOR SOLVING INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS AND FINDING UNCERTAIN PARAMETERS

Dzhabrailov A.L.,
Senior Lecturer of the Department of Mathematical Analysis,
Algebra and Geometry, Ph.D. in Physics and Mathematics
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *Various methods have been applied to the solution and study of linear integro-differential equations. Ultimately, all methods lead to the construction of a so-called resolving integral equation, which is used to prove theorems of existence and uniqueness, boundedness, and periodicity of the solution to the corresponding boundary value problem. In this paper, the ideas of N.K. Kulikov's method are used to solve and study an integro-differential equation of a given type.*
Keywords: *integro-differential equations, resolving integral equation, theorems of existence and uniqueness, boundedness and periodicity of the solution.*

При применении метода последовательных приближений, присутствующие в

$$y(\overset{(i)}{x}) = W_i(x) + \int_0^x K_i(x,s)F(s)ds + \int_0^x K_i(x,s)\mu^*[y(s)]ds, \quad i = 0,1,2,\dots, n \qquad (1)$$

$$y_{(x)}^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} A_k(x) r_k^i e^{r_k x}, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (2)$$

где a_i, $i = 0,1,2,\dots,n-1$ – неопределенные параметры, можно определить исходя из соображений, обеспечивающих высокую точность расчетов.

Опираясь на обычные методы, можно показать (см. [8, 9]), что задача (1)–(2), а следовательно, и задача

$$y(x) = \Phi(x) - \\ - \sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} f_i(x)A_k(x)r_k^i e^{r_k x} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{e=0}^{w}\varphi_{je}(x)A_k\left(\Delta_{je}(x)\right)r_k^j e^{r_k\Delta_{je}(x)} + \right. \\ \left. + \int_0^x \sum_{i=0}^{h}\Psi_i^*(x,t)A_k(t)r_k^i e^{r_k t}dt\right\} \qquad (3)$$

$$y_{(x)}^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} A_k(x) r_k^i e^{r_k x}, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (2)$$

имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений.

В качестве исходного, нулевого приближения решения задач (3), (2) возьмем выражение

$$y_0(\overset{(i)}{x}) = W_i(x) + \int_0^x K_i(x,s)F(s)ds,$$

получающееся из (1), если положить $\mu^*[y(x)] = \mu_0^*[y(x)] = 0$. Решения в последующих приближениях получаются из (1), если использовать соответствующие приближения для функции $\mu^*[y(x)]$: подставив в выражение для $\mu^*[y(x)]$ значения $y_{(x)}^{(i)} = y_0^{(i)}(x)$ согласно нулевому приближению, получим выражение функции $\mu^*[y(x)] = \mu_1^*[y(x)]$ в первом приближении в явном виде через аргумент x и находим решение задачи (3), (2) в первом приближении

$$y_1^{(i)}(x) = y_0^{(i)}(x) + \int_0^x K_i(x,s)\mu_1^*[y(s)]\, ds.$$

Решение в к-ом приближении запишется в виде

$$y_k^{(i)}(x) = y_0^{(i)}(x) + \int_0^x K_i(x,s)\mu_k^*[y(s)]\, ds,$$

где $\mu_k^*[y(x)]$ выражение функции $\mu^*[y(x)]$ в к-м приближении. Такой подход к построению последовательных приближений продиктован возможностью обеспечения слабого отличия от нуля функции $\mu^*[y(x)]$ вблизи начальной точки 0. При этом последние слагаемые в (1) будут малы, и решение задачи (3), (2) в нулевом приближении будет мало отличаться вблизи начальной точки от точного решения задачи (3), (2).

Для обеспечения малой величины функции $\mu^*[y(x)]$ воспользуемся тем, что в данную функцию входят n неопределенных параметров a_i, $i = 0,1,2,\ldots, n-1$, причем параметры постоянны.

Нетрудно проверить, что $\mu^*[y(0)] = 0$, если положить

$$a_0 = f_n^{-1}(0)\left[f_1'(0) + \sum_{\nu=2}^{n'} в_\nu(0)\Delta_\nu'(0) + \Psi_1(0,0) + 1\right],$$

$$a_{i-1} = f_n^{-1}(0)\left[f_i'(0) + f_{i-1}(0) + \phi_{i\ell}'(0) + \phi_{i-1,\ell}(0)\Delta_{i-1,\ell}'(0) + \Psi_i(0,0)\right],$$

$$\Psi_j(0,0) = 0, \quad i = \overline{2,n}, \quad j = h + \overline{1,n}. \qquad (4)$$

Следовательно, значение функции $\mu^*[y(x)]$ вблизи начальной точки будет мало отличаться от нуля при произвольных начальных условиях (2).

Установив значения параметров a_i согласно (4), сможем записать в развернутом виде уравнение

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + a_{n-2}r^{n-2} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0, \qquad (5)$$

и найти корни его r_k.

После этого обращаемся к интегро-дифференциальным уравнениям (1), раскрывая их с нужной степенью точности при помощи последовательных приближений.

Для некоторых интегро-дифференциальных уравнений типа (3) без отклонения аргумента, пользуясь неопределенностью параметров a_i, неизвестную функцию $\mu^*[y(x)]$ удается находить точно и, следовательно, задача Коши для таких уравнений с помощью формул (1) решается в замкнутом виде. В общем случае неизвестную функцию $\mu^*[y(x)]$ можно найти как решение некоторого интегрального уравнения типа Вольтерра. Действительно, преобразуем при $i = \overline{1,n}$ левые части выражений (1) в линейный интегро-дифференциальный оператор $\mu^*[y(x)]$ с запаздывающим аргументом. Учитывая соответствующие изменения правых частей выражений (1), приходим к интегральному уравнению вида

$$\mu^*[y(x)] = Z(x) + \int_0^x Z(x,s)\mu^*[y(s)]ds,$$

где $Z(x)$, $Z(x,s)$ – известные функции.

Система интегро-дифференциальных уравнений (1) такова, что к ней можно применить соответствующие теоремы об ограниченности решений из работы [6]. Без особого труда можно получить необходимые и достаточные условия периодичности решения задач (3), (2) [7].

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки (FEGS-2026-0004).

Список литературы

1. Васильев В.В. ДАН СССР, т. 100, № 5, 1956. – С. 849–852.
2. Васильев В.В. Труды Иркут. ГУ, вып. 2, 1957. – С. 32–45.
3. Виграненко Т.И. Записки Ленинград. гор. ин-та, т. 26, вып. 7, 1952.
4. Виграненко Т.И. Там же, т. 33, вып. 3, 1956.
5. Николенко Б.Н. УМН, 1952, т. 7, вып. 5/51/. – С. 225–228.
6. Колмановский В.Б. Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, т. 7, 1969. – С. 171–177.
7. Куликов Н.К. Инженерный метод решения и исследования обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. – М. ВШ., 1964.
8. Эльсгольц Л.Э. Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М., Наука, 1971.
9. Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. – М., Наука, 1965.
10. Исраилов С.В., Джабраилов А.Л. О существовании решения нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерра первого рода // Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики: материалы XIV Международной конференции, приуроченной к 90-летию Дагестанского государственного университета. – Махачкала, 2021. – С. 124–126.

УДК 517

СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ В ТЕОРЕМЕ ШИРШОВА О ВЫСОТЕ

Добрицын М.Д.,
студент магистратуры математического факультета,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Аннотация. *В работе рассматривается вопрос Е.И. Зельманова о скорости роста класса нильпотентности свободного 2-порожденного ассоциативного кольца с тождеством $x^m = 0$. Получена явная субэкспоненциальная оценка $\Psi(n,d,l) = 4ln^3d(4n^2)^{log_2(nd)}$ для теоремы Ширшова о высоте, которая улучшает ранее известные результаты. Доказательство основано на комбинаторном методе, который является более кратким и доступным.*
Ключевые слова: *теорема Ширшова о высоте, PI-алгебры, субэкспоненциальные оценки, нильпотентность, ослабленная проблема Бернсайда.*

SUBEXPONENTIAL BOUNDS IN SHIRSHOV'S HEIGHT THEOREM

Dobritsyn M.D.,
Student of the Educational Program «Mathematics»
National Research University «Higher School of Economics»

Abstract. *The paper addresses the question posed by E.I. Zelmanov regarding the growth rate of the nilpotency class of a free 2-generated associative ring with the identity xm=0. We derive an explicit subexponential bound Ψ(n,d,l)=4ln3d·(4n2)⌈log2(nd)⌉ for Shirshov's height theorem, which improves upon previously known results. The proof employs a combinatorial method that is more concise and accessible.*
Keywords: *Shirshov's height theorem, PI-algebras, subexponential bounds, nilpotency, weakened Burnside problem.*

Теория и приложения теоремы Ширшова о высоте в современной алгебре.

В 1958 г. А.И. Ширшов доказал свою знаменитую теорему о высоте (см. [1, 2]), которая стала фундаментом для решения проблемы Куроша для ниль-PI-алгебр. Суть заключается в следующем: конечно, порожденная алгебра с тождеством (PI-алгебра) нильпотентна, если нильпотентны все слова некоторой ограниченной длины. Решение проблемы ослабленной Бернсайда Е.И. Зельмановым также базировалось на технике теоремы Ширшова.

- **Определение n-разбиваемости:** Строка S называется n-разбиваемой, если ее можно представить в виде $S = s's_1s_2\dots s_ns''$ так, чтобы выполнялось строгое лексикографическое убывание слов $s_1 \gg s_2 \gg \cdots \gg s_n$. В этом случае при любой нетождественной перестановке подслов слово становится лексикографически меньше исходного.
- **Базис Ширшова:** Алгебра A имеет ограниченную высоту h, если любое слово x ∈ A можно представить как полином от слов из множества Y (базиса) степени не выше h.
- **Хорошие строки:** Строка называется (n, m, l)-хорошей, если она не является n-разбиваемой, состоит из букв l-буквенного алфавита и не содержит подстроки, повторяющейся m раз подряд.

Первоначальное доказательство А.И. Ширшова давало примитивно рекурсивные оценки. В дальнейшем исследователи искали более точные границы:

1. А.Т. Колотов (1982) получил оценку $Ht(A) < l^{l^n}$.
2. А.Я. Белов (1992) улучшил ее до $Ht(n,l) < 2nl^{n+1}$.
3. М.И. Харитонов (2012) улучшил ее до $Ht(n,l) < 2^{18}l(nd)^{3log_3(nd)+13}$.

Наш подход использует иной комбинаторный метод, основанный на анализе количества различных подстрок длины k (K_s^k) и последовательной декомпозиции строки. Это позволило получить субэкспоненциальную оценку, существенно улучшающую асимптотику.

В 1993 г. Е.И. Зельманов поставил вопрос в «Днестровской тетради»: верно ли, что класс $x^m = 0$ растет экспоненциально по m?

Нами получена новая оценка:

$$\Psi(n,d,l) = 4ln^3d(4n^2)^{log_2(nd)}$$

где n – степень тождества, d – длина нильпотентности (в общем случае), l – число порождающих.

Процесс доказательства опирается на две ключевые леммы:

1. **Лемма о строго убывающих подстроках:** Если строка не является n-разбиваемой, то в ней не существует цепочки из n подстрок $s[i_1:j_1] \gg s[i_2:j_2] \gg \cdots \gg s[i_n:j_n]$ с непересекающимися областями.
2. **Лемма о повторяющейся подстроке:** Позволяет ограничить число вхождений любого блока в хорошую строку, что ведет к оценке длины через количество уникальных подстрок.
3. **Теорема о декомпозиции:** Для (n, m, l)-хорошей строки s всегда можно выделить подстроку w, которая «плотнее» по количеству уникальных подстрок ($K_w^p < 2n$), что позволяет использовать метод итеративного уменьшения размерности (аналог индукции по сложности структуры слова).

Итоговая теорема утверждает, что для любой (n, m, l)-хорошей строки длина ограничена значением $4ln^3d(4n^2)^{log_2(nd)}$. Данный результат является на текущий момент наиболее точным в классе субэкспоненциальных оценок и дает строгое ограничение на рост нильпотентности в свободных ассоциативных алгебрах с тождеством.

Список литературы

1. Днестровская тетрадь. Нерешенные проблемы теории колец и модулей. – Новосибирск: Изд-во ин-та матем. СО АН СССР, 4-е изд., 1993.
2. Belov A.Ya. Some estimations for nilpotence of nill-algebras over a field of an arbitrary characteristic and height theorem // Communications in Algebra. 1992. Vol. 20, no. 10. – P. 2919–2922.
3. Belov A. Ya., Borisenko V. V., Latyshev V. N. Monomial algebras // Journal of Mathematical Sciences (New York). 1997. Vol. 87, no. 3. – P. 3463–3575.
4. Belov-Kanel A., Belov A., Kharitonov M. Субэкспоненциальные оценки в теореме Ширшова о высоте // Математический сборник. 2012. Т. 203. – С. 81–102.
5. Bokut' L. A. et al. Efim Isaakovich Zelmanov is 60 years old // Russian Math. Surveys. 2016. Vol. 71, no. 4. – P. 793–800.
6. Chibrikov E. S. On the shirshov height of a finitely generated associative algebra satisfying an identity of degree four // Izvestiya of Altai State University. 2001. № 1. – P. 52–56.
7. Drensky V. Free algebras and PI-algebras. Singapore: Springer-Verlag, 2000.
8. Drensky V., Formanek E. Polynomial Identity Rings. Basel: Birkhäuser, 2004.
9. Kanel-Belov A., Rowen L.H. Computational aspects of polynomial identities. Wellesley, MA: A K Peters, 2005.
10. Kanel-Belov A., Rowen L.H. Selected Papers of A. I. Shirshov. Basel: Birkhäuser, 2009.
11. Kemer A.R. Selected Papers of A. I. Shirshov. Providence: American Mathematical Society, 1998.
12. Kharitonov M. Estimations of the particular periodicity in case of the extremal periods in shirshov's height theorem. 2011.
13. Kharitonov M.I. Two-sided estimates for essential height in shirshov's height theorem // Moscow University Mathematics Bulletin. 2012. Vol. 67, no. 2. – P. 24–28.
14. Kharitonov M.I. Piecewise periodicity structure estimates in shirshov's height theorem // Moscow University Mathematics Bulletin. 2013. Vol. 68, no. 1. – P. 26–31.
15. Klein A.A. Indices of nilpotency in a pi-ring // Archiv der Mathematik. 1985. Vol. 44, no. 4. – P. 323–329.
16. Klein A.A. Bounds for indices of nilpotency and nility // Archiv der Mathematik. 2000. Vol. 74, no. 1. – P. 6–10.
17. Kolotov A.G. An upper estimate for height in finitely generated algebras with identities // Siberian Mathematical Journal. 1982. Vol. 23, no. 1. – P. 187–189.
18. Lopatin A.A. On the nilpotency degree of the algebra with identity $x^n = 0$. 2012.
19. Petrov F., Zusmanovich P. On Shirshov bases of graded algebras // Isr. J. Math. 2013. Vol. 197. P. 23–28.
20. Ufnarovskij V.A. Combinatorial and asymptotic methods in algebra // Algebra VI / Ed. by A.I. Kostrikin, I.R. Shafarevich. Berlin: Springer-Verlag, 1995. – P. 196.
21. Zel'manov E.I. On the nilpotency of nil algebras // Algebra – some current trends (Varna, 1986). Berlin: Springer-Verlag, 1988. – P. 227–240.
22. Ширшов А.И. О кольцах с тождественными соотношениями // Матем. сб. 1957. Т. 43(85), № 2. – С. 277–283.
23. Ширшов А.И. О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах // Матем. сб. 1957. Т. 41(83), № 3. – С. 381–394.

УДК 517

ГРУППЫ МОНОДРОМИИ И НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ В КВАДРАТУРАХ

Зайцев Р.В.,
Калифорнийский технологический институт, г. Пасадена, штат Калифорния, США
e-mail: r.zayt@mail.ru
Аллеманд А.О.,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
e-mail: allansuleykin@gmail.com

Аннотация. *В работе рассматривается применение топологической теории Галуа и метода Арнольда к исследованию нескольких трансцендентных уравнений комплексного анализа. Основная идея состоит в изучении перестановок корней уравнения f(z)=a при обходе критических значений параметра a в комплексной плоскости. Для самосопряженных функций с критическими точками кратности 3 авторы получают циклы, порождающие группу A5; это позволяет доказать неразрешимость в обобщенных квадратурах уравнений sin(sin(z))-z=a и sin(cos(z))-z=a. Для уравнения tan(z)-z=a строится система 3-циклов, порождающая бесконечную чередующуюся группу A∞, а для e^z+z=a – группу S∞. Тем самым показывается, что рассматриваемые уравнения не выражаются через обобщенные квадратуры, а сам подход выявляет связь между монодромией, спектральными задачами и приложениями в математической физике.*
Ключевые слова: *топологическая теория Галуа, группа монодромии, трансцендентные уравнения, квадратуры, неразрешимость.*

MONODROMY GROUPS AND THE INSOLVABILITY OF TRANSCENDENTAL EQUATIONS IN QUADRATURES

Zaytsev R.V.,
California Institute of Technology, Pasadena, California, USA
Allemand A.O.,
Lomonosov Moscow State University, Moscow

Abstract. *The paper applies Arnold's topological method to several transcendental equations arising in complex analysis and mathematical physics. The key idea is to track permutations of the roots of f(z)=a when the parameter a moves around critical values in the complex plane. For self-adjoint functions with critical points of multiplicity 3, the resulting cycles generate the group A5, which yields the insolubility in generalized quadratures of the equations sin(sin(z))-z=a and sin(cos(z))-z=a. For tan(z)-z=a the authors construct 3-cycles generating the infinite alternating group A∞, while for e^z+z=a they obtain the infinite symmetric group S∞. In each case, the non-solvability of the monodromy group implies that the corresponding equation cannot be represented by generalized quadratures. The paper also emphasizes links with spectral theory and mathematical physics.*
Keywords: *topological Galois theory, monodromy group, transcendental equations, quadratures, insolubility.*

Работа опирается на сильную форму теоремы топологической теории Галуа: если решение уравнения f(z)=a как функция параметра a выражается через обобщенные квадратуры, то его группа монодромии должна быть разрешимой. Поэтому задача сводится к построению таких обходов критических значений, которые порождают неразрешимую группу перестановок корней.

Для класса самосопряженных функций авторы выделяют простой общий критерий. Если функция удовлетворяет условию самосопряженности, ее критические точки имеют кратность 3, а при вещественном параметре существует единственный вещественный корень, то при обходе критической точки переставляются один вещественный корень и пара комплексно-сопряженных корней. Две такие перестановки дают 3-циклы, которые порождают группу A5. Этим сразу доказывается неразрешимость уравнений sin(sin(z))-z=a и sin(cos(z))-z=a.

Особый интерес представляет уравнение tan(z)-z=a, тесно связанное со спектральными задачами и классическими моделями математической физики. В этом случае множество

вещественных корней устроено иначе, поэтому авторы модифицируют стандартную схему Арнольда и строят специальные петли в параметрической плоскости. Получающиеся 3-циклы порождают бесконечную чередующуюся группу A∞, а значит, уравнение неразрешимо в обобщенных квадратурах.

Далее рассматривается уравнение e^z+z=a как более простой аналог задачи для z^z=a. Здесь критические точки имеют кратность 2, и удается реализовать последовательные транспозиции вещественного корня с другими корнями. В результате группа монодромии содержит все перестановки конечной поддержки, то есть фактически совпадает с S∞, что снова приводит к неразрешимости.

В приложениях работа связывает полученные результаты с акустикой мелкого моря и со спектральной теорией. Авторы пересказывают результаты Хейфеца о корнях дисперсионного уравнения и приводят аргумент А. Элишева, интерпретирующий корни tan(z)-z=0 как спектр самосопряженного оператора Штурма-Лиувилля. Это подчеркивает, что метод монодромии не только решает вопрос о выразимости корней, но и естественно взаимодействует с аналитическими и физическими моделями.

Работа выполнена совместно с А.Я. Беловым.

Список литературы

1. Belov-Kanel A., Malistov A., Zaytsev R. Solvability of equations in elementary functions // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. 2020. Vol. 29, no. 02. – P. 2040005.
2. Elishev A. A brief comment on the paper «Solvability of equations in elementary functions» by Kanel-Belov, Malistov and Zaytsev // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. 2020. Vol. 29, no. 02. – P. 2040007.
3. Heifetz A.I. On the roots of a transcendental equation in the problem of shallow sea acoustics // Akusticheskii Zhurnal. 1985. Vol. 31, no. 2. – P. 258–263.
4. Khovanskii A. G. Topological Galois Theory. Solvability and Unsolvability of Equations in Finite Terms. – Moscow: MCCME, 2008.
5. Klein F. Lectures on the Development of Mathematics in the 19th Century. Vol. 1. – Moscow: Nauka, 1989.
6. Zaytsev R.V. Topological theory of solvability of equations in elementary functions: Master's thesis. Higher School of Economics, 2021.

УДК 004.94

ПРИМЕНЕНИЕ ИНСТРУМЕНТОВ EXCEL В РАЗРАБОТКЕ ШАБЛОНОВ ОБРАБОТКИ ВЫБОРОЧНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ МОНИТОРИНГА СОСТОЯНИЯ ЛЕСНЫХ НАСАЖДЕНИЙ

Исаев М.И.,
доцент кафедры «Прикладная математика и компьютерные технологии»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: movladi.isaev@yandex.ru
Тукаева Р.Л.,
студентка 5 курса направления подготовки «Прикладная математика и информатика»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
Темергаев Р.А.,
студент 1 курса направления подготовки «Радиофизика»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»

Аннотация. *В работе представлен анализ структуры и динамики лесного насаждения на основе данных о среднем диаметре деревьев, изменчивости признака, точности опыта и достоверности среднего значения. Проведённый анализ демонстрирует возможность использования полученных данных для долгосрочного прогнозирования прироста древесины, оценки продуктивности насаждений и своевременного выявления неблагоприятных изменений. Постоянный мониторинг ключевых параметров позволяет оперативно корректировать стратегии лесопользования, минимизировать экологические риски и повышать эффективность управления лесными ресурсами. Результаты исследования имеют высокую практическую значимость для планирования лесохозяйственной деятельности, моделирования экологических процессов и обеспечения устойчивого развития лесных экосистем.*
Ключевые слова: *лесохозяйственные процессы, моделирование лесохозяйственных процессов.*

USING EXCEL TOOLS TO DEVELOP TEMPLATES FOR PROCESSING SELECTED DATA FOR MONITORING THE CONDITION OF FOREST PLANTATIONS

Isaev M.I.,
Docent of the Department of Applied Mathematics and Computer Technology
Kadyrov Chechen State University
Tukaeva R.L.,
5th year student of the direction of training «Applied Mathematics and Computer Science»
Kadyrov Chechen State University
Temergayev R.A.,
1th year student of the direction of training «Radiophysics»
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *The paper presents an analysis of the structure and dynamics of forest plantations based on data on the average diameter of trees, the variability of the trait, the accuracy of the experience, and the reliability of the average value. The analysis demonstrates the possibility of using the obtained data for long-term forecasting of wood growth, assessing the productivity of plantations, and timely detection of adverse changes. Continuous monitoring of key parameters allows for prompt adjustment of forest management strategies, minimizing environmental risks, and improving the efficiency of forest resource management. The research results are highly relevant for planning forestry activities, modeling environmental processes, and ensuring sustainable development of forest ecosystems.*
Keywords: *forestry processes, modeling of forestry processes.*

В табличном процессоре MS Excel разработан шаблон для оценки таксационных показателей лесного массива. Расчеты выполняются на основе анализа среднего диаметра стволов деревьев с учётом характеристик выборки. На основе такого расчетного комплекса можно проводить экологическое прогнозирование и корректировать практику рационального

природопользования. Но при этом к таким расчетам нужно подходить с осторожностью и выполнять дополнительную проверку.

Среднее значение при малой выборке вычисляется по формуле [3]:

$$M = \frac{x_1 + x_2 + \ ... + x_k}{n} = \frac{\sum x_j}{n}$$

Применение табличного процессора Microsoft Excel значительно упрощает расчетный процесс, способствует повышению точности прогнозирования, сокращает время и затраты на обработку данных.

Практическая значимость таких задач заключается в следующем:

1. Возможность дать оценку качества лесного массива по среднему диаметру деревьев. Среднее значение диаметра ствола деревьев говорит о том, что лесные насаждения зрелые и хорошо сформированные. Данные о средней изменчивости говорят о том, что надо регулярно проверять и проводить мониторинг участков лесного массива, в которых были зафиксированы неблагоприятные изменения.

2. Можно проводить мониторинг состояния насаждений по результатам данных, которые позволяют своевременно отреагировать на ухудшение состояния лесного массива. В последующем, опираясь на полученные результаты, можно пересмотреть лесозащитные мероприятия.

3. Если строго обновлять данные и по ним проводить расчеты, можно точно прогнозировать изменения в лесных экосистемах.

4. Получение верных расчетов в последующем усилит доверие к результатам исследований, что в дальнейшем будет способствовать улучшению и упрощению управления лесными территориями.

Список литературы

1. Александров В.М., Белкина В.А., Санькова Н.В., Мазуркевич В.В. Моделирование геолого-геофизических параметров. Трехмерное моделирование: учебник – Москва, Вологда: Инфра-Инженерия, 2025. – 264 с.
2. Еналеева-Бандура И.М. Управление рисками в лесной отрасли: монография / И.М. Еналеева-Бандура, А.Н. Баранов. – Красноярск: Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, 2022. – 166 с.
3. Хамитов Р.С., Авдеев Ю.М. Учебное пособие «Математическое моделирование лесных экосистем», изданное в Вологде-Молочном Вологодской государственной молочнохозяйственной академией им. Н.В. Верещагина, 2012. – 71 с.

УДК 378.2

МОДЕЛЬ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬЮ В ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНОМ ОБРАЗОВАНИИ

Исаева Л.М.,
доцент кафедры информационных технологий
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный педагогический университет»
e-mail: lz_256@mail.ru

Аннотация. *В статье представлена комплексная модель цифровой трансформации педагогического управления исследовательской деятельностью в системе естественно-научного образования. Обосновывается необходимость перехода от традиционных структур к гибким социально-техническим системам. Управленческие решения в рамках данной модели базируются на комплексном анализе образовательных данных и показателей активности пользователей. Предложенная модель управления направлена на глубокую персонализацию обучения и оптимизацию ресурсов. Реализация данного подхода позволяет существенно повысить эффективность научного поиска в условиях четвертой промышленной революции.*
Ключевые слова: *цифровая трансформация, педагогическое управление, естественно-научное образование, искусственный интеллект в образовании.*

A MODEL FOR DIGITAL TRANSFORMATION OF PEDAGOGICAL MANAGEMENT OF RESEARCH ACTIVITIES IN NATURAL SCIENCE EDUCATION

Isaeva L.M.,
Associate Professor, Department of Information Technology
Chechen State Pedagogical University

Abstract. *This article presents a comprehensive model for the digital transformation of pedagogical management of research activities in science education. It substantiates the need to transition from traditional structures to flexible socio-technical systems. Management decisions within this model are based on a comprehensive analysis of educational data and user activity indicators. The proposed management model is aimed at deeply personalizing learning and optimizing resources. Implementing this approach significantly improves the effectiveness of scientific research in the context of the Fourth Industrial Revolution.*
Keywords: *digital transformation, pedagogical management, science education, artificial intelligence in education.*

В условиях стремительного развития глобального информационного общества цифровая трансформация образования выступает не только как модернизация технической базы, но и как фундаментальный процесс пересмотра образовательных парадигм и управленческих механизмов. Особую актуальность этот процесс приобретает в сфере естественно-научного образования, где исследовательская деятельность является системообразующим элементом подготовки специалистов. Современная научно-образовательная среда требует внедрения моделей управления, которые могли бы гибко адаптироваться к вызовам Индустрии 4.0 (четвертой промышленной революции), интегрируя искусственный интеллект, большие данные и виртуальные технологии в повседневную педагогическую практику [2].

Цифровая трансформация в системе высшего образования обусловлена необходимостью подготовки кадров, обладающих высоким уровнем цифровой грамотности и способностью к инновационному поиску. Если в традиционной системе педагогическое управление преимущественно ограничивалось административным контролем и передачей готовых знаний, то в новой реальности оно эволюционирует в сторону формирования сложных социально-технических систем, в которых взаимодействие между всеми участниками образовательного процесса опосредовано цифровыми платформами и инструментами аналитики.

Современные образовательные организации сталкиваются с высокой скоростью технологических изменений, которая часто превышает адаптационные возможности традиционных структур. В этом контексте цифровая трансформация выступает ответом на запросы рынка труда и потребность в эффективном управлении через автоматизацию. Ключевым аспектом здесь является переход от фрагментарного использования ИТ-инструментов к системной реструктуризации всех сфер деятельности образовательной организации [3].

Цифровая трансформация не предполагает полного отказа от традиционных методов, но требует выявления скрытых взаимосвязей между элементами образовательного процесса для их оптимизации. В естественно-научном образовании это проявляется в создании междисциплинарных исследовательских зон, где методы обработки данных и математического моделирования становятся неотъемлемой частью экспериментальной работы.

Педагогическое управление исследовательской деятельностью в условиях цифровизации представляет собой целенаправленное воздействие на субъектно-объектные отношения в процессе научного поиска, реализуемое через персонализированные траектории освоения научного контента, где каждый обучающийся осваивает материал в соответствии со своими когнитивными возможностями, опираясь на адаптивные возможности платформ.

Содержательное наполнение исследовательской деятельности в естественно-научном образовании радикально меняется за счет интеграции виртуальных ресурсов. В цифровой среде содержание обучения характеризуется как «открытый комплекс ресурсов», обеспечивающий возможности для непрерывного развития и социализации. Для естественно-научных дисциплин это означает доступ к глобальным базам данных, научным репозиториям и высокотехнологичным симуляторам.

Использование таких инструментов, как PhET или Labster, позволяет интегрировать в содержание обучения эксперименты, которые невозможно провести в физической лаборатории из-за их сложности, опасности или стоимости. Применение данных инструментов, дает обучающимся возможность изменять параметры систем на естественно-научном уровне, что способствует формированию более глубоких ментальных моделей природных явлений.

Мониторинг «цифровизации» и активности пользователя на онлайн-платформах радикально меняет функции участников образовательного процесса. Управление исследованиями становится коллаборативным, а ключевой компетенцией преподавателя становится не передача информации, а «цифровая навигация» – умение модерировать работу с массивами данных и отделять научные факты от сомнительных сведений.

Основные управленческие функции педагога в новой модели включают:

– Проектирование цифровых систем – подбор адекватных цифровых инструментов для конкретных исследовательских задач.

– Модерация взаимодействий – управление дискуссиями в виртуальных сообществах и поддержка групповой динамики.

– Диагностика и сопровождение – использование данных аналитики для выявления индивидуальных затруднений обучающихся и предоставление своевременной поддержки.

– Развитие цифровой культуры – личный пример использования технологий и обучение этике научной коммуникации в сети [2].

Успешное управление цифровой средой возможно лишь при включении инновационных инициатив в стратегический контур образовательной организации. Реализация такого подхода подразумевает развитие партнерских отношений с ИТ-компаниями, планомерные инвестиции в инфраструктуру и непрерывное повышение квалификации сотрудников.

Измерение успеха цифровой трансформации в естественно-научном образовании требует комплексного мониторинга на всех уровнях, где эффективность определяется не только объемом знаний, но и качеством исследовательского процесса, поддерживаемого

оперативной обратной связью через ИИ-ассистентов для сохранения мотивации участников образовательного процесса.

Модель цифровой трансформации педагогического управления исследовательской деятельностью в естественно-научном образовании представляет собой комплексную систему, направленную на повышение эффективности научного поиска через интеграцию передовых ИТ-решений. Переход от сложных административных структур к гибким образовательным системам позволяет не только оптимизировать ресурсы, но и создать условия для глубокой персонализации обучения.

Ключевым элементом успеха является трансформация роли педагога, который становится архитектором цифровых сред и наставником, сопровождающим студента в его индивидуальном исследовательском поиске. Использование виртуальных лабораторий, адаптивных систем на базе ИИ и аналитики больших данных позволяет сделать науку более доступной и наглядной, сокращая разрыв между теорией и практикой.

В будущем можно ожидать еще более глубокой интеграции технологий дополненной и виртуальной реальности, развития метавселенных в образовании и расширения междисциплинарных связей на основе методов обработки данных. Основной задачей управления останется сохранение баланса между технологической эффективностью и гуманистическими ценностями образования, обеспечивая подготовку ученых, способных решать глобальные вызовы современности в условиях цифрового мира.

Список литературы

1. Актуальные проблемы современного информационного общества: Монография / М.В. Полевая, Н.О. Омарова, Е.В. Камнева [и др.]; под ред. Н.О. Омаровой, Е.В. Камневой – М.: Парнас, 2025. – 316 с.
2. Бакшеев Н.В. Стратегия цифровой трансформации отрасли науки и высшего образования как путь к цифровизации высшего образования в России / Н.В. Бакшеев // Проблемы и перспективы развития социально-экономических и гуманитарных наук: педагогика, психология, экономика, юриспруденция: Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции, Покров, 19 декабря 2024 года. – Москва: Московский педагогический государственный университет, 2025. – С. 37–42.
3. Лукашенко Д.В. Влияние цифровизации образования на развитие исследовательских компетенций студентов бакалавриата: опыт педагогического образования и программ / Д.В. Лукашенко // Глобальный научный потенциал. 2025. № 8(173). – С. 32–35.
4. Омарова К.А. Смешанное обучение интеграция онлайн и офлайн форматов – исследование эффективных моделей сочетания традиционных и цифровых методов обучения / К.А. Омарова, Л.М. Исаева, М.С.С. Абубакаров // Экономические и гуманитарные исследования регионов. 2025. № 4. – С. 70–75.
5. Титов А.В. Образование в цифре цифровизация процесса образования в вузах Министерства обороны / А.В. Титов, Н.Н. Кудрявцева, Н.В. Орехова // Вестник военного образования. 2024. № 2(47). – С. 12–15.

УДК 517

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СЛАБОГО ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИОНАЛА С ПРОИЗВОДНЫМИ РАДОНА-НИКОДИМА

Казакевич К.И.,
аспирант кафедры математического анализа
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
e-mail: klimchik26@gmail.com
Шабров С.А.,
д-р физ.-мат. наук, доцент, профессоркафедры математического анализа
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
e-mail: shaspoteha@mail.com

Аннотация. *Рассматривается функционал с производными по мере, описывающий полную энергию разрывной струны, помещенной во внешнюю среду с локализованными особенностями, приводящими не только к потере гладкости у решения, но и к разрывности самого решения. Получены достаточные условия слабого минимума функционала в классе μ-абсолютно непрерывных функций, первая производная которых суммируема с квадратом.*
Ключевые слова: *функционал, интеграл Стилтьеса, производная по мере, слабый экстремум, достаточные условия.*

SUFFICIENT CONDITIONS FOR A WEAK EXTREMUM FUNCTIONAL WITH RADON-NICODEMUS DERIVATIVES

Kazakevich K.I.,
Postgraduate student of the Department of Mathematical Analysis
Voronezh State University
Shabrov S.A.,
Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of Mathematical Analysis
Voronezh State University

Annotation. *A functional with measure derivatives is considered, describing the total energy of a discontinuous string placed in an external environment with localized features, leading not only to a loss of smoothness in the solution, but also discontinuity of the solution itself. Sufficient conditions are obtained for a weak minimum of the functional in the class of absolutely continuous functions, the first derivative of which is summable with a square.*
Keywords: *functional, Stieltjes integral, measure derivative, weak extremum, sufficient conditions.*

Введение. В задачах математической физики и механики деформируемых тел часто возникают функционалы, зависящие от производных функций, определённых по мере. Одним из таких является функционал с интегралом Стилтьеса, который описывает полную потенциальную энергию разрывной струны с внутренними и внешними особенностями – например, систем, содержащих разрывные элементы и взаимодействующих с неоднородной средой.

Анализ подобных функционалов приводит к необходимости рассмотрения краевых задач с производными по мере. В ряде работ получены необходимые условия экстремума для таких функционалов, однако вопросы, связанные с достаточными условиями слабого минимума, требуют дальнейшего изучения.

В настоящей работе рассматривается функционал с интегралом Стилтьеса на множестве μ-абсолютно непрерывных функций, первая производная которых суммируема с квадратом. Получены достаточные условия слабого экстремума указанного функционала.

1. Основной результат

На множестве $\mathrm{E}-\mu$ - абсолютно непрерывных на $\overline{[0,\ell]_s}$ функций, первая производная $u'_\mu(x)$ которых имеет конечное на $\overline{[0,\ell]_\mu}$ измерение, удовлетворяющее условиям $u(0)=u(\ell)=0$.

Рассмотрим функционал полной потенциальной энергии разрывной струны с внутренними и внешними особенностями – в ней есть дефекты, утяжеления, или она состоит из частей с разными свойствами. Также на неё действует внешняя среда, которая также не везде одинакова (например, в некоторых точках есть «толчки»):

$$\varphi(u)=\int_0^l \frac{pu'^{\,2}_\mu}{2}d\mu+\int_0^l \frac{u^2}{2}d[Q]-\int_0^l u\,d[F] \tag{1}$$

Будем говорить, что функция $\varphi(x)$, определенная на множестве $\overline{[0,\ell]_\mu}$, имеет конечное на этом множестве измерение, если при произвольном разбиении множества $\overline{[0,\ell]_\mu}$ точками $x_i\in\overline{[0,l]_\mu}$ сумма $i=(0,\,f,\ldots,\ldots,n)$

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})\right|$$

ограничена, то есть существует константа $C>0$ такая, что

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})\right|<C$$

для произвольного разбиения множества $\overline{[0,\ell]_\mu}$ конечным набором точек $\{x_i\}$. Иными словами, мы берем этот отрезок и устанавливаем в него точки-гвозди в произвольных местах. Элементы этой суммы и есть наши «гвозди»: x_0 здесь – первый гвоздь, x_n – последний гвоздь. И для каждого маленького отрезка между гвоздями $[x_{i-1},x_i]$ мы смотрим, насколько изменилась функция. $\left[\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})\right]$ – модуль разности. При этом нас не интересует, выросли мы или упали, нас интересует «амплитуда нашего движения» на этом участке. Для этого мы и складываем все эти «амплитуды» для всех участков.

Заметим, что функционал (1) является функционалом потенциальной системы «разрывной» струны (см. [1]). В работе [1] получено необходимое условие минимума $\varphi(u)$ на E в виде интегро-дифференциального уравнения

$$pu'_\mu(x)-pu'_\mu(0)=\int_0^x u\,d[Q]-F(x)+F(0) \tag{2}$$

дополненное краевыми условиями $u(0)=u(\ell)=0$.

Также была изучена спектральная задача:

$$\begin{cases} pu'_\mu(x)-pu'_\mu(0)=\int\limits_0^x u\,d[Q]-\lambda\int\limits_0^x u\,d[M], \\ u(0)=u(l)=0. \end{cases}$$

Полученный в [1] результат важен для нашего исследования. Он даёт мощный математический инструмент. Условие «спектр положителен» в дальнейшем поможет нам свестись к проверке, что самое первое (наименьшее) собственное число $\lambda_1>0$. Если это так, то все остальные λ_n будут заведомо положительными благодаря осцилляционности.

В дальнейшем мы получим достаточные условия слабого экстремума функционала (1) на E.

Нам удобнее (2) заменить на более привычное для теории дифференциальных уравнений уравнение:

$$-(pu'_\mu)'_{[\sigma]}+(uQ)'_{[\sigma]}=F'_{[\sigma]} \tag{3}$$

Понимая уравнение (3) в точках разрыва ξ функции $\mu(x)$ как два равенства:

$$-\Delta^-(pu'_\mu)(\xi)+u(\xi-0)\Delta^-Q(\xi)=\Delta^-F(\xi), \quad (4)$$

$$-\Delta^+(pu'_\mu)(\xi)+u(\xi-0)\Delta^+Q(\xi)=\Delta^+F(\xi), \quad (5)$$

где $\Delta^- f(x)=f(x)-f(x-0)$ и $\Delta^+ f(\xi)=f(\xi+0)-f(\xi)$ – левый и правый скачки функции f(x) в точке x соответственно.

Физический смысл в том, что эти уравнения – условия баланса сил в точке разрыва.

Пусть $u_0(x)$ является решением краевой задачи:

$$\begin{cases}-(pu'_\mu)'_{[\sigma]}+(uQ)'_{[\sigma]}=F'_{[\sigma]},\\ u(0)=u(l)=0\end{cases} \quad (6)$$

Пусть спектр (набор собственных чисел) задачи

$$\begin{cases}-(pu'_\mu)'_{[\sigma]}+(uQ)'_{[\sigma]}=\lambda u;\\ u(0)=u(l)=0.\end{cases}$$

положителен. Тогда функция $u_0(x)$, которая является решением краевой задачи (6), доставляет слабый минимум функционалу энергии (1) на множестве E, то есть действительно является состоянием с минимальной потенциальной энергией.

Заключение. В работе исследован функционал с производной по мере, описывающий потенциальную энергию разрывной струны с внутренними особенностями. Получены достаточные условия слабого экстремума.

Список литературы

1. Зверева М.Б. О некоторых вопросах качественной теории дифференциальных уравнений с производными Стилтьеса: дисс. ... кандидата физ.-мат. наук / Воронеж. гос. ун-т; науч. руководитель Ю.В. Покорный. – 15.11.2005. – 120 с.
2. Шабров С.А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, № 1. – С. 52–55.
3. Шабров С.А. Математическое моделирование и качественные методы анализа граничных задач с производными по мере: дисс. ... доктора физ.-мат. наук / Воронеж. гос. ун-т; науч. консультант А.Д. Баев. 20.12.2017. – 412 с.
4. Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. физика, математика. 2013. № 1. – С. 232–250.

УДК 517

НЕПРЕРЫВНАЯ ПОПУЛЯЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ТИПА «РЕСУРС – ПОТРЕБИТЕЛЬ»

Кайгермазов А.А.,
доцент кафедры «Прикладная математика и информатика»
ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова»
e-mail: arslan1961@.yandex.ru
Есанкулова М.Х.,
старший преподаватель кафедры «Прикладная математика и информатика»
ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова»
e-mail: kertbieva96@bk.ru

Аннотация. *В работе рассматривается математическая модель системы «ресурс – потребитель» с учетом возрастной структуры популяции потребителя. Проведено аналитическое исследование задачи: анализ стационарных состояний, разработка численного метода решения и вычисления на ЭВМ. Результаты иллюстрируют влияние возрастной структуры на динамику взаимодействия «ресурс – потребитель».*
Ключевые слова: *модель «ресурс – потребитель», стационарные состояния, динамика взаимодействия, возрастная структура, популяция.*

CONTINUOUS POPULATION «RESOURCE – CONSUMER» TYPE MODEL

Kaygermazov A.A.,
Associate Professor in Department of Applied Mathematics and Computer Science
Berbekov Kabardino-Balkarian State University
Esankulova M.Kh.,
Senior lecturer in in Department of Applied Mathematics and Computer Science
Berbekov Kabardino-Balkarian State University

Abstract. *The Paper considers a mathematical Model of the «resource – consumer» System taking into account the age Structure of the consumer Population. An analytical Study of the Problem is conducted: analysis of stationary States, development of a numerical Method for Solution, and Computations on a Computer. The Results illustrate the Impact of the Age Structure on the Dynamics of resource – consumer interaction.*
Keywords: *«resource – consumer» Model, stationary States, interaction Dynamics, Age Structure, Population.*

Рассмотрим систему «ресурс – потребитель» с учетом возрастной структуры популяции потребителя. Пусть $u(\tau,t)$ – плотность популяции потребителя возраста τ в момент времени t, $R(t)$ – количество ресурса в момент времени t.

В области $\Omega=\{(\tau,t): 0<\tau<l, 0<t<T\}$ рассмотрим задачу:

$$u_\tau + u_t = -\left(a(\tau) + \frac{\mu}{1+K\cdot R}\right)\cdot u, \quad (1)$$

$$u(\tau,0) = \phi(\tau), \quad (2)$$

$$u(0,t) = \int_0^l c(\tau)\cdot\frac{R}{h+R}\cdot u(\tau,t)\,d\tau, \quad (3)$$

$$\frac{dR}{dt} = r\cdot R(t)\left(1-\frac{R(t)}{K}\right) - \int_0^l b(\tau)\cdot u(\tau,t)d\tau, \quad (4)$$

$$R(0) = R_0. \quad (5)$$

Здесь $a(\tau)$ – коэффициент смертности популяции потребителя; K – емкость среды; $\varphi(\tau)$ – функция начального возрастного распределения потребителя; l – максимальный возраст потребителя; $c(\tau)$ – коэффициент рождаемости потребителя; r – коэффициент естественного роста ресурса; $b(\tau)$ – функция потребления ресурса особями возраста τ, $h>0$ параметр насыщения, $\mu\geq 0$ – произвольная константа; R_0 – начальное значение ресурса.

Проведено аналитическое исследование задачи (1)–(5). Осуществлен анализ стационарных состояний. Разработан численный метод решения и проведены расчеты на ЭВМ.

Полученные результаты дают возможность лучше понять влияние возрастной переменной популяции на динамику взаимодействия между потребителем и ресурсом.

Список литературы

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 286 с.
2. Ризниченко Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии. – Ижевск, 2003. – 184 с.
3. Кайгермазов А.А., Кудаева Ф.Х. Дискретные и непрерывные модели математической биологии: Учебно-методическое пособие. – Нальчик, 2008. – 114 с.

УДК 53.096

ИССЛЕДОВАНИЕ ХИМИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ И ФАЗОВОГО СОСТАВА СПЛАВОВ PbTe-CdSe МЕТОДАМИ РЕНТГЕНОВСКОЙ ФОТОЭЛЕКТРОННОЙ СПЕКТРОСКОПИИ

Калмыков Р.М.,
доцент кафедры электроники и цифровых информационных технологий
ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова»
e-mail: kalmykov.rustam@yandex.ru
Кармоков А.М.,
профессор кафедры электроники и цифровых информационных технологий
ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова»
Хасанов А.И.
заведующий кафедрой физической электроники
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»

Аннотация. *Методом рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии на спектрометре K-Alpha (Thermo Fisher Scientific) с использованием монохроматизированного Al Kα-излучения исследовано химическое состояние и структура сплавов PbTe с содержанием CdSe от 0,5 до 3 мол%. Показано возможное участие атомов кадмия в образовании соединений CdTe и $CdSe_{0.65}Te_{0.35}$. Несмотря на спектральное перекрытие линий Cd 3d и Pb 4d, достоверность выводов о фазообразовании подтверждена с использованием Оже-параметров.*
Ключевые слова: *теллурид свинца, селенид кадмия, микроструктура, спектры, приповерхностный слой, химическое состояние, фотоэлектрон.*

STUDIES OF THE CHEMICAL STATE AND PHASE COMPOSITION OF PBTE-CDSE ALLOYS USING X-RAY PHOTOELECTRON SPECTROSCOPIC METHODS

Kalmykov R.M.,
Associate Professor, Department of Electronics and Digital Information Technologies
Berbekov Kabardino-Balkarian State University
Karmokov A.M.,
Professor, Department of Electronics and Digital Information Technologies
Berbekov Kabardino-Balkarian State University
Khasanov A.I.,
Head of the Department of Physical Electronics
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *The chemical state and structure of PbTe alloys with CdSe contents ranging from 0.5 to 3 mol% were studied using X-ray photoelectron spectroscopy on a K-Alpha spectrometer (Thermo Fisher Scientific) using monochromatic Al Kα radiation. The possible involvement of cadmium atoms in the formation of CdTe and CdSe0.65Te0.35 compounds was demonstrated. Despite the spectral overlap of the Cd 3d and Pb 4d lines, the reliability of the phase formation conclusions was confirmed using Auger parameters.*
Keywords: *lead telluride, cadmium selenide, microstructure, spectra, surface layer, chemical state, photoelectron.*

Соединения $A^{IV}B^{VI}$ и твердые растворы на их основе являются одними из базовых материалов для создания преобразователей тепловой энергии в электрическую в области средних температур, а также для современных лазеров и высокочувствительных приемников, работающих в ИК-области [1–4]. Поведение примесей в матрице данного класса соединений имеет достаточно сложный характер. Основным фактором, ограничивающим возможности их применения, является высокая концентрация электрически активных собственных дефектов, обусловленных отклонением состава от стехиометрии [5–7]. В связи с этим в работе проведены исследования химического состояния, структуры и образования новых фаз при

изменении содержания CdSe в матрице PbTe методом рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии.

В качестве исходных компонентов для приготовления сплавов использовались свинец особой чистоты (99,999 %), теллур особой чистоты (99,999 %) и селенид кадмия особой чистоты в форме дисперсного порошка размером 28–35 мкм. Процесс синтеза исследованных материалов более подробно описан в [8, 9]. Объектами исследования были PbTe стехиометрического состава и PbTe с содержанием 0,5 мол%, 1 мол%, 2 мол% и 3 мол% CdSe.

Спектроскопическое исследование образцов проводилось в центре коллективного пользования «Физика поверхности наносистем и технологии наноструктур» Кабардино-Балкарского государственного университета на рентгеновском фотоэлектронном спектрометре (РФЭС) K-Alpha производства фирмы Thermo Fisher Scientific. В качестве источника фотонов используется монохроматизированное излучение Kα-линии алюминия (hν = 1486,6 эВ). Вакуум в камере анализатора во время проведения эксперимента составлял $P = 9 \cdot 10^{-7}$ Па. Измерения проводились при температуре T=20°C.

На рис. 1 представлен обзорный РФЭ спектр полупроводникового соединения PbTe, содержащего 3 мол% CdSe. Спектр был снят после длительного травления поверхности образца ионным (Ar+) пучком, поэтому полученные нами результаты следует отнести к объему образца. Анализ обзорного спектра показывает наличие в основном пиков свинца, теллура, селена, остаточного углерода и кислорода. При регистрации спектров с целью предотвращения смещения положения энергетических пиков вследствие зарядки поверхности была использована низкоэнергетическая электронная пушка. Положения фотоэлектронных пиков были скорректированы относительно пика углерода C1s (284 эВ), принимая его за реперный.

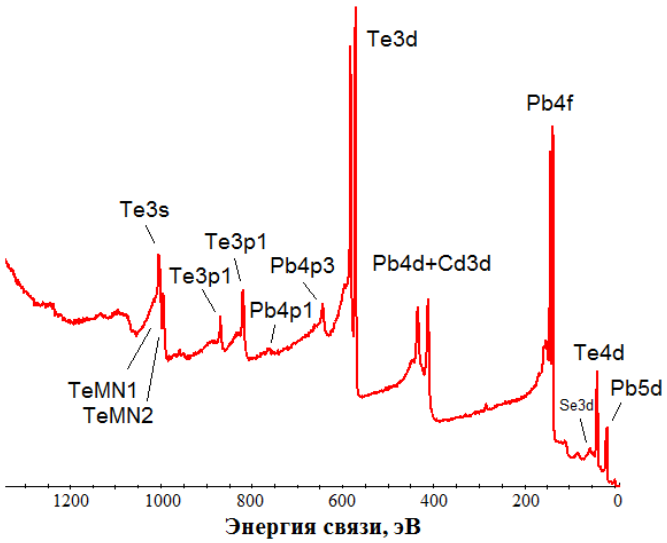

Рис. 1. *Обзорный спектр PbTe, содержащего 3 мол% CdSe после травления ионами аргона*

При изучении приготовленного образца были зарегистрированы фотоэлектронные линии дублетов свинца (Pb4f) и теллура (Te3d). Спектры высокого разрешения областей этих пиков приведены на рисунках 2 и 3.

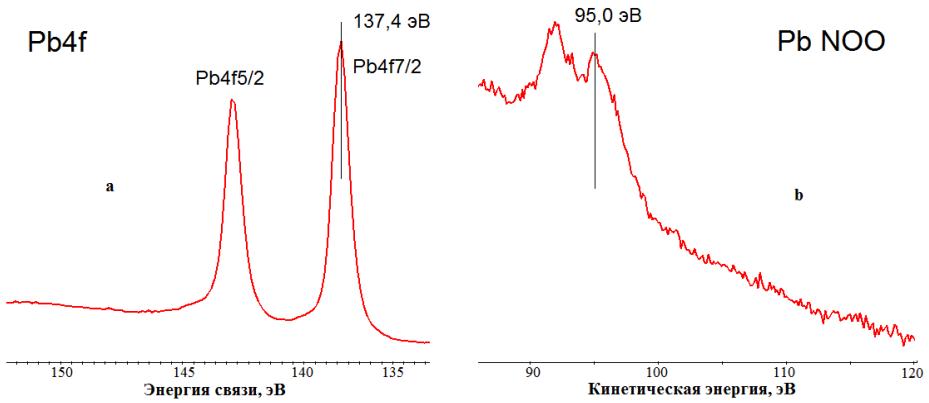

Рис. 2. *a – РФЭ линии свинца Pb4f, b – Оже-спектр Pb перехода NOO образца PbTe, содержащего 3 мол% CdSe*

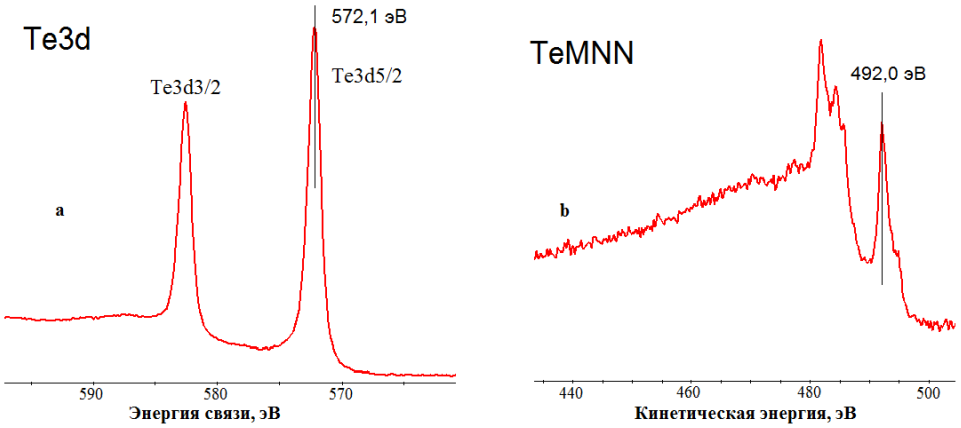

Рис. 3. *a – РФЭ линии теллура Te3d, b – Оже-линии Te перехода MNN образца PbTe, содержащего 3 мол% CdSe*

Образование атомами теллура и свинца соединения теллурида свинца подтверждается значениями энергий связи фотоэлектронных пиков Pb4f7/2 (137,4 эВ [10]) и Te3d5/2 (572,1 эВ [11]), а также величиной Оже-параметра свинца (232,4 эВ [12]). Величина Оже-параметра теллура в соединении теллурида свинца по данным экспериментальных исследований составляет 1064,1 эВ. Однако наличие небольшой асимметрии на фотоэлектронном пике теллура Te3d в области энергии 572 эВ может свидетельствовать о возможном участии атомов кадмия в образовании соединений CdTe (572,3 эВ [13]) и $CdSe_{0.65}Te_{0.35}$ (572,6 эВ [13]). Использование Оже-параметров в качестве независимого критерия повышает достоверность результатов, поскольку эти величины менее чувствительны к поверхностной зарядке и калибровке спектров по сравнению с абсолютными значениями энергий связи.

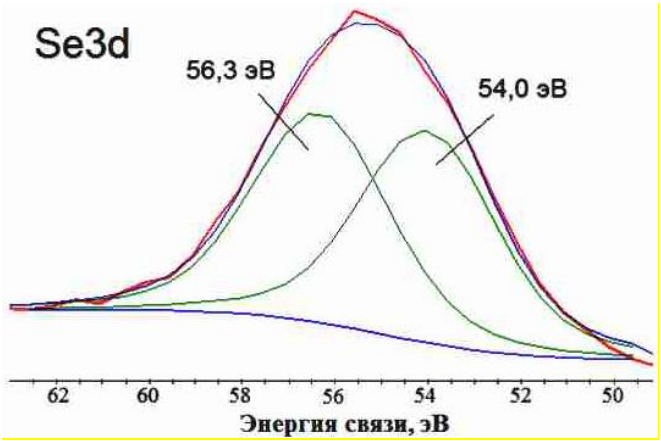

Рис. 4. *РФЭ спектр линии селена Se3d образца PbTe, содержащего 3 мол% CdSe*

Анализ спектра фотоэлектронного пика селена Se3d (рис. 4) показал нахождение атомов селена в двух химических состояниях – SeO_2 (56,3 эВ) и CdSe (54,0 эВ [14]). Это также позволяет надежно разделить вклад целевой фазы селенида кадмия и поверхностного оксида. Наличие оксидной компоненты является ожидаемым для приповерхностных исследований и не противоречит выводам работы. Несмотря на то, что прямое определение химического состояния кадмия оказалось невозможным из-за спектрального перекрытия линий Cd 3d и Pb 4d, такой технический артефакт хорошо известен в литературе и не опровергает выводы о фазообразовании, поскольку наличие селена в состоянии CdSe уже свидетельствует о формировании соответствующей фазы.

Список литературы

1. Равич Ю.И., Ефимова Б.А., Смирнов И.А. Методы исследования полупроводников в применении к халькогенидам свинца PbTe, PbSe и PbS. – Москва: Наука, 1968. – 384 с.
2. Чижиков Д.М. Теллур и теллуриды. Москва: Наука, 1966. 286 с.
3. Калмыков Р.М., Кармоков А.М. Известия вузов. Физика, 61, 3, 76 (2018).
4. Калмыков Р.М., Кармоков А.М., Шомахов З.В. Физико-химические аспекты изучения кластеров, наноструктур и наноматериалов, 13, 187 (2021).
5. Калмыков Р.М., Кармоков А.М., Молоканова О.О., Молоканов О.А. Фундаментальные исследования. 2017. Т. 1. № 11. – С. 76.
6. Kalmykov R.M., Karmokov A.M., Shomakhov Z.V. // IOP Conference Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2017. V. 816. Doi: 10.1088/1742-6596/816/1/012006.
7. Калмыков Р.М., Кармоков А.М. // Прикладная физика. 2017. № 4. – С. 55.
8. Калмыков Р.М., Кармоков А.М. // Известия КБГУ. 2016. Т. 6. № 4. – С. 31.
9. Калмыков Р.М., Кармоков А.М. // Патент на изобретение № 2642890 от МПК H01L 35/16 (2006.01). Опубликовано: 29.01.2018 Бюл. № 4. – С. 6.
10. Cappelli E., Bellucci A., Medici L. // Applied Surface Science. 2015. V. 336. P. 283. Doi: 10.1016/j.apsusc.2014.12.031.
11. Pederson L.R. // Journal Electron Spectroscopy and Related Phenomena. 1982. V. 28. – P. 203.
12. Sun T.S., Buchner S.P., Byer N.E. // Journal of Vacuum Science and Technology. 1980. V. 17. – P. 1067.
13. Polak M. // Journal Electron Spectroscopy and Related Phenomena. 1982. V. 28. P. 171.
14. Shenasa M., Sainkar S., Lichtman D. // Journal Electron Spectroscopy and Related Phenomena. 1986. V. 40. – P. 329.

УДК 519.1

ПОСТРОЕНИЕ И МИНИМИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ЛАМА, АССОЦИИРОВАННЫХ С ТОЧКАМИ ЛАГРАНЖЕВА ГРАССМАНИАНА

Круглышев А.В.,
студент 3-го курса бакалавриата
ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»;
помощник исследователя РНОМЦ «Центр интегрируемых систем»
e-mail: kruglyshevanton@yandex.ru

Аннотация. *Доклад посвящён изложению новой связи между теорией электрических сетей и теорией Постникова-Лама положительных грассманианов. Мы опишем вложение электрических сетей с n граничными вершинами в положительную часть грассманиана Gr(n-1, 2n) и соответствующие им модели Лама – специальные взвешенные графы, дающие комбинаторное описание как самой электрической сети, так и её образа при этом вложении. Оказывается, что можно построить вложение электрических сетей в положительный лагранжев грассманиан; такое вложение представляется более естественным из-за соображений размерности. Вопрос о сюръективности такого вложения в общем случае остается открытым. Мы разберём несколько маломерных примеров, используя явное построение моделей Лама, отвечающих положительным точкам лагранжева грассманиана, а также рассмотрим способы построить минимальные модели для сетей общего положения, которые могут служить основой для доказательства сюръективности вложения в лагранжев грассманиан. Кроме того, мы обсудим связь рассматриваемых задач с классической обратной задачей теории электрических сетей – дискретной задачей Кальдерона.*
Ключевые слова: *Электрическая сеть, матрица отклика, обратная задача теории электрических сетей, грассманиан, модель Лама.*

BUILDING AND MINIMIZING OF LAM'S MODELS ASSOCIATED WITH LAGRANGIAN GRASSMANNIAN POINTS

Kruglyshev A.V.,
3rd year bachelor's degree student at «P.G. Demidov Yaroslavl State University»,
Assistant researcher at «Center of integrable system»

Abstract. *This talk presents a new connection between the theory of electrical networks and the Postnikov-Lam theory of positive Grassmannians. We will describe the embedding of electrical networks with n boundary vertices into the positive part of the Grassmannian Gr(n-1, 2n) and the corresponding Lam models, namely special weighted graphs that provide a combinatorial description of both the electrical network itself and its image under this embedding. It turns out that it is possible to construct an embedding of electrical networks into a positive Lagrangian Grassmannian; such an embedding appears more natural due to dimensional considerations. The question of whether such an embedding is surjective in the general case remains open. We will examine several low-dimensional examples using the explicit construction of Lam models corresponding to positive points of the Lagrangian Grassmannian, and also consider methods for constructing minimal models for general networks, which can serve as the basis for proving the surjectivity of the embedding into the Lagrangian Grassmannian. We will also discuss the relationship between the problems under consideration and the classical inverse problem of electrical network theory, i. e. the discrete Calderón problem.*
Keywords: *Electrical network, response matrix, inverse problem of electrical networks theory, Grassmannian, Lam model.*

В докладе будет установлена новая связь между теорией электрических сетей и теорией Постникова-Лама положительных грассманианов. Будет описано вложение электрических сетей с n граничными вершинами в положительную часть грассманиана Gr(n-1, 2n) и рассмотрены соответствующие им модели Лама – специальные взвешенные графы, дающие комбинаторное описание как самой электрической сети, так и её образа при этом вложении.

Оказывается, что можно построить вложение электрических сетей в положительный лагранжев грассманиан, такое вложение представляется более естественным из-за соображений размерности. Вопрос о сюръективности такого вложения в общем случае остается открытым. Мы разберём несколько маломерных примеров, используя явное построение моделей Лама, отвечающих положительным точкам лагранжева грассманиана, а

также рассмотрим способы построить минимальные модели для сетей общего положения, которые могут служить основой для доказательства сюръективности вложения в лагранжев грассманиан. Кроме того, мы обсудим связь рассматриваемых задач с классической обратной задачей теории электрических сетей – дискретной задачей Кальдерона.

Список литературы

1. Curtis E.B., Morrow J.A. Inverse problems for electrical networks = Обратные задачи для электрических сетей: in 1 vol. / E B. Curtis, J.A. Morrow. – Singapore: World Scientific, 2000. Vol. 13. – 182 p. (Series on Applied Mathematics). – ISBN 978-981-02-3735-5.
2. Lam T. Totally nonnegative Grassmannian and Grassmann polytopes = Полностью неотрицательный грассманиан и грассмановы многогранники / T. Lam // arXiv preprint arXiv:1506.00603. 2015. – 89 p.
3. Lam T. Electroid varieties and a compactification of the space of electrical networks = Многообразия электродов и компактификация пространства электрических сетей / T. Lam // Advances in Mathematics. 2018. Vol. 338. – P. 549–600. DOI: 10.1016/j.aim.2018.09.014.
4. Bychkov B., Gorbounov V., Kazakov A., Talalaev D. Electrical networks, Lagrangian Grassmannians and symplectic groups = Электрические сети, лагранжевы грассманианы и симплектические группы / B. Bychkov, V. Gorbounov, A. Kazakov, D. Talalaev // arXiv preprint arXiv:2109.13952. 2021. 32 p.
5. Казаков А.А. On the surjectivity of embedding electrical networks in the positive part of the Grassmannian = О сюръективности вложения электрических сетей в положительную часть грассманниана // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2023» / Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, Е.И. Зимакова. [Электронный ресурс]. – М.: МАКС Пресс, 2023. Секция «математика и механика», Подсекция «Геометрия и топология» – 15.

УДК 517

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАВЛЕНИЯ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Кудаева Ф.Х.,
доцент кафедры «Прикладная математика и информатика»
ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова»
e-mail: kfatimat@yandex.ru
Нагоров А.Л.,
старший преподаватель кафедры «Прикладная математика и информатика»
ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова»
e-mail: cuba13@rambler.ru

Аннотация. *Представлена математическая модель фазового перехода плавления полимеров, учитывающая особенности теплофизических свойств полимерных материалов. Модель основана на системе уравнений теплопереноса с подвижной границей фазового перехода. Используется аппроксимация скрытой теплоты плавления и нелинейных зависимостей удельной теплоёмкости от температуры. Численное решение задачи реализовано с помощью программы на языке программирования Python.*
Ключевые слова: *математическое моделирование, уравнение теплопереноса, задача с фазовыми переходами, температурное поле, плавление полимеров, единственность решения, численные методы*.

MATHEMATICAL MODEL OF POLYMER MATERIALS MELTING

Kudayeva F.Kh.,
Associate Professor in Department of Applied Mathematics and Computer Science
Berbekov Kabardino-Balkarian State University
Nagorov A.L.,
Senior lecturer in in Department of Applied Mathematics and Computer Science
Berbekov Kabardino-Balkarian State University

Abstract. *A mathematical Model of the polymer Melting phase transition is proposed, accounting for the thermophysical properties of polymeric Materials and based on a System of heat transfer equations with a moving Phase transition boundary. Approximations of the latent heat of fusion and nonlinear dependencies of specific heat capacity on temperature are employed. The numerical solution of the Problem is implemented using a Python programming language Program.*
Keywords: *mathematical Modeling, heat transfer Equation, phase transition Problem, temperature Field, polymer Melting, uniqueness of Solution, numerical Methods*.

Математическая модель определения динамики температурного поля плавки $u(x,t)$ и границы фазового перехода $x=s(t)$ при переходе из твердого состояния в вязкотекучее состояние при нагревании полимерного материала описывается задачей типа Стефана [1–3]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=0, x\in\Omega^+(t), t>0,\\ \beta\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=0, x\in\Omega^-(t), t>0, u(x,0)=u_0,\ u_0<0,\\ u(0,t)=u_c,\ \ u(L,t)=u_0,\\ u_1(s-0,t)=u_2(s+0,t),\\ \delta\frac{\partial u_2(s+0,t)}{\partial x}-\frac{\partial u_1(s-0,t)}{\partial x}=\gamma\frac{ds}{dt}\end{gathered} \tag{1}$$

В (1) $\Omega=(0,L)$ – область, где происходит тепловой процесс плавки. Граница фазового перехода разбивает область на две подобласти: $\Omega^+=\{x|0<x<s(t)\}$, $\Omega^-=\{x|s(t)<x<L\}$, u_c – температура полимера без воздействия, u_0 – температура, позволяющая расплавить полимер полностью или частично, причем u(x,t)<0 в Ω^- и u(x,t)>0 в Ω^+, t – временная переменная.

Сделав следующую замену

$$u(x,t) = \varphi(x) + v(x,t)$$

и после преобразования задачи (1), искомое решение ищется в виде линейной комбинации базисных функций с последующим определением коэффициентов этой комбинации [3,4]:

$$v^n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\varphi_k(t)$$

где $c_k(t)$ – неизвестные функции, $\varphi_k(t)$ – координатные функции, $v(x,t)$-новая неизвестная функция, $\varphi(x)$-функция, удовлетворяющая условиям $\varphi(0) = u_c$, $\varphi(L) = u_0$, $\varphi(x) = u_c + \frac{u_c - u_0}{L}x$, $\varphi_k(x) = x(1-x)P_{k-1}\left(\frac{2x}{l} - l\right), k = 1,2,\dots,n$, $P_m(z)$ – полиномы Лежандра.

Фронт фазового перехода ищем в виде $s(t) = \alpha\sqrt{t}$, где для поиска α применен метод наименьших квадратов.

Найдено решение стационарной задачи, соответствующее (1):

$$u_1(x) = u_c + \delta\frac{u_0 - u_c}{L + (\delta - 1)s}x, 0 < x < s,$$

$$u_2 = u_c + (\delta - 1)\frac{u_0 - u_c}{L + (\delta - 1)s}s\delta\frac{u_0 - u_c}{L + (\delta - 1)s}x, s < x < L.$$

где s – положение стационарной границы фазового перехода.

Доказано, что при использовании неявной схемы аппроксимации уравнения решается система уравнений с трёхдиагональной матрицей (метод прогонки).

Для устойчивости явной схемы требуется выполнение условия:

$$\Delta t \le \frac{min(\rho_p c_p)(\Delta x)^2}{2\max(k_p)}.$$

Разработан и реализован численный алгоритм, позволяющий получать устойчивое решение в широком диапазоне параметров.

Составлена программа на языке программирования Python с использованием неявной схемы для определения динамики температурного поля и проведены расчеты.

При вычислении положения фронта используется классический баланс тепла. Температурное поле обновляется неявной схемой (метод прогонки). Температура плавления поддерживается на фронте. Модель упрощена и не учитывает изменение физических свойств с температурой, а также теплообмен с окружающей средой.

Программный код для задачи Стефана при моделировании плавления полимера с подвижной границей приводит к трем типам графиков.

Результаты расчета приведены на рис. 1, 2, 3.

Рис. 1. *Движение фазового фронта*

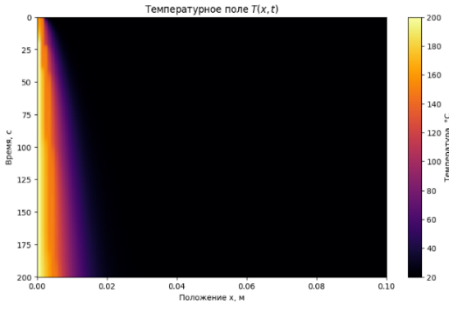

Рис. 2. *Динамика температурного поля*

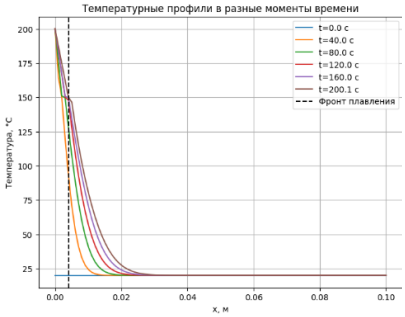

Рис. 3. *Температура в разные моменты времени*

Графики показывают эволюцию фазового перехода и динамику температурного поля в одномерном образце.

Список литературы

1. Кудаева Ф.Х. Математическая модель низкотемпературного воздействия на биоткани/Математическая физика и компьютерное моделирование. Т. 28. № 2. 2025. – С. 27–39. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2025.2.3
2. Кудаева Ф.Х. Математическая модель низкотемпературного воздействия на биоткани/ Прикладная математика & физика. 2025. 57(2). – С. 117–124. DOI: 10.52575/2687-0959-2025-57-2-117-124 EDN LEREVY.

3. Ситникова В.Е., Пономарева А.А., Успенская М.В. Современные методы физико-химического анализа полимерных материалов//Методы исследования полимеров. – СПб 2021. – С. 17–22.
4. Crank J. Free and Moving Boundary Problems. – Oxford: Clarendon Press, 1984. – 425 p.
5. Alexiades V., Solomon A.D. Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes. – Washington DC: Hemisphere Publ. Co, 1993. – 323 p.

УДК 517.925.5

КРИТЕРИЙ ЧАСТИЧНОЙ РАВНОМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ И ЧАСТИЧНОЙ РАВНОМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ В ПРЕДЕЛЕ РЕШЕНИЙ С ЧАСТИЧНЫМ КОНТРОЛЕМ ПРЕДЫСТОРИЙ

Лапин К.С.,
доцент кафедры математики, экономики и методик обучения
ФГБОУ ВО «Мордовский государственный педагогический университет им. М.Е. Евсевьева»
e-mail: klapin@mail.ru

Аннотация. *Для решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа введено понятие равномерной частичной ограниченности решений с частичным контролем предысторий. С использованием функционалов Ляпунова-Красовского получено достаточное условие равномерной частичной ограниченности решений с частичным контролем предысторий. Далее введено понятие равномерной частичной ограниченности в пределе решений с частичным контролем предысторий. В терминах функционалов Ляпунова-Красовского получен критерий равномерной частичной ограниченности и равномерной частичной ограниченности в пределе решений с частичным контролем предысторий.*
Ключевые слова: *равномерная ограниченность решений, равномерная ограниченность в пределе решений, функционал Ляпунова-Красовского.*

PARTIAL EQUIOBOUNDEDNESS AND PARTIAL ULTIMATE EQUIOBOUNDEDNESS OF SOLUTIONS WITH PARTIAL HISTORICAL CONTROL.

Lapin K.S.,
Associate Professor of the Department of Mathematics, Economics, and Teaching Methods
Evseviev Mordovian State Pedagogical University

Abstract. *For solutions of delay-type functional differential equations, the concept of uniform partial boundedness of solutions with partial control of their prehistories is introduced. Using Lyapunov-Krasovskii functionals, a sufficient condition for uniform partial boundedness of solutions with partial control of their prehistories is obtained. The concept of partial uniform-ultimate boundedness of solutions with partial control of their prehistories is then introduced. Using Lyapunov-Krasovsky functionals, a criterion for uniform partial boundedness and partial uniform-ultimate boundedness of solutions with partial control of their prehistories is obtained.*
Keywords: *uniform boundedness of solutions, uniform-ultimate boundedness of solutions, Lyapunov-Krasovsky functional.*

Пусть $h > 0$ – фиксированная постоянная, и $C([-h;0],\mathbb{R}^n)$ – линейное пространство всех непрерывных отображений вида $\varphi\colon [-h;0] \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, рассматриваемое вместе с нормой $\|\varphi\| = \max_{(-h\leq\vartheta\leq 0)}\|\varphi(\vartheta)\|$. Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t), \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0;+\infty), \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $-h \leq t < +\infty$, $F\colon \mathbb{R}^+ \times C([-h;0],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ – любое непрерывное отображение и семейство отображений $x_t\colon [-h;0] \to \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^+$, называемое h-траекторией отображения $x(t)$, задается формулой $x_t(\vartheta) = x(t+\vartheta)$, $-h \leq \vartheta \leq 0$.

Решением $x(t,t_0,\varphi_0)$ уравнения (1) с начальными условиями $(t_0,\varphi_0) \in \mathbb{R}^+ \times C([-h;0],\mathbb{R}^n)$ называется любое отображение $x(-,t_0,\varphi_0)\colon [t_0-h;+\infty) \to \mathbb{R}^n$, $x(t,t_0,\varphi_0) \in \mathbb{R}^n$, $t_0 - h \leq t < +\infty$, для которого выполнены следующие условия: 1) $x(t,t_0,\varphi_0)$, $t \geq t_0$ удовлетворяет уравнению (1), т. е. при $t \geq t_0$ справедливо равенство $\dot{x}(t,t_0,\varphi_0) = F(t,x_t(t_0,\varphi_0))$; 2) $x_{t_0}(t_0,\varphi_0) = \varphi_0$. Отображение $\varphi_0\colon [-h;0] \to \mathbb{R}^n$ называется предысторией этого решения. Далее будем предполагать, что для непрерывного отображения $F(t,\varphi)$ выполнено локальное условие Липшица по переменной φ.

Производная непрерывного функционала $V\colon \mathbb{R}^+ \times C([-h;0],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ в силу уравнения (1) определяется как отображение $\dot{V}\colon \mathbb{R}^+ \times C([-h;0],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, задаваемое по

формуле $\dot{V}(t,\varphi)=\overline{\lim}_{\delta\to+0}\{(V(t+\delta,x_{t+\delta}(t,\varphi))-V(t,\varphi))/\delta\}$, где $x_\tau(t,\varphi)$ – h-траектория решения $x(\tau,t,\varphi)$ уравнения (1).

Далее для любой точки $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$, и любого целого $1\leq k\leq n$, будем использовать обозначение $y=(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k$. Кроме того, для любого отображения $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)\in C([-h;0],\mathbb{R}^n)$ и любого целого $1\leq k\leq n$, будем использовать обозначение $\varphi^{(k)}=(\varphi_1,\dots,\varphi_k)\in C([-h;0],\mathbb{R}^k)$. Наконец, для любого решения $x(t,t_0,\varphi_0)$ уравнения (1) семейство отображений $y_t\colon[-h;0]\to\mathbb{R}^n$, где $y_t(t_0,\varphi_0)=x_t(t_0,\varphi_0)^{(k)}$, будем называть y-h-траекторией решения $x(t,t_0,\varphi_0)$.

Следующее определение является аналогом соответствующего определения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1]–[3].

Определение 1. Будем говорить, что решения (имеется в виду все решения) уравнения (1) равномерно ограничены по части переменных $y=(x_1,\dots,x_k)$ с частичным контролем предысторий $\varphi_0^{(k)}=((\varphi_0)_1,\dots,(\varphi_0)_k)\in C([-h;0],\mathbb{R}^k)$, $1\leq k\leq n$, или, более кратко, равномерно y-ограничены с $\varphi_0^{(k)}$-контролем, если для любого $\alpha\geq 0$ существует такое число $\beta=\beta(\alpha)>\alpha$, что для y-h-траектории $y_t(t_0,\varphi_0)$ каждого решения $x(t,t_0,\varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0, удовлетворяющей условию $\left\|\varphi_0^{(k)}\right\|\leq\alpha$, справедливо для всех $t\geq t_0$ неравенство $\|y_t(t_0,\varphi_0)\|\leq\beta$. При $k=n$ это определение становится определением [4] равномерной ограниченности решений уравнения (1).

Далее для произвольных функций $a(r)$ и $b(r)$, где $r\in\mathbb{R}^+$, будем использовать запись $a(r)\in K$ и $b(r)\in K$, если эти функции удовлетворяют, соответственно, следующим требованиям: 1) функция $a(r)\geq 0$ является неубывающей; 2) функция $b(r)\geq 0$ является неубывающей функцией, для которой выполнено условие $b(r)\to+\infty$ при $r\to+\infty$. Кроме того, далее для каждого числа $R_0>0$ и любого целого $1\leq k\leq n$ будем через $C^{(k)}(R_0)$ обозначать подмножество $\{\varphi\in C([-h;0],\mathbb{R}^n)\,|\,\left\|\varphi^{(k)}\right\|\geq R_0\}$ множества $C([-h;0],\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1. Предположим, что для уравнения (1) существуют непрерывный функционал $V\colon\mathbb{R}^+\times C([-h;0],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ (функционал Ляпунова-Красовского), функции $b(r)\in K$, $a(r)\in K$, число $R_0>0$ и целое число $1\leq k\leq n$, для которых выполнены следующие условия: 1) для любых $(t,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times C^{(k)}(R_0)$ справедливо двойное неравенство $b(\left\|\varphi^{(k)}(0)\right\|)\leq V(t,\varphi)\leq a(\left\|\varphi^{(k)}\right\|)$; 2) для любых $(t,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times C^{(k)}(R_0)$ справедливо неравенство $\dot{V}(t,\varphi)\leq 0$. Тогда решения уравнения (1) равномерно y-ограничены с $\varphi_0^{(k)}$-контролем.

При $k=n$ теорема 1 становится достаточным условием [4] равномерной ограниченности решений уравнения (1).

Следующее определение является аналогом соответствующего определения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [5], [3], [2].

Определение 2. Будем говорить, что решения (имеется в виду все решения) уравнения (1) равномерно ограничены в пределе по части переменных $y=(x_1,\dots,x_k)$, $1\leq k\leq n$, с частичным контролем предысторий $\varphi_0^{(k)}\in C([-h;0],\mathbb{R}^k)$ или, более кратко, равномерно y-ограничены в пределе с $\varphi_0^{(k)}$-контролем, если для этого уравнения найдется такое число $B>0$, и для любого $\alpha\geq 0$ существует такое число $T=T(\alpha)\geq 0$, что для y-h-траектории $y_t(t_0,\varphi_0)$ каждого решения $x(t,t_0,\varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0, удовлетворяющей условию $\left\|\varphi_0^{(k)}\right\|\leq\alpha$, справедливо неравенство $\|y_t(t_0,\varphi_0)\|<B$ для всех $t\geq t_0+T$. При $k=n$ это определение становится определением [4] равномерной ограниченности в пределе решений уравнения (1).

Далее для произвольного фиксированного числа $R_0>0$ и любой непрерывной функции $c(r)$, где $r\in\mathbb{R}^+$, будем использовать запись $c(r)\in K(R_0)$, если для этой функции выполнено условие $c(r)>0$ при $r>R_0$. Кроме того, далее для произвольного отображения $F\colon\mathbb{R}^+\times C([-h;0],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$ будем использовать запись $F(t,\varphi)\in\Psi_\alpha$, если для любого $\alpha\geq 0$

существует такое число $P = P(\alpha) \geq 0$, что всех $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n)$, где $0 \leq t \leq \alpha$ и $\|\varphi\| \leq \alpha$, выполнено условие $\|F(t, \varphi)\| \leq P$.

Теорема 2. Решения уравнения (1), правая часть $F(t, x_t)$ которого удовлетворяет условию $F(t, \varphi) \in \Psi_\alpha$, равномерно y-ограничены с $\varphi_0^{(k)}$-контролем и равномерной y-ограничены в пределе с $\varphi_0^{(k)}$-контролем тогда и только тогда, когда существуют непрерывный функционал $V: \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ (функционал Ляпунова-Красовского), число $R_0 > 0$ и функции $b(r) \in K$, $a(r) \in K$, $c(r) \in K(R_0)$, для которых выполнены следующие условия: 1) для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C^{(k)}(R_0)$ справедливо двойное неравенство $b(\|\varphi^{(k)}(0)\|) \leq V(t, \varphi) \leq a(\|\varphi^{(k)}\|)$; 2) для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C^{(k)}(R_0)$ справедливо неравенство $\dot{V}(t, \varphi) \leq -c(\| \varphi^{(k)}(0) \|)$.

Полученный критерий (теорема 2) при $k = n$ становится [4] критерием равномерной ограниченности и равномерной ограниченности в пределе решений уравнения (1).

Исследование выполнено за счет гранта РНФ (проект № 25-21-00830).

Список литературы

1. Лапин К.С. Частичная равномерная ограниченность решений систем дифференциальных уравнений с частично контролируемыми начальными условиями // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 3. – С. 309–316.
2. Yoshizawa T. Liapunovs function and boundedness of solutions // Funkcialaj Ekvacioj. 1959, V. 2. – P. 95–142.
3. Ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений. – Саранск: РИЦ МГПУ, 2022.
4. Yoshizawa T. Stability Theory by Liapunov's Second Method. Publications of the Mathematical Society of Japan 9, Math. Soc. of Japan, Tokyo, 1966. – 223 pp.
5. Лапин К.С. Ограниченность в пределе решений систем дифференциальных уравнений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, №:10. – С. 1281–1286.

УДК 57.087 (публикация отозвана 22.09.2026)

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА РАСЧЕТА СЕРДЕЧНОГО РИТМА

Лорсанова З.М.,
старший преподаватель кафедры
«Прикладная математика и компьютерные технологии»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: lorsanova.zarina@mail.ru
Эдиев Б.Р.,
студент 5 курса направления «Прикладная математика и информатика»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»

Аннотация. *В работе рассматривается задача разработки эффективного алгоритма расчета сердечного ритма на основе анализа электрокардиографического сигнала. Предлагаемый алгоритм включает этапы предварительной фильтрации, детекции R-пиков с использованием адаптивного порогового метода и вычисления ключевых показателей вариабельности сердечного ритма. Алгоритм демонстрирует устойчивость к различным типам шумов и артефактов, характерных для реальных записей ЭКГ.*
Ключевые слова: *вариабельность сердечного ритма, электрокардиограмма, алгоритм детекции R-пиков, цифровая обработка сигналов, искусственный интеллект, анализ биомедицинских данных.*

DEVELOPMENT OF A HEART RATE CALCULATION ALGORITHM

Lorsanova Z. M.,
Senior Lecturer of the Department of Applied Mathematics and Computer Technologies
Kadyrov Chechen State University
Ediev B.R.,
5th-year student majoring in Applied Mathematics and Computer Science
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *The paper addresses the problem of developing an effective algorithm for heart rate calculation based on electrocardiographic signal analysis. The proposed algorithm includes stages of preliminary filtering, R-peak detection using an adaptive threshold method, and calculation of key heart rate variability parameters. The algorithm shows robustness against various types of noise and artifacts typical of real ECG recordings.*
Keywords: *heart rate variability, electrocardiogram, R-peak detection algorithm, digital signal processing, artificial intelligence, biomedical data analysis.*

Сердечно-сосудистые заболевания остаются одной из основных причин смертности населения во всем мире. Согласно данным Всемирной организации здравоохранения, ежегодно от заболеваний сердца и сосудов умирает около 17,9 миллиона человек, что составляет 31% от всех случаев смерти в мире. В связи с этим ранняя диагностика и непрерывный мониторинг состояния сердечно-сосудистой системы приобретают особую актуальность.

Электрокардиография является наиболее распространенным и информативным методом оценки функционального состояния сердца. Электрокардиограмма (ЭКГ) представляет собой графическую регистрацию электрической активности сердца и позволяет выявить различные нарушения сердечного ритма, ишемические изменения, а также другие патологии. Однако визуальный анализ длительных записей ЭКГ требует значительных временных затрат и высокой квалификации специалиста, что создает потребность в разработке автоматизированных систем обработки кардиосигналов [4, 5].

Вариабельность сердечного ритма (ВСР) – это физиологический феномен, отражающий изменение продолжительности интервалов между последовательными сердечными сокращениями. Анализ ВСР позволяет оценить состояние вегетативной нервной системы, адаптационные возможности организма, а также прогнозировать риск развития

опасных аритмий. Основой для расчета показателей ВСР служит точное определение моментов R-зубцов на ЭКГ, так как R-зубец является наиболее выраженным элементом кардиокомплекса [5].

Несмотря на большое количество существующих алгоритмов детекции R-пиков, многие из них демонстрируют снижение точности при наличии шумов различной природы: мышечных артефактов, сетевых наводок, дрейфа изолинии, а также при регистрации ЭКГ у пациентов с выраженными нарушениями ритма. Это обусловливает необходимость разработки алгоритмов, обладающих высокой устойчивостью к помехам и применимых в реальных клинических условиях, в том числе при использовании портативных кардиомониторов.

Разработан и программно реализован алгоритм расчета сердечного ритма, обеспечивающий высокую точность детекции R-пиков при обработке ЭКГ-сигналов, содержащих различные типы артефактов, а также вычисления основных показателей вариабельности сердечного ритма для последующей интерпретации состояния пациента.

Для разработки и верификации алгоритма использовались записи ЭКГ из общедоступных баз данных, являющихся стандартом для тестирования алгоритмов обработки кардиосигналов:

1. MIT-BIH Arrhythmia Database. Записи включают широкий спектр нарушений сердечного ритма, что делает данную базу наиболее авторитетной для оценки алгоритмов детекции QRS-комплексов [1].
2. QT Database. База используется для оценки точности детекции не только R-пиков, но и других элементов кардиокомплекса.
3. Синтезированные сигналы – для оценки устойчивости алгоритма к шумам использовались сигналы, сгенерированные с помощью модели динамической системы, описывающей электрическую активность сердца, с последующим добавлением аддитивного гауссовского шума и мышечных артефактов.

Предлагаемый алгоритм обработки ЭКГ включает последовательность этапов. Каждый этап реализован с учетом специфики кардиосигналов и требований к вычислительной эффективности.

Этап 1. Предварительная фильтрация. Исходный ЭКГ-сигнал содержит значительное количество помех.

Этап 2. Выделение QRS-комплексов. После фильтрации сигнал подвергается преобразованию, направленному на усиление QRS-комплексов относительно остальных компонентов ЭКГ.

Этап 3. Адаптивная пороговая детекция R-пиков. Для выделения положений R-пиков используется метод адаптивного порога, который динамически изменяется в зависимости от текущей амплитуды сигнала.

Этап 4. Вычисление показателей вариабельности сердечного ритма. На основе последовательности RR-интервалов (временных промежутков между соседними R-пиками) рассчитываются как временные, так и спектральные показатели ВСР.

Полученные результаты демонстрируют, что разработанный алгоритм обладает высокой точностью детекции R-пиков, сопоставимой с лучшими современными методами, включая алгоритмы на основе нейронных сетей. Особенностью разработанного подхода является адаптивный механизм пороговой обработки, который обеспечивает устойчивость к изменениям амплитуды сигнала, что критически важно при анализе длительных записей, где амплитуда QRS-комплексов может изменяться вследствие движения пациента или изменения положения электродов. Кроме того, перспективным направлением является адаптация алгоритма для работы с данными, получаемыми с носимых устройств (фитнес-трекеров, смарт-часов), которые характеризуются более низким качеством сигнала и наличием специфических артефактов, связанных с движением. В результате разработан и программно реализован алгоритм расчета сердечного ритма на основе анализа электрокардиографического сигнала. Алгоритм включает этапы фильтрации, детекции R-пиков с использованием

адаптивного порога и вычисления временных и спектральных показателей вариабельности сердечного ритма. Алгоритм демонстрирует устойчивость к основным типам помех, характерным для реальных записей ЭКГ.

Список литературы

1. Баевский Р.М., Иванов Г.Г. Вариабельность сердечного ритма: теоретические аспекты и возможности клинического применения // Ультразвуковая и функциональная диагностика. 2021. № 3. – С. 108–127.
2. Гайрабекова Т.И., Гайрабекова Ф.Р., Гараев М.Х. Алгоритм прогнозирования и диагностики развития инфаркта миокарда, Естественные и технические науки. 2023. № 4 (179). – С. 121–125.
3. Гайрабекова Т.И., Гараев М.Х. Прогнозирование и диагностика развития инфаркта миокарда., Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2022660706, 08.06.2022. Заявка № 2022619987 от 30.05.2022.
4. Макаров Л.М., Комолятова В.Н. Национальные рекомендации по применению методики холтеровского мониторирования в клинической практике // Российский кардиологический журнал. 2020. Т. 25. № 4. – С. 45–52.
5. Шляхто Е.В., Конради А.О. Применение методов анализа вариабельности сердечного ритма в кардиологии // Кардиология. 2019. Т. 59. № 3. – С. 4–12.

УДК 51.74

ВЛИЯНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ И АСИНХРОННОСТИ ВРАЩЕНИЯ КОЛЕС НА ПРОХОДИМОСТЬ МОБИЛЬНОГО УСТРОЙСТВА С КОЛЕСНО-ШАГАЮЩИМ МЕХАНИЗМОМ

Магомедов И.А.,
старший преподаватель кафедры «Бизнес-информатика»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: ismwork@mail.ru
Матыгов М.М.,
ассистент кафедры «Программирование и инфокоммуникационные технологии»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: matygov.movsar@gmail.com
Тахаев У.Р.,
эксперт Центра цифровых трансформаций программы «Приоритет – 2036»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: takhaev.usam@bk.ru

Аннотация. *В данной работе рассматривается мобильное устройство с колесно-шагающим механизмом для преодоления различных препятствий. Акцент делается на коэффициенте трения и на асинхронности вращения разных колес. Результаты показали, что хорошее сцепление при подъеме на ступеньки повышает расстояние продвижения мобильного устройства. Однако стабильность конструкции варьировалась при увеличении коэффициента трения покоя и динамических колебаний. Результаты анализа скорости показали, что даже маленькое расхождение скорости между передними и задними колесами негативно влияет на продвижение.*
Ключевые слова: *мобильные роботы, колесно-шагающий механизм, коэффициент трения.*

THE INFLUENCE OF THE COEFFICIENT OF FRICTION AND THE ASYNCHRONY OF WHEEL ROTATION ON THE CROSS-COUNTRY ABILITY OF A MOBILE DEVICE WITH A WHEELED WALKING MECHANISM

Magomedov I.A.,
senior Lecturer of the Department of Business Informatics
Kadyrov Chechen State University
Matygov M.M.,
assistant Professor at the Department of Programming and Infocommunication Technologies
Kadyrov Chechen State University
Takhaev U.R.,
expert of the Digital Transformation Center of the «Priority – 2036» Program
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *This paper examines a mobile device with wheel-leg mechanism for climbing various obstacles. The study focuses on the coefficient of friction and the asynchronous rotation of the wheels, and how these parameters affect propulsion and stability. The results showed that good traction when climbing steps increases the propulsion distance of the mobile device. However, the stability of the structure varied with increasing coefficients of static and sliding friction. The speed results showed that even a small speed discrepancy between the front and rear wheels negatively impacts propulsion.*
Keywords: *mobile robots, wheeled walking mechanism, coefficient of friction, static friction.*

Введение. Мобильные роботы с развитием искусственного интеллекта и прогресса в целом стали все больше применяться в разных отраслях. Сегодня роботы применяются не только в производственных отраслях, но и в секторах здравоохранения, развлечений, образования и т. д. В данной статье будет рассмотрено адаптивное колесо, которое применяется для передвижения в средах со сложной и изменчивой поверхностью. Будут проанализированы значения скорости и коэффициента трения с точки зрения продвижения

мобильного устройства через лестницу. А именно, как повлияют значения коэффициента трения и скорости на дистанцию и стабильность.

Адаптивные колеса используются в различных сферах, их внешний вид и механика зависят от целей использования. Есть раскрывающиеся колеса, которые можно посмотреть в работах [1, 2, 3]. Особенностью таких колес является способность менять форму в зависимости от препятствий. Например, при прохождении по ровной поверхности колесо имеет классический вид. А при необходимости, к примеру, подняться по лестнице, преодолеть бордюр или справиться с другими индустриальными препятствиями, колесо меняет свою форму на шаговую. Есть механизмы, которые не меняют форму, но используют другие подходы, например, как в работах [4, 5, 6]. Есть работы [7], в которых сразу используют ножные колеса. Такие системы хорошо справляются с неровными местностями, но хуже работают на ровных поверхностях.

Методология. В данной работе будет построено мобильное устройство с колесно-шагающим механизмом для прохождения по лестнице. Инженерная программа SolidWorks будет использована для моделирования деталей, сборки и анализа. На рисунке 3 можно увидеть само мобильное устройство и препятствие, которое оно должно преодолеть. Следующие граничные условия были использованы: фиксация лестницы по всем координатам, добавлена гравитация, всем четырем колесам заданы моторы со значением 16 оборотов в минуту.

Коэффициенты трения покоя и скольжения между ножками колеса и поверхностью лестницы были заданы и изменялись для анализа их влияния на проходимость и стабильность. После анализа коэффициентов трения был проведен дополнительный анализ, в котором рассматривалась асинхронность скоростей вращения. Например, для передних колес задавалось 16 об/мин, а для задних – 15 об/мин.

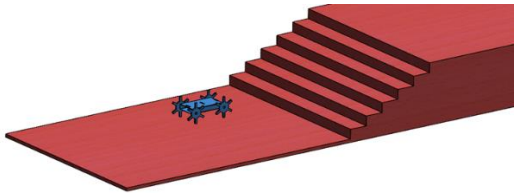

Рис. 3. *Мобильное устройство и препятствие*

Результаты. Анализ изменения коэффициента трения скольжения показал, что при увеличении значения с 0,55 до 0,7 наблюдается увеличение пройденного расстояния за 15 секунд. При этом стоит заметить, что значение коэффициента трения покоя не менялось и составляло 0,7. После этого коэффициент трения скольжения оставили неизменным, а меняли значения коэффициента трения покоя с 0,7 до 0,55. Результаты показали, что длина пути незначительно сократилась. Результаты при равных значениях коэффициентов трения скольжения и покоя были также проанализированы. Значения 0,55 коэффициента трения скольжения и покоя показали, что мобильное устройство переместилось на 1998 мм, а при значении 0,6 перемещение увеличилось до 2103 мм и т. д. Значения угловой и полной кинетической энергии варьируются по-разному при изменении коэффициентов трения скольжения и покоя. Наилучший результат был выявлен в диапазоне значений 0,65–0,7 коэффициента трения скольжения и покоя. Анализ асинхронности показал, что даже незначительные расхождения в скорости вращения задних и передних колес приводят к значительному сокращению пройденного расстояния. Наиболее стабильное прохождение было зафиксировано при втором анализе. Наименее стабильное прохождение наблюдалось при анализе 12.

Таблица 1.

Результаты исследования

№	Пройдённое расстояние (мм)	Коэффициента трения скольжения	Коэффициента трения покоя	Скорость (об в мин.) передние колеса	Скорость (об в мин.) задние колеса
1	2103	0,55	0,7	16	16
2	2101	0,6	0,7	16	16
3	2109	0,65	0,7	16	16
4	2110	0,7	0,7	16	16
5	2109	0,7	0,65	16	16
6	2108	0,7	0,6	16	16
7	2107	0,7	0,55	16	16
8	1998	0,55	0,55	16	16
9	2103	0,6	0,6	16	16
10	2109	0,65	0,65	16	16
11	2003	0,7	0,7	16	15,5
12	1896	0,7	0,7	16	15

Заключение. В результате проведенного анализа было установлено, что увеличение коэффициента трения положительно влияет на проходимость мобильного устройства при движении по препятствиям. Также было выявлено, что даже незначительная асинхронность скорости вращения передних и задних колес приводит к снижению эффективности продвижения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ) в рамках научного проекта № 25-29-01305.

Список литературы

1. R. Woolley, J. Timmis, and A. M. Tyrrell, «Cylindabot: Transformable Wheg robot traversing stepped and sloped environments», Robotics, vol. 10, no. 3, p. 104, 2021, doi: 10.3390/robotics10030104.
2. Won, J., Ryu, S., Kim, S. et al. Design optimization of a linkage-based 2-DOF wheel mechanism for stable step climbing. Sci Rep 12, 16912 (2022). https://doi.org/10.1038/s41598-022-21410-1
3. Z. Fu, H. Xu, Y. Li, et al., «Design of a novel wheel-legged robot with rim shape changeable wheels», Chin. J. Mech. Eng., vol. 36, p. 153, 2023, doi: 10.1186/s10033-023-00974-7.
4. Sasaki, Kai et al. «Step-climbing wheelchair with lever propelled rotary legs». 2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS) (2015): 6354-6359. DOI:10.1109/IROS.2015.7354285
5. Y. Cho et al., «Design of Stair-Climbing Electric Wheelchair With Tri-Spoke Wheel and Supporting Leg», in IEEE Access, vol. 12, pp. 31853-31861, 2024, doi: 10.1109/ACCESS.2024.3371017
6. Sasaki, Kai et al. «A wheelchair with lever propulsion control for climbing up and down stairs». 2016. 38th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC) (2016): 3358-3361. DOI:10.1109/EMBC.2016.7591447.
7. Ordoñez-Avila, J.L., Moreno, H.A., Perdomo, M.E., Calderón, I.G.C. Designing Legged Wheels for Stair Climbing. Symmetry 2023, 15, 2071. https://doi.org/10.3390/sym15112071

УДК 004.62

АНАЛИЗ СОВРЕМЕННЫХ СТРАТЕГИЙ КЭШИРОВАНИЯ В ВЕБ-API: ОТ СТАТИЧЕСКИХ ПРАВИЛ К ПРЕДИКТИВНЫМ МОДЕЛЯМ

Мадаев С.М.,
магистрант 1 курса направления «Информатика и вычислительная техника»
Института математики, физики и информационных технологий
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
Исраилов Р.Ю.,
канд. техн. наук, доцент кафедры «Программирование и инфокоммуникационные технологии»
Института математики, физики и информационных технологий
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: israilov_ramzan@mail.ru

Аннотация. *В работе представлен анализ эволюции стратегий кэширования, применяемых в современных веб-API. Рассмотрены классические статические алгоритмы, включая LRU (Least Recently Used), LFU (Least Frequently Used) и их вариации, а также выявлены их ограничения в условиях высоких нагрузок и динамически изменяющихся паттернов доступа. Особое внимание уделено переходу к адаптивным и предиктивным моделям, использующим методы машинного обучения для прогнозирования востребованности данных. Систематизированы основные проблемы согласованности данных в распределенных системах и предложена классификация современных подходов к их решению.*
Ключевые слова: *кэширование, веб-API, алгоритмы вытеснения, LRU, LFU, машинное обучение.*

ANALYSIS OF MODERN CACHING STRATEGIES IN WEB APIs: FROM STATIC RULES TO PREDICTIVE MODELS

Madaev S.M.,
Master's Student, 1st year Field of study «Computer Science and Computer Engineering»
Department of «Programming and Infocommunication Technologies»
Institute of Mathematics, Physics and Information Technologies
Kadyrov Chechen State University
Israilov R.Yu.,
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the
Department of «Programming and Infocommunication Technologies»
Institute of Mathematics, Physics and Information Technologies
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *The paper presents analysis of the evolution of caching strategies used in modern web APIs. Classical static algorithms, including LRU, LFU, and their variations, are examined, and their limitations under high-load conditions and dynamically changing access patterns are identified. Special attention is paid to the transition towards adaptive and predictive models that employ machine learning techniques for forecasting data demand. The main problems of data consistency in distributed systems are systematized, and a classification of modern approaches to solving these problems is proposed.*
Keywords: *caching, web API, eviction algorithms, LRU, LFU, machine learning.*

Современная архитектура веб-приложений немыслима без эффективного управления данными, и одним из ключевых механизмов, обеспечивающих высокую производительность и масштабируемость веб-API, является кэширование. Суть данного подхода заключается в сохранении часто запрашиваемых данных в промежуточном хранилище с быстрым доступом, что позволяет сократить время ответа сервера и снизить нагрузку на нижележащие уровни системы, такие как базы данных или внешние сервисы. Актуальность темы исследования обусловлена экспоненциальным ростом объемов передаваемых данных и ужесточением требований к скорости отклика веб-сервисов. Согласно многочисленным наблюдениям,

задержки даже в несколько сотен миллисекунд могут приводить к существенному снижению пользовательской удовлетворенности и, как следствие, к экономическим потерям для бизнеса. Таким образом, выбор адекватной стратегии кэширования превращается в критически важную инженерную задачу, требующую глубокого понимания как классических алгоритмов, так и современных интеллектуальных подходов [3].

На начальных этапах развития технологий разработчики полагались преимущественно на статические правила, которые были просты в реализации, но не обладали гибкостью, необходимой для работы в условиях динамически меняющейся нагрузки. Исторически первыми и наиболее широко распространенными подходами к управлению кэш-памятью стали алгоритмы, основанные на эвристиках, среди которых центральное место занимают алгоритмы семейства замещения страниц, адаптированные для кэширования данных в оперативной памяти. Наиболее известным представителем данного семейства является алгоритм LRU (Least Recently Used), работа которого строится на предположении, что данные, не запрашивавшиеся длительное время, с высокой вероятностью не потребуются и в ближайшем будущем [2, 3].

Альтернативой LRU выступает алгоритм LFU (Least Frequently Used), который ориентируется не на давность, а на частоту обращений. Логика LFU заключается в том, что наиболее популярные данные должны оставаться в кэше как можно дольше, и при нехватке места удаляется элемент с наименьшим счетчиком обращений. Казалось бы, такой подход более рационален, однако на практике он сталкивается с серьезной проблемой так называемого загрязнения кэша: данные, которые были чрезвычайно популярны в прошлом, но утратили актуальность, продолжают занимать место, блокируя новые, потенциально востребованные элементы.

С развитием микросервисной архитектуры проблема кэширования приобрела новое измерение – многоуровневость, поскольку в современном веб-API данные могут кэшироваться на нескольких уровнях одновременно: на стороне клиента, на уровне CDN, на уровне балансировщика нагрузки, в самом приложении и на уровне базы данных. Такая иерархия, с одной стороны, позволяет максимально приблизить данные к потребителю, но с другой – порождает сложнейшую проблему согласованности, известную в литературе как cache coherence или cache invalidation. Каждая из этих стратегий имеет свою область применения: сквозная запись обеспечивает высокую согласованность, но увеличивает задержки на операцию записи, тогда как отложенная запись, напротив, очень быстра, но несет риск потери данных при сбое. Кроме того, в распределенных системах с репликацией данных добавляется проблема синхронизации между несколькими экземплярами кэша, и архитектор системы вынужден искать компромисс между производительностью и актуальностью данных, выбирая стратегию, соответствующую бизнес-требованиям конкретного сервиса [3].

Наиболее перспективным и активно развивающимся направлением в области управления кэшированием на сегодняшний день является применение методов машинного обучения для предсказания будущих запросов. Идея предиктивного кэширования заключается в том, чтобы не просто реагировать на уже произошедшие события, а прогнозировать, какие данные с высокой вероятностью понадобятся в ближайшее время, и загружать их в кэш превентивно. Для решения этой задачи используются различные классы моделей: регрессионные модели могут предсказывать вероятность обращения к конкретному объекту в заданный временной интервал, методы классификации позволяют отнести объект к категории «кэшируемый» или «некэшируемый». Особый интерес представляют модели на основе нейронных сетей, в частности рекуррентные нейронные сети, которые способны улавливать долговременные зависимости в последовательностях запросов. Отдельного внимания заслуживают работы, в которых предпринимаются попытки использовать рекуррентные нейронные сети (в частности, LSTM) для анализа последовательностей запросов [5]. Авторам действительно удается показать, что такие модели способны улавливать скрытые зависимости в трафике и в ряде сценариев предсказывать обращения точнее, чем классические алгоритмы.

Параллельно развивается и другое направление – анализ временных рядов. Нагрузка на веб-сервисы, как правило, не является случайной и часто подчиняется суточным или недельным циклам.

Предиктивные модели хороши, но они тяжелы и не всегда нужны там, где с задачей справляется простой LRU. Более реалистичным выглядит гибридный подход: например, базовая политика вытеснения (скажем, ARC) работает в штатном режиме, а нейросетевая модель подключается лишь тогда, когда нужно обработать аномалию или подготовиться к резкому скачку трафика. В таком сценарии ИИ выполняет роль «советника», который подсказывает, какие данные стоило бы подогреть заранее [1].

Интересно также присмотреться к методам обучения с подкреплением. Идея в том, чтобы агент сам искал оптимальную стратегию кэширования, получая награду за каждое удачное попадание в кэш. В теории это позволяет находить решения, которые неочевидны для разработчика и не выводятся напрямую из классических эвристик. Правда, на практике такие методы пока далеки от промышленного применения – слишком велика сложность обучения в реальном времени и риск нестабильного поведения.

Подводя итог, можно сказать, что область кэширования для веб-API сегодня переживает интересный переходный период. Классические алгоритмы, при всех их достоинствах, уже не всегда справляются с нагрузкой в распределенных системах, где трафик стал менее предсказуемым [4]. При этом просто взять и заменить их на «интеллектуальные» модели пока не получается – упираемся в вычислительные затраты и качество данных. Наиболее жизнеспособным вектором развития выглядят гибридные решения, которые пытаются взять лучшее от обеих сторон: скорость эвристик для рутины и прогностическую точность для сложных случаев. Дальнейшие исследования, вероятно, будут двигаться именно в этом направлении – в сторону поиска архитектур, позволяющих эффективно совмещать классику и машинное обучение в реальном времени.

Список литературы

1. Ait Oucheggou L., Battou A., Boukhobza J., Rubini S. QM-ARC: QoS-aware Multi-tier Adaptive Cache Replacement Strategy // Future Generation Computer Systems. 2025. Vol. 163. DOI: 10.1016/j.future.2024.107548.
2. Hasslinger G., Ntougias K., Hasslinger F., Hohlfeld O. Performance Analysis of Basic Web Caching Strategies (LFU, LRU, FIFO, ...) with Time-To-Live Data Validation // KuVS Fachgespräch – Würzburg Workshop on Modeling, Analysis and Simulation of Next-Generation Communication Networks 2023. 2023. – P. 5. DOI: 10.25972/OPUS-32204.
3. Кришнамурти Б., Рексфорд Дж. Web-протоколы. Теория и практика: HTTP/1.1, взаимодействие протоколов, кэширование, измерение трафика. – М.: БИНОМ, 2002. – 592 с.
4. Megiddo N., Modha D.S. ARC: A self-tuning, low overhead replacement cache // Proceedings of the 2nd USENIX Conference on File and Storage Technologies (FAST‘03). 2003. – P. 115–130.
5. Narayanan A., Verma S., Ramadan E., Parekh S. DeepCache: A deep learning based framework for content caching // Proceedings of the 2018 Workshop on Network Meets AI & ML (NetAI‘18). 2018. – P. 48–53.

УДК 517.91

О ВНУТРЕННЕКРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНОЙ ДЖРБАШЯНА – НЕРСЕСЯНА

Мажгихова М.Г.,
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН;
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: mazhgihova.madina@yandex.ru

Аннотация. *Для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с производной Джрбашяна – Нерсесяна исследована краевая задача с условиями, связывающими значение искомой функции на граничной точке со значениями во внутренних точках. Получено представление решения этой задачи, решение выписано в явном виде. Сформулирована теорема существования и единственности решения исследуемой задачи.*
Ключевые слова: *дифференциальное уравнение дробного порядка, производная Джрбашяна – Нерсесяна, внутреннекраевая задача.*

ON AN INTERNAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A DIFFERENTIAL EQUATION WITH THE DZHRBASHYAN – NERSESYAN DERIVATIVE

Mazhgikhova M.G.,
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *For a linear ordinary differential equation of fractional order with the Dzhrbashyan – Nersesyan derivative, a boundary value problem with conditions linking the value of the unknown function at a boundary point to its values at interior points is investigated. A representation of the solution to this problem is obtained, and the solution is written out explicitly. An existence and uniqueness theorem for the solution to this problem is formulated.*
Keywords: *fractional differential equation, Dzhrbashyan – Nersesyan derivative, boundary value problem.*

Рассмотрим уравнение

$$D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_n\}}u(t) - \lambda u(t) = f(t), \qquad (1)$$

где $0 < t < 1$, $D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_n\}}$ – дробный оператор Джрбашяна – Нерсесяна, ассоциированный с последовательностью $\{\gamma_0, \dots, \gamma_n\}$, $(0 < \gamma_k \leq 1)$, λ – произвольная постоянная, $f(t)$ – известная функция.

Производная Джрбашяна – Нерсесяна определяется соотношением [1]

$$D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_n\}}u(t) = D_{0t}^{\gamma_n-1}D_{0t}^{\gamma_{n-1}} \dots D_{0t}^{\gamma_0}u(t),$$

где $D_{0t}^{\gamma_k}$ – операторы дробного интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля [2, с.~9], и его порядок определяется как

$$\alpha = \rho_n - 1, \quad \text{где} \quad \rho_k = \sum_{s=0}^{k} \gamma_k\,, \qquad k = 0, \dots, n.$$

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u(t)$ *такую, что* $u(t) \in C(0,1) \cap L(0,1)$, $D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_k\}}u(t) \in AC[0,1]$, $k = \overline{0, n-1}$, *и удовлетворяющую уравнению (1) при всех* $0 < t < 1$.

В настоящей работе исследуется следующая задача*: найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*.

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_{\beta_i-1}\}} u(t) = a_i, \;\; i=\overline{1,p}, \\ \lim\limits_{t\to 1} D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_{\delta_j-1}\}} u(t) - \sum\limits_{l=1}^{m} b_{jl} \lim\limits_{t\to t_l} D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_{\delta_j-1}\}} u(t) = c_j, \;\; j=\overline{1,q}, \end{cases} \tag{2}$$

где $p+q=n, p,q\geq 1$, a_i, b_{jl}, c_j – заданные константы, β_i, δ_j – элементы множества $\{1,\dots,n\}$.

Теорема. *Пусть функция $f(t)\in C(0,1)$ и представима в виде дробного интеграла*

$$f(t) = D_{0t}^{\gamma_n-1} g(t), \qquad \text{где } g(t)\in L(0,1),$$

а также выполнено условие

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{q1} & A_{q2} & \dots & A_{qn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3}$$

Тогда решение задачи (1), (2) существует единственно и имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{p} a_i \,\mathrm{M}_{ii}\mathrm{t}^{\rho_{\beta_i-1}-1}\mathrm{E}_{\alpha,\rho_{\beta_i-1}}(\lambda \mathrm{t}^{\alpha}) + \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{q} c_j \sum_{s=1}^{n} \mathrm{t}^{\rho_{\beta_s-1}-1}\mathrm{E}_{\alpha,\rho_{\beta_s-1}}(\lambda \mathrm{t}^{\alpha})\mathrm{M}_{p+j,s} +$$

$$+\int_0^1 f(\xi)\left[H(t-\xi)(t-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\xi)^{\alpha}) - \frac{1}{\Delta}\sum_{s=1}^{n}\mathrm{t}^{\rho_{\beta_s-1}-1}\mathrm{E}_{\alpha,\rho_{\beta_s-1}}(\lambda \mathrm{t}^{\alpha})\sum_{j=1}^{q}\mathrm{M}_{p+j,s}\times\right.$$

$$\times\left((1-\xi)^{\alpha-\rho_{\delta_j-1}}E_{\alpha,\alpha-\rho_{\delta_j-1}+1}(\lambda(1-\xi)^{\alpha})\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{l=1}^{m} b_{jl}H(t_l-\xi)(t_l-\xi)^{\alpha-\rho_{\delta_j-1}}E_{\alpha,\alpha-\rho_{\delta_j-1}+1}(\lambda(t_l-\xi)^{\alpha})\right)\right]d\xi.$$

Здесь через M_{ij} обозначены алгебраические дополнения к элементам матрицы, соответствующей определителю (3), $E_{\alpha,\beta}(z)$ – функция типа Миттаг – Леффлера [3],

$$A_{js} = \begin{cases} \lambda E_{\alpha,\alpha+\rho_{\beta_s-1}-\rho_{\delta_j-1}+1}(\lambda) - \lambda\sum\limits_{l=1}^{m} b_{jl}\left[t^{\alpha+\rho_{\beta_s-1}-\rho_{\delta_j-1}}E_{\alpha,\alpha+\rho_{\beta_s-1}-\rho_{\delta_j-1}+1}(\lambda t^{\alpha})\right]_{t=t_l}, & s\in\overline{1,\delta_j-1}, \\ E_{\alpha,\rho_{\beta_s-1}-\rho_{\delta_j-1}+1}(\lambda) - \sum\limits_{l=1}^{m} b_{jl}\left[t^{\rho_{\beta_s-1}-\rho_{\delta_j-1}}E_{\alpha,\rho_{\beta_s-1}-\rho_{\delta_j-1}+1}(\lambda t^{\alpha})\right]_{t=t_l}, & s\in\overline{\delta_j,n}. \end{cases}$$

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект FEGS-2026-0004)

Список литературы

1. Джрбашян М.М. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. Акад. наук Арм. ССР. 1968. Т. 3, вып. 1. – С. 3–29.
2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М: Физматлит, 2003. 272 с.
3. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 672 с.

УДК 517.983.8

ТОЖДЕСТВО ЭЙЛЕРА, ПРИВОДЯЩЕЕ К ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ЭРДЕЙИ – КОБЕРА ОТ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Маковецкий В.И.,
старший научный сотрудник «Передовой инженерной школы»,
Сахалинский государственный университет
e-mail: makov-Viktor-Sakh@yandex.ru

Аннотация. *Тождество Эйлера является генератором дробных производных Эрдейи – Кобера для гипергеометрических функций. Частные варианты дробных производных порождают ряд классических тождеств для специальных функций.*
Ключевые слова: *преобразование Эйлера гипергеометрической функции, производная Эрдейи – Кобера, функция Куммера, цилиндрические функции, тождество Успенского.*

EULER'S IDENTITY LEADING TO THE FRACTIONAL DERIVATE OF ERDELYI – KOBER FROM HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

Makovetsky V.I.,
Senior Research Fellow, Advanced Engineering School
Sakhalin State University

Abstract. *Euler's identity is the generator of Erdélyi – Kober fractional derivatives for hypergeometric functions. Particular variants of these fractional derivatives generate a number of classical identities for special functions.*
Keywords: *Euler transform of the hypergeometric function, Erdélyi – Kober derivative, Kummer function, cylindrical functions, Uspensky identity.*

Обобщенная гипергеометрическая функция при $|\varsigma| < 1$ представляется сходящимся рядом [1]

$$ {}_{\cdot p}F_q\left(a_1,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q;\varsigma\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{((a_1)_k\dots(a_p)_k)}{((b_1)_k\dots(b_q)_k)}\frac{\zeta^k}{k!};\quad (a)_k=\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}; \qquad (1)$$

где $(a)_k$ – символ Похгаммера, определяемый через гамма-функцию Γ(°). Почленное интегрирование указанного ряда приводит к преобразованию Эйлера [2]

$$ {}_{\cdot p+1}F_{q+1}\left(a_1,\dots,a_p,c;b_1,\dots,b_q,d;\ \gamma z\right)= $$
$$ =\frac{\Gamma(d)}{\Gamma(c)\Gamma(d-c)}\int_0^1\xi^{c-1}(1-\xi)^{d-c-1}\,{}_{\cdot p}F_q\left(a_1,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q;\ \gamma z\xi\right)d\xi \qquad (2)$$

Линейная замена переменной η = z*ξ порождает равенство

$$ z^{d-1}\,{}_{\cdot p+1}F_{q+1}\left(a_1,\dots,a_p,c;b_1,\dots,b_q,d;\ \gamma z\right)= $$
$$ =\frac{\Gamma(d)}{\Gamma(c)\Gamma(d-c)}\int_0^z\eta^{c-1}(z-\eta)^{d-c-1}\,{}_{\cdot p}F_q\left(a_1,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q;\ \gamma\eta\right)d\eta \qquad (3)$$

Понадобятся еще две замены – внешняя $z=x^{\sigma}$ и внутренняя – под интегралом $\eta=t^{\sigma}$. В результате из преобразования Эйлера возникает дробная производная Эрдейи – Кобера [3],[4] по отношению к гипергеометрической функции [5]

$$ x^{\sigma(d-1)}\,{}_{\cdot p+1}F_{q+1}\left(a_1,\dots,a_p,c;b_1,\dots,b_q,d;\ \gamma x^{\sigma}\right)= $$
$$ =\frac{\sigma\,\Gamma(d)}{\Gamma(c)\Gamma(d-c)}\int_0^x t^{\sigma c-1}(x^{\sigma}-t^{\sigma})^{d-c-1}\,{}_{\cdot p}F_q\left(a_1,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q;\ \gamma t^{\sigma}\right)dt \qquad (4)$$

Особый, но наиболее часто встречающийся, вариант соотношения (4) – это присутствие под интегралом функции Куммера

$$ x^{2(d-1)}\,{}_{\cdot 2}F_2\left(a,c;b,d;\delta\frac{x^2}{2}\right)= $$
$$ =\frac{2\,\Gamma(d)}{\Gamma(c)\Gamma(d-c)}\int_0^x t^{2c-1}(x^2-t^2)^{d-c-1}\,{}_{\cdot 1}F_1\left(a;b;\ \delta\frac{t^2}{2}\right)dt \qquad (5)$$

Интересным оказывается случай, при котором дробная производная Эрдеий – Кобера является автоморфизмом функции Куммера (при d = a)

$$x^{2(d-1)}\cdot_1 F_1\left(c,b;\delta\frac{x^2}{2}\right)=$$

$$=\frac{2\,\Gamma(d)}{\Gamma(c)\Gamma(d-c)}\int_0^x t^{2c-1}(x^2-t^2)^{d-c-1}\cdot_1 F_1\left(d;b;\ \delta\frac{t^2}{2}\right)dt \qquad (6)$$

Он легко устанавливается после применения определения гипергеометрической функции (1). Применим (6) для конструирования двух интересных тождеств. После изменения части констант для сопоставления с традиционной записью, получается

$$\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\nu)}{2\Gamma(\lambda+\nu)}x^{2(\lambda+\nu-1)}\cdot_1 F_1\left(\nu,\frac{1}{2};\frac{x^2}{2}\right)=$$

$$=\int_0^x t^{2\nu-1}(x^2-t^2)^{\lambda-1}\cdot_1 F_1\left(\lambda+\nu;b;\ \delta\frac{t^2}{2}\right)dt \qquad (7)$$

Существует несколько способов идентификации функций параболического цилиндра с отрицательным индексом [6]. Альтернативный подход связан с введением обозначение

$$D_{-\nu}(z)=\ e^{-\frac{z^2}{4}}\cdot_1 F_1\left(\frac{\nu}{2},\frac{1}{2};\frac{x^2}{2}\right) \qquad (8)$$

Нетрудно проверить, что представленная функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2D_{-\nu}(z)}{d\,z^2}+\frac{1}{4}(2-8\nu-z^2)D_{-\nu}(z)=0$$

и действительно является *функцией параболического цилиндра с отрицательным индексом.* При подстановке (8) в (7) возникает *тождество Бейтмена – Эрдейи для функций параболического цилиндра* [7, раздел 20.1]

$$\int_0^x t^{2\nu-1}(x^2-t^2)^{\lambda-1}e^{\frac{t^2}{2}}D_{-2(\lambda+\nu)}(t)\,dt=$$

$$=\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\nu)}{2\Gamma(\lambda+\nu)}x^{2(\lambda+\nu-1)}e^{\frac{x^2}{4}}D_{-2\nu}(x) \qquad (9)$$

Изменение индексов (λ, ν) в (7) приводит к множеству интересных результатов.

Тождество Успенского (James Victor Uspensky) записывается в виде [8, (10.13)][9]

$$2^{n+1}\Gamma(n+\alpha+1)\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}H_{2n}\left(\sqrt{x}t\right)dt=$$

$$=(-1)^n\sqrt{\pi}(2n)!\,\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)L_n^{\alpha}(x) \qquad (10)$$

Здесь $H_{2n}(^\circ)$ – многочлены Эрмита, $L_n^{\alpha}(^\circ)$ – обобщенные многочлены Лагерра. Представленное тождество сводится к равенству относительно дробной производной, вида

$$2^{n+1}(\alpha+n)!\int_0^x(x^2-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}H_{2n}\left(\frac{t}{\sqrt{x}}\right)dt=$$

$$(-1)^n\sqrt{\pi}(2n)!\,\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)x^{2\alpha}L_n^{\alpha}(x)$$

Доказательство тождества Успенского. В левой части (10) выполним замену $t\to xt$. После этого используются формулы связи многочленов Эрмита и Лагерра с функцией Куммера.

$$H_{2n}(z)=\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{(2n)!}{n!}\cdot_1 F_1\left(-n,\frac{1}{2};z^2\right)$$

$$L_n^{\alpha}(z)=\frac{(\alpha+n)!}{n!\,\alpha!}\cdot_1 F_1(-n,\alpha+1;z)$$

Доказательство завершается применением модификации равенства (7). Заметим, что тождество Эйлера применяли для вычисления дробной производной Капуто от элементарных функций [10], но дробная производная Эрдеий – Кобера и классические равенства Бейтмена – Эрдейи и Успенского не выводились. Значительное число ссылок на тождество Эйлера приведено в [11].

Список литературы

1. Дунаеев А.С., Шлычков В.И. Гипергеометрические функции. Уральский федеральный университет, 2017. – 1273 с.
2. Slater L.J. Generalized hypergeometric functions, London, Cambridge Univ. Press, 1966. – 273 pp.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск, «Наука и техника», 1987. – 688 с.
4. Уринов А.К., Ситник С.М., Шишкина Э.Л., Каримов Ш.Т. Дробные интегралы и производные (обобщения и приложения), изд-во «Фергана», 2022. – 195 с.
5. Sitnik S.M., Makovetsky V.I. Necessary Condition for the Existence of an Intertwining Operator and Classification of Transmutations on Its Basis // in. Kravchenko V.V., Sitnik S.M. Transmutation Operators and Applications, Springer Nature Switzerland AG 2020. – Pp. 171–191.
6. Лепе Н.Л. О функциях параболического цилиндра с целым отрицательным индексом // журнал Дифференц. уравнения, 21:11 (1985), 2001–2003.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. – Т. II. – М.: «Наука», 1970, – 325 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: «Наука», 1974 – 297 с.
9. Uspensky J. V. On the Development of Arbitrary Functions in Series of Hermite's and Laguerre's Polynomials, Annals of Mathematics, Vol. 28, No. 1/4 (1926–1927). – Pp. 593–619.
10. Shchedrin G., Smith N.C., Gladkina A., Carr L.D. Exact results for a fractional derivative of elementary functions // http://arxiv.org/abs/1711.07126v4, 20 Feb 2018. – 21 pp.
11. Kelly T., Voight J. Hypergeometric Motives from Euler Integral Representations // https://arxiv.org/abs/2412.03257v2, 20 Dec 2025. – 26 pp.

УДК 517

К ВОПРОСУ О РАЗБИЕНИИ ФИГУР НА РАВНЫЕ ЧАСТИ

Маркелов Ю.С.,
Высшая школа экономики
e-mail: yusmarkelov@edu.hse.ru
Садовничий А.Ю.,
Московский физико-технический институт

Аннотация. *В докладе рассматривается гипотеза, что при разбиении центрально-симметричной фигуры на две конгруэнтные части центр симметрии фигуры всегда лежит на общей границе двух частей. Основной результат состоит в доказательстве гипотезы для простых, но не обязательно выпуклых фигур на плоскости при условии, что фигура разбита на две части несамопересекающейся кривой.*
Ключевые слова*: центральная симметрия, выпуклость, разбиение на равные части.*

ON THE CUTTING SHAPES INTO EQUAL PARTS

Markelov Yu.S.,
student of the Higher School of Economics
Sadovnichii A.Yu.,
Moscow Institute of Physics and Technology

Abstract. *The talk discusses the hypothesis that when a centrally symmetrical figure is divided into two congruent parts, the center of symmetry of the figure always lies on the common border of the two parts. The main result is to prove the hypothesis for simple, but not necessarily convex shapes on a plane, provided that the shape is divided into two parts by a non-self-intersecting curve.*
Keywords: *central symmetry, convexity, division into equal parts.*

В данном докладе рассматривается разбиение центрально-симметричной фигуры на две конгруэнтные части, т. е. части, совмещаемые движением. Под разбиением понимается «геометрическое разбиение», при котором границы частей представляют собой непрерывные спрямляемые кривые: неформально говоря, фигура разрезается на кусочки «ножницами», и каждый получившийся кусочек принадлежит одной из частей. Под спрямляемой кривой имеется в виду кривая конечной длины. Впервые частный случай задачи, которой посвящена эта статья, был сформулирован в 1-м выпуске «Математического просвещения» [4]. В общем виде задача была предложена на заочном конкурсе Турнира Городов в 1999 году А.Я. Канель-Беловым и С.В. Маркеловым и в 27-м выпуске «Математического просвещения» [5].

Гипотеза (А. Канель-Белов – С. Маркелов). Если выпуклая ограниченная центрально-симметричная фигура в R^n разбита на две конгруэнтные части, то тогда центр симметрии фигуры лежит на общей границе двух частей.

Гипотеза доказана для простых, но не обязательно выпуклых фигур на плоскости при условии, что фигура разбита на две части несамопересекающейся кривой.

Также приведен контрпример при разбиении невыпуклой фигуры на плоскости на несвязные части и приведены контрпримеры к вариантам гипотезы в больших размерностях без условия выпуклости и в теоретико-множественном случае.

Список литературы

1. Садовничий А.Ю., Маркелов Ю.С. Задача о разрезании многоугольника на две конгруэнтные части // Математическое просвещение. Сер. 3. 2025. Вып. 35. – С. 217–228.
2. Маркелов Ю.С. О разбиении невыпуклых многоугольников на равные части // Математика. 2025. № 9 (сентябрь). – С. 47–50.
3. Kimmo Eriksson. «Splitting a Polygon into Two Congruent Pieces». В: The American Mathematical Monthly 103.5 (1996). – С. 393–400.

4. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Задача 1.5 // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 1. – М.: МЦНМО, 1997. – С. 194.
5. Канель-Белов А.Я., Маркелов С.В. Задача 1.50 // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 27. – М.: МЦНМО, 2021. – С. 237–238.

УДК 517

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ

Масаева О.Х.,
научный сотрудник отдела «Дробное исчисление»
Института прикладной математики и автоматизации,
Кабардино-Балкарский научный центр РАН
e-mail: olesya.masaeva@yandex.ru

Аннотация. *Рассмотрен аналог задачи Неймана для уравнения в частных производных второго порядка с производной Римана – Лиувилля порядка меньшего двух, но большего единицы. Обсуждаются вопросы доказательства существования и единственности решения задачи.*
Ключевые слова: *обобщенное уравнение Пуассона, оператор дробного дифференцирования Римана – Лиувилля.*

A SECOND BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE GENERALIZED POISSON EQUATION IN A QUARTER PLANE

Masaeva O.Kh.,
Researcher at the Fractional Calculus Department of the Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Center of RAS

Abstract. *An analog of the Neumann problem for a second-order partial differential equation with a Riemann-Liouville derivative of order less than two but greater than one is considered. The issues of proving the existence and uniqueness of a solution to a problem are discussed.*
Keywords: *Generalized Poisson equation, Riemann – Liouville fractional differentiation operator.*

В области $\Omega = \{(x, y): 0 < x < \infty, 0 < y < \infty\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x, y) + D_{0y}^{\beta} u(x, y) = f(x, y), \quad 1 < \beta < 2, \tag{1}$$

где D_{0y}^{β} – оператор дробного интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля порядка β [1],[2]:

$$D_{0y}^{s}\varphi(y) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^y (y - t)^{-s-1} \varphi(t) dt, \quad s < 0,$$

$$D_{0y}^{0}\varphi(y) = \varphi(y), \qquad s = 0,$$

$$D_{0y}^{s}\varphi(y) = \frac{\partial^n}{\partial y^n} D_{0y}^{s-n}\varphi(y), \qquad n - 1 < s \le n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Дифференциальные уравнения дробного порядка широко используются в математическом моделировании и в последние годы исследуются очень активно (см. [1]–[3] и др.)

В работе [4] исследована первая краевая задача для уравнения (1) с однородной правой частью. Построено общее представление решения и получены условия единственности.

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x, y)$: $y^{2-\beta} u \in C(\bar{\Omega}), u_x, D_{0y}^{\beta-1} u \in C(\bar{\Omega})$, $u_{xx}, D_{0y}^{\beta} u \in C(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках области Ω.

В данной работе для уравнения (1) рассматривается следующая краевая **задача.**
Найти в области Ω регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u_x(0, y) = 0, y > 0$$

$$\lim_{y \to 0} D_{0y}^{\beta-1} u(x, y) = \varphi(x), \quad x > 0,$$

где $\varphi(x)$ – заданная непрерывная функция на положительной полуоси $(0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект FEGS-2026-0004)

Список литературы

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
2. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. – М.: Наука, 2005. – 199 с.
3. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Артишок. – Ульяновск, 2008. – 512 с.
4. Масаева О.Х. Задача Дирихле в четверти плоскости для обобщенного уравнения Лапласа // Прикладная математика и физика. 2024. Т. 56, № 2. – С. 43–53.

УДК 517

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Махамуд А.А.,
аспирант кафедры «Прикладная математика и компьютерное моделирование»
ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный
исследовательский университет»
e-mail: 1269765@bsuedu.ru
Шишкина Э.Л.,
профессор кафедры «Математический и прикладной анализ»
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
e-mail: ilina_dico@mail.ru

Аннотация. *Рассматривается оператор* $P = \frac{1}{\omega(x)}\frac{d}{dx}\omega(x)\frac{d}{dx}$ *. Для этого оператора строится интегральное преобразование, переводящее оператор P в оператор умножения на* x^2 *с дополнительными слагаемыми. Такое преобразование позволяет решать дифференциальные и интегральные уравнения со степенями оператора P.*
Ключевые слова: *интегральное преобразование, оператор второго порядка с переменными коэффициентами, оператор Бесселя.*

ON AN INTEGRAL TRANSFORM FOR A SECOND-ORDER OPERATOR WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Mahamud A.A.,
Postgraduate student, Department of Applied Mathematics and Computer Modeling
Belgorod State National Research University
Shishkina E.L.,
Professor, Department of Mathematical and Applied Analysis
Voronezh State University

Abstract. *The operator* $P = \frac{1}{\omega(x)}\frac{d}{dx}\omega(x)\frac{d}{dx}$ *is considered. For this operator, an integral transform is constructed that maps the operator P into the multiplication operator by* x^2 *with additional terms. Such a transform makes it possible to solve differential and integral equations involving the powers of the operator P.*
Keywords: *integral transform, second-order operator with variable coefficients, Bessel operator.*

Пусть $I = (0, \ell)$, где $0 < \ell \leq \infty$ – заданный интервал на вещественной прямой, и пусть $\omega(x) > 0$ – неотрицательная, локально суммируемая на I весовая функция.

В работе рассматривается оператор второго порядка с переменными коэффициентами вида

$$P = \frac{1}{\omega(x)}\frac{d}{dx}\omega(x)\frac{d}{dx} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega'(x)}{\omega(x)}\frac{d}{dx}.$$

Этот оператор изучается в математической физике, спектральной теории, дифференциальной геометрии, а также в прикладной математике при моделировании распространения волн в неоднородных средах. Методы решения задач Штурма-Лиувилля с такими операторами изложены в [1, 2].

Обозначим через $L^{\mathrm{p}}_{\omega}(I)$ пространство всех измеримых функций f таких, что $|f(x)|^p\omega(x)\epsilon L^1\ (I)$, с нормой, заданной формулой:

$$||f||_{p,\omega} = \left(\int_0^{\ell} |f(x)|^p\ \omega(x)dx\right), \qquad 1 \leq p < \infty.$$

Пусть $f, g \in L^2_{\omega}(I)$ и дважды непрерывно дифференцируема на I. Для меры $\omega(x)dx$ и оператора $P = \frac{1}{\omega(x)}\frac{d}{dx}\omega(x)\frac{d}{dx}$ справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_0^{\ell} (Pf)(x)g(x)\,\omega(x)dx = \omega(x)\big(f'(x)g(x) - f(x)g'(x)\big)\big|_0^{\ell} + \int_0^{\ell} f(x)(Pg)(x)\omega(x)dx. \quad (1)$$

Построим интегральное преобразование вида

$$\mathrm{I}_{\omega}\{f(x)\}(\xi) = \int_0^{\infty} f(x)K(x,\xi)\,\omega(x)d\xi,$$

приспособленное для работы с оператором P. Для такого преобразования ядро $K(x,\xi)$ будет связано с оператором P равенством

$$(P_x K)(x,\xi) = \kappa\xi^2 K(x,\xi), \qquad \kappa \in \mathrm{R} \quad (2)$$

при условиях

$$\lim_{x\to 0+} \omega(x)K(x,\xi) = a_0(\xi), \quad \lim_{x\to 0+} \omega(x)K'_x(x,\xi) = a_1(\xi), \quad \lim_{x\to+\infty} \omega(x)K(x,\xi) = 0. \quad (3)$$

Для удобства обычно берут $\kappa = \pm 1$.

Теорема 1. *Пусть $f: R \to R$ – непрерывная функция, дважды дифференцируемая на любом отрезке вида $[0, A]$, такая, что*

$$\lim_{A\to+\infty} \omega(A)f(A)K'_x(x,\xi)|_{x=A} = 0, \qquad \lim_{A\to+\infty} \omega(A)f'(A)K(A,\xi) = 0, \quad (4)$$

и Pf является кусочно-непрерывной с односторонними пределами на любом указанном отрезке вида $[0, A]$. Тогда $I_{\omega}\{Pf(x)\}(\xi)$ существует и

$$\mathrm{I}_{\omega}\{Pf(x)\}(\xi) = \kappa\xi^2 \mathrm{I}_{\omega}\{f(x)\}(\xi) + a_1(\xi)f(+0) - a_0(\xi)f'(0+). \quad (5)$$

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{I}_{\omega}\{Pf(x)\}(\xi) = \int_0^{\infty} (Pf)(x)K(x,\xi)\,\omega(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} (Pf)(x)K(x,\xi)\,\omega(x)dx.$$

По условию теоремы Pf – кусочно-непрерывна и имеет односторонние пределы на $[0, A]$, следовательно Pf интегрируема, и интеграл $\int_0^A (Pf)(x)K(x,\xi)\,\omega(x)dx$ существует. Это означает, что можно применить формулу интегрирования по частям (1) и в силу (2)–(3) получить:

$$\int_0^A (Pf)(x)K(x,\xi)\,\omega(x)dx =$$
$$= \omega(x)(f'(x)K(x,\xi) - f(x)K'_x(x,\xi))|_{x=0}^{A} + \int_0^A f(x)(P_x K)(x,\xi)\,\omega(x)dx =$$
$$= \omega(x)(f'(x)K(x,\xi) - f(x)K'_x(x,\xi))|_{x=0}^{A} + \kappa\xi^2 \int_0^A f(x)K(x,\xi)\,\omega(x)dx.$$

Переходя к пределу при $A \to +\infty$, в силу (4), будем иметь (5).

Пример 1 *Самым хорошо изученным оператором вида $P = \frac{1}{\omega(x)}\frac{d}{dx}\omega(x)\frac{d}{dx}$ является оператор Бесселя $B_{\gamma} = \frac{1}{x^{\gamma}}\frac{d}{dx}x^{\gamma}\frac{d}{dx}$. В этом случае $\omega(x) = x^{\gamma}$, $\ell = +\infty$. При $\kappa = 1$, $a_0(\xi) = 0$, $a_1(\xi) = -2^{\frac{\gamma-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\xi^{\frac{1-\gamma}{2}}$ решение задачи (2)–(3)*

$$\begin{cases} \frac{1}{x^{\gamma}}\frac{d}{dx}x^{\gamma}\frac{d}{dx}K(x,\xi) = \xi^2 K(x,\xi), \qquad \kappa \in \mathrm{R}; \\ \lim\limits_{x\to 0+} x^{\gamma}K(x,\xi) = 0, \quad \lim\limits_{x\to 0+} x^{\gamma}K'_x(x,\xi) = -1, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\gamma}K(x,\xi) = 0. \end{cases}$$

имеет вид $K(x,\xi) = x^{\frac{1-\gamma}{2}}K_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)$, где $K_{\frac{\gamma-1}{2}}$ – модифицированная функция Бесселя второго рода. Действительно, учитывая асимптотическое поведение функции $K_{\frac{\gamma-1}{2}}$, при $\gamma > 1$, получим

$$\lim_{x\to 0+} x^{\gamma}\cdot x^{\frac{1-\gamma}{2}}K_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}{2^{1-\frac{\gamma-1}{2}}} \lim_{x\to 0+} x^{\frac{1+\gamma}{2}}(x\xi)^{-\frac{\gamma-1}{2}} = 0$$

При $0 < \gamma < 1$, используя $K_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) = K_{\frac{1-\gamma}{2}}(x\xi)$, будем иметь

$$\lim_{x\to+0} x^{\gamma}\cdot x^{\frac{1-\gamma}{2}}K_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) = \lim_{x\to+0} x^{\frac{1+\gamma}{2}}K_{\frac{1-\gamma}{2}}(x\xi) = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)}{2^{1-\frac{1-\gamma}{2}}} \lim_{x\to+0} x^{\frac{\gamma+1}{2}}(x\xi)^{-\frac{1-\gamma}{2}} = 0.$$

Наконец, при $\gamma = 1$, получим

$$\lim_{x\to+0} xK_0(x\xi) = -\lim_{x\to0+} x\left(\ln\frac{x\xi}{2} + \vartheta\right) = 0.$$

Кроме того, имеем

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\gamma}\cdot x^{\frac{1-\gamma}{2}}K_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{e^{-x\xi}}{\sqrt{x\xi}} = 0.$$

Теперь найдем производную,

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{1-\gamma}{2}}K_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) = -\xi x^{\frac{1-\gamma}{2}}K_{\frac{\gamma+1}{2}}(x\xi),$$

тогда при $\gamma > 0$

$$\lim_{x\to0+} x^{\gamma}\frac{d}{dx}x^{\frac{1-\gamma}{2}}K_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) = -\xi\lim_{x\to0+} x^{\frac{1+\gamma}{2}}K_{\frac{\gamma+1}{2}}(x\xi) = -\xi\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{2^{1-\frac{\gamma+1}{2}}}\lim_{x\to0+} x^{\frac{1+\gamma}{2}}(x\xi)^{-\frac{\gamma+1}{2}} =$$

$$-2^{\frac{\gamma-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\xi^{\frac{1-\gamma}{2}}.$$

Так построенное ядро порождает преобразование Мейера [3]

$$\mathrm{K}_{\gamma}[f](\xi) = \int_0^{\infty} x^{\frac{\gamma+1}{2}}K_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\,f(x)\,dx$$

для которого справедлива формула

$$\mathrm{K}_{\gamma}[B_{\gamma}f](\xi) = \xi^2\mathrm{K}_{\gamma}[f](\xi) - 2^{\frac{\gamma-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\xi^{\frac{1-\gamma}{2}}f(0+).$$

Исследование выполнено за счет гранта РНФ (проект № 25-21-00830).

Список литературы

1. Everitt W.N. A Catalogue of Sturm-Liouville Differential Equations // Amrein W.O., Hinz A.M., Pearson D.P. (eds) Sturm-Liouville Theory. Birkhäuser Basel. 2005. – P. 271–331. https://doi.org/10.1007/3-7643-7359-8_12
2. Kravchenko V.V. Direct and Inverse Sturm-Liouville Problems: A Method of Solution. Birkhäuser Cham. 2020. 154 p. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47849-0
3. Karimov S., Shishkina E. Existence and uniqueness of solutions to problem with fractional Bessel derivatives // Journal of Mathematical Sciences. 2025. https://doi.org/10.1007/s10958-025-08093-5

УДК 629.73

РОЛЬ И ВЛИЯНИЕ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА НА СОВРЕМЕННУЮ ЭКОНОМИКУ

Махмудова Т.Х.,
ассистент кафедры «Экономика и экономическая безопасность отраслей и предприятий»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: t.makhmudova96@bk.ru

Аннотация. *Данная статья посвящена вопросам, связанным с искусственным интеллектом, который с каждым днем внедряется в наше настоящее и будущее. Искусственный интеллект, на современном этапе развития рыночной экономики, играет важную роль. Действительно, технологии ИИ, которые внедряются все больше и больше, помогают работать с различными объемами данных, прогнозировать такие важные показатели, как спрос и предложение, повышать качество продукции и прочее.*
Ключевые слова: *искусственный интеллект, экономика, технологии, финансовый сектор.*

THE ROLE AND IMPACT OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE ON THE MODERN ECONOMY

Makhmudova T.Kh.,
Assistent, Department of Economics and Economic Security of Industries and Enterprises,
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *This article addresses issues related to artificial intelligence, which is becoming increasingly embedded in our present and future. Artificial intelligence plays a vital role in the current stage of market economic development. Indeed, AI technologies, which are being increasingly implemented every day, help us work with various volumes of data and forecast important indicators such as supply and demand, improving product quality, and more.*
Keywords: *artificial intelligence, economics, technology, financial sector.*

Сейчас экономика проходит через серьёзные изменения, во многом благодаря тому, что искусственный интеллект активно проникает в бизнес и производство. ИИ как направление в IT занимается созданием систем и программ, которые умеют работать с данными: анализировать их, извлекать полезную информацию и принимать решения на основе собственного «опыта» [1].

В этой статье мы на конкретных примерах разберём, как именно искусственный интеллект влияет на экономику, и обсудим главные плюсы и сложности, связанные с его внедрением. Искусственный интеллект сегодня заметно меняет самые разные отрасли.

В производстве, к примеру, роботы на базе ИИ берут на себя сложные задачи – это повышает и эффективность, и качество выпускаемой продукции.

В финансах с помощью ИИ анализируют рыночные данные и строят прогнозы, что помогает инвесторам принимать взвешенные решения.

Искусственный интеллект помогает справляться с такими объёмами данных, которые обычными методами уже не проанализировать, и находить в них скрытые связи. Для руководителей это возможность принимать более взвешенные и точные стратегические решения.

В медицине, например, алгоритмы ИИ анализируют симптомы и данные пациентов, что позволяет врачам выявлять заболевания на ранних стадиях.

В 2026 году ожидается, что ИИ будет влиять на экономику сразу по нескольким направлениям. Во-первых, речь идёт о комплексной автоматизации: нейросети всё активнее берут на себя анализ данных, управление физическими процессами и даже принятие решений, что особенно заметно в развитии робототехники. Кроме того, искусственный интеллект помогает «оцифровывать» то, что раньше оставалось за рамками экономики.

Например, человекоподобные роботы могут перевести неоплачиваемую домашнюю работу в рыночную плоскость. Меняются и ожидания клиентов: персонализированный подход становится стандартом, и обеспечить его в больших масштабах способен только ИИ. Сам искусственный интеллект превращается в основу для новых продуктов и услуг – от беспилотного транспорта и умных домов до персональных цифровых ассистентов.

В финансовом секторе нейросети всё чаще применяют для скоринга, борьбы с мошенничеством и оценки рисков. В ритейле и e-commerce крупные платформы уже строят на алгоритмах прогнозирование спроса, динамическое ценообразование, персонализированные рекомендации и управление логистикой. Но и здесь не обходится без сложностей и рисков. Во-первых, это острая борьба за кадры – специалистов по машинному обучению. Во-вторых, вопросы безопасности: с одной стороны, сами системы ИИ всё чаще оказываются под угрозой атак, с другой – они же могут использоваться для проведения сложных кибероперациий. И наконец, колоссальное энергопотребление: обучение больших моделей требует таких вычислительных мощностей, которые уже сейчас выходят на астрономический уровень [2].

Рассмотрим для примера таблицу 1, где предоставлены данные на 2026 год.

№ п/п	Показатель	Характеристика
1.	Цена вопроса: триллионная инфраструктура	Самая впечатляющая цифра этого года касается капитальных затрат. Согласно оценкам Morgan Stanley, глобальные капитальные расходы на инфраструктуру искусственного интеллекта – дата-центры, чипы, энергетическое обеспечение – достигнут $2,9 трлн в период с 2025 по 2028 год, и более 80% этой суммы еще предстоит освоить. Это не просто IT-бюджеты. Это промышленное строительство в масштабах, сопоставимых с крупнейшими инфраструктурными проектами в истории человечества.
2.	Meta, Amazon, Microsoft и Alphabet	В 2026 году только четыре технологических гиганта – Meta, Amazon, Microsoft и Alphabet – планируют потратить на эти цели до $670 млрд совокупно. Для сравнения: это около 2,1% ВВП США, что превышает затраты на лунную программу «Аполлон» в 1960–1970-х годах и строительство системы межштатных автомагистралей в пересчете на долю от экономики. Продолжение таблицы 1.
3.	Производительность и автоматизация: 40% задач под вопросом	С точки зрения микроэкономики, ключевая цифра 2026 года – это 40%. Согласно исследованию Альфа-Банка (со ссылкой на аналитику Big Ideas 2026), к концу года до 40% всех рабочих задач в развитых экономиках могут быть автоматизированы с помощью технологий искусственного интеллекта. Это уже не про «помощника в Excel», а про фундаментальную перестройку бизнес-процессов.

Примечание: составлено автором [3].

Сейчас мы как раз подходим к тому моменту, когда искусственный интеллект перестаёт быть просто инструментом и превращается в полноценного стратегического партнёра для бизнеса. Дальнейшее развитие экономики будет зависеть не только от новых технологий, но и от того, насколько компании и общество в целом смогут подстроиться под меняющиеся условия. ИИ открывает перед нами массу новых возможностей, и то, как мы научимся ими пользоваться и грамотно внедрять инновации, во многом определит будущий успех экономики. Согласно прогнозам, искусственный интеллект способен серьёзно изменить траекторию глобального экономического роста. Для сравнения: консенсус-прогноз МВФ оценивает ежегодный рост мировой экономики примерно в 3%. Но если сработает сценарий ускоренной технологической конвергенции, то уже к 2030 году этот показатель может достичь 7%.

Список литературы

1. Бутл Р. Искусственный интеллект и экономика / Р. Бутл. – Москва: Альпина PRO, 2023. – 422 с. ISBN 978-5-206-00065-8.
2. Бутл Р. Искусственный интеллект и экономика / Р. Бутл. – Москва: Интеллектуальная литература, 2020. – 426 с. (Библиотека Сбербанка). ISBN 978-5-907394-25-4.
3. Перез К.Э. Глубокое обучение искусственного интеллекта / К.Э. Перез. – Москва: Точка, 2019. – 384 с. (Айтеко). ISBN 978-5-6041116-3-5.
4. Боден М. Искусственный интеллект / М. Боден. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2025. – 180 с. (Summa Rerum). ISBN 978-5-222-33724-0.
5. Цзэн Мин. Как Alibaba использует искусственный интеллект в бизнесе / Цзэн Мин. – Москва: Альпина Паблишер, 2022. – 360 с. ISBN 978-5-9614-3322-7.

УДК 004.89

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ КАК КОГНИТИВНО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОСРЕДНИК В БИЗНЕС-АНАЛИТИКЕ

Менциев А.У.,
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: a.mentsiev@gmail.com

Аннотация. *Выдвигается тезис о том, что ключевым потенциалом ИИ в управленческом контуре является не столько автоматизация рутинных операций, сколько его способность выступать в роли когнитивно-аналитического посредника – системы, осуществляющей первичную обработку, верификацию и структурную интерпретацию разнородных данных. В центре анализа – концепция «управленческого фильтра», которая определяет границы алгоритмической компетенции: ИИ расширяет операционную периферию принятия решений, но не замещает ответственность и интуицию лица, принимающего решения (ЛПР). Рассматриваются ключевые этапы жизненного цикла данных (сбор, очистка, верификация, представление) и архитектурные принципы интеграции ИИ в системы поддержки принятия решений. Делается вывод о необходимости сохранения человеческого контроля на этапе стратегической селекции при делегировании алгоритмам формализуемых этапов аналитического цикла.*
Ключевые слова: *искусственный интеллект в управлении, бизнес-аналитика, поддержка принятия решений, очистка данных, объяснимость моделей, когнитивный посредник, управленческий фильтр, жизненный цикл данных.*

ARTIFICIAL INTELLIGENCE AS A COGNITIVE-ANALYTIC MEDIATOR IN BUSINESS ANALYTICS

Mentsiev A.U.,
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *It advances the thesis that the key potential of AI within the management loop lies not so much in the automation of routine operations, but in its capacity to function as a cognitive-analytic mediator – a system that performs primary processing, verification, and structural interpretation of heterogeneous data. The analysis centers on the concept of the "managerial filter," which defines the boundaries of algorithmic competence: AI expands the operational periphery of decision-making but does not replace the responsibility and intuition of the decision-maker (DM). The key stages of the data lifecycle (collection, cleaning, verification, presentation) and the architectural principles for integrating AI into decision support systems are examined. The paper concludes that human control must be retained at the stage of strategic selection, while formalizable stages of the analytical cycle are delegated to algorithms.*
Keywords: *artificial intelligence in management, business analytics, decision support, data cleaning, model explainability, cognitive mediator, managerial filter, data lifecycle.*

Современная управленческая деятельность сталкивается с фундаментальным парадоксом: объем доступной для принятия решений информации растет экспоненциально, тогда как время на ее осмысление и верификацию остается неизменным, а часто – сокращается. Сырые данные – не ценность, а сырьё. Ценность создает только их интерпретация, опосредованная релевантным контекстом и управленческим опытом [1]. Традиционные системы поддержки принятия решений (СППР), основанные на статичных отчетах и реляционных базах данных, демонстрируют снижающуюся эффективность перед лицом неструктурированных, разнородных и противоречивых массивов информации. Возникает разрыв между наличием данных и способностью извлекать из них управленческие инсайты.

Методы искусственного интеллекта (ИИ), в особенности глубокое обучение и обработка естественного языка, создают прецедент для преодоления этого разрыва. Однако дискурс, сопровождающий внедрение ИИ в бизнес-аналитику, нередко страдает от двух крайностей: технологического детерминизма (ИИ как панацея) и консервативного скептицизма (ИИ как непрозрачный «черный ящик»). Основной тезис настоящей работы заключается в том, что истинная ценность ИИ для управленца лежит не в плоскости полной

автоматизации выработки решений, а в плоскости когнитивной поддержки – способности системы выполнять функции аналитического посредника между хаотичной реальностью данных и структурированным управленческим суждением.

Теоретической основой предлагаемого подхода служит представление о процессе принятия решений как о двухконтурной системе. Первый контур – операционный – связан с обработкой больших объемов данных, выявлением корреляций, кластеризацией, очисткой и структурированием информации. Второй контур – стратегический – относится к интерпретации полученных результатов, их согласованию с целями организации, этическими нормами и интуитивным знанием контекста, которым обладает лицо, принимающее решения (ЛПР) [2]. В этой дихотомии ИИ выступает не как замена второго контура, а как высокоэффективный инструмент первого.

Мы вводим понятие «управленческого фильтра» – системы алгоритмических и организационных механизмов, которые осуществляют первичную селекцию, верификацию и преобразование «сырой» информации в форму, пригодную для стратегического суждения. Данная концепция базируется на трех принципах.

Первый принцип – асимметричная компетенция. Алгоритмы глубокого обучения демонстрируют превосходство над человеком в задачах обнаружения сложных, нелинейных и неочевидных взаимосвязей в многомерных данных [3]. Однако они уязвимы перед проблемами качества входных данных (garbage in, garbage out) и не обладают способностью к пониманию семантического контекста за пределами обучающей выборки.

Второй принцип – объяснимость как условие доверия. Если для операционных задач (например, скоринга клиентов) может быть достаточна высокая точность модели без полной прозрачности, то для стратегических решений (капиталовложения, слияния и поглощения) использование «черного ящика» неприемлемо. Модель должна не только выдавать прогноз, но и предоставлять интерпретируемую логику его получения [4].

Третий принцип – сохранение управленческой ответственности. Прогноз, сгенерированный ИИ, – это оптика, а не приговор. Юридическая и этическая ответственность за решение, особенно в стратегических вопросах, остается за человеком. Следовательно, внедрение ИИ должно сопровождаться развитием алгоритмической грамотности менеджеров, способных корректно интерпретировать результаты и видеть границы применимости моделей.

Для концептуализации роли ИИ в бизнес-аналитике предлагается рассматривать его в качестве когнитивно-аналитического посредника. Данный термин акцентирует не столько техническую функцию автоматизации, сколько эпистемологическую – преобразование информации из состояния «шума» в состояние «структурированного знания», готового к управленческой рефлексии. Эффективность этого посредничества определяется на каждом из этапов жизненного цикла данных.

На этапе сбора ИИ выступает как инструмент адаптивного извлечения. Методы веб-скрейпинга с элементами машинного обучения способны самостоятельно распознавать и адаптироваться к изменениям в структуре источников. Технологии обработки естественного языка (NLP) позволяют извлекать структурированную информацию из неструктурированных текстов – договоров, переписки, отзывов – превращая их в аналитически значимые сущности [5].

На этапе очистки и верификации когнитивно-аналитическое посредничество ИИ проявляется наиболее ярко. Алгоритмы кластеризации и нечеткого сопоставления (fuzzy matching) позволяют выявлять и объединять дублирующиеся записи. Интеллектуальная импутация пропусков на основе прогнозных моделей восстанавливает недостающие значения, используя корреляции в данных, что значительно богаче тривиального заполнения средними значениями. Обнаружение аномалий (anomaly detection) на ранних этапах выявляет выбросы и потенциальные ошибки ввода, способные исказить итоговые выводы. Критическая зависимость здесь заключается в том, что чем сложнее модель очистки, тем выше риск внесения систематической ошибки, если исходные данные были изначально смещены.

На этапе представления данных интеллектуальная визуализация, автоматический подбор оптимальных типов графиков и интерактивные дашборды превращают массив чисел в предпосылку решения. Наиболее перспективным, но и наиболее рискованным направлением является автоматическая генерация текстовых отчетов на основе данных (NLG). Проблема объяснимости здесь приобретает критическое значение: генерация отчета должна сопровождаться не просто выдачей результата, но и прозрачностью логики его получения.

Практическая реализация концепции требует проектирования специальной архитектуры, интегрированной в управленческий контур. Во-первых, это гибридная архитектура обработки, где алгоритмы ИИ работают в связке с детерминированными правилами бизнес-логики. Во-вторых, механизмы верификации и контроля, обеспечивающие воспроизводимость результатов и документирование чувствительности моделей к качеству данных. В-третьих, интеграция модулей объяснимости – инструментов для визуализации значимости признаков (feature importance), построения локальных объяснений для отдельных прогнозов (LIME, SHAP) и предоставления доверительных интервалов. Это превращает ИИ из «оракула» в инструмент, с которым ЛПР может вести аналитический диалог.

В итоге, современные технологии искусственного интеллекта могут быть концептуализированы как когнитивно-аналитический посредник. Их основная ценность для управленческой деятельности заключается не в иллюзорной возможности полной автоматизации принятия решений, а в способности эффективно выполнять функции «управленческого фильтра» – осуществлять сбор, очистку, верификацию и первичную интерпретацию данных на операционном уровне. Реализуемая через гибридные архитектуры и механизмы объяснимости, эта посредническая роль позволяет сократить разрыв между наличием больших данных и способностью извлекать из них управленческие инсайты. Лицо, принимающее решения, получает возможность сосредоточиться на стратегическом суждении, контекстуальном анализе и принятии ответственности, делегируя алгоритмам трудоемкие и формализуемые этапы аналитического цикла. Человеческое измерение остается центральным звеном в контуре управления, а ИИ – его высокотехнологичным расширением, чьи возможности и границы должны быть четко специфицированы.

Список литературы

1. Аббасов М.Ш. О возможности повышения эффективности управленческих решений // Российский экономический вестник. 2021. Т. 4, № 3. – С. 277–280.
2. Шнюков С.А. Особенности моделирования в процессе принятия управленческих решений // Молодой ученый. 2022. № 3 (398). – С. 218–220.
3. Аббасов М.Ш. Применение искусственного интеллекта в системе поддержки принятия управленческих решений // Сборник трудов конференции «Отечественный и мировой опыт применения информационных технологий и математических моделей в решении социально-экономических проблем». 2023. – С. 1–4.
4. Козлов А.Н. Интеллектуальные информационные системы: Учебник. – Пермь: Изд-во ФГБОУ ВПО Пермская ГСХА, 2013. – 278 с.
5. Маслова В.М. Система рекрутинга с элементами искусственного интеллекта // Экономические системы. – 2018. Т. 11, № 1 (40). – С. 56–59.

УДК 004.82 (публикация отозвана 22.09.2026)

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ КАК КОГНИТИВНО-УПРАВЛЕНЧЕСКИЙ ПОСРЕДНИК В СИСТЕМЕ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ОБРАЗОВАНИИ

Менциев А.У.,
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: a.mentsiev@gmail.com
Эдилов М.И.,
ООО ДПО «Учебный центр «Чеченцемент»

Аннотация. *Выдвигается тезис о том, что ключевая роль ИИ в образовательной среде заключается не в автоматизации педагогического труда как таковой, а в способности системы выступать в качестве когнитивно-управленческого посредника – связующего звена между разнородными образовательными данными, процессами персонализации обучения и управленческими решениями на различных уровнях. В центре анализа – концепция модульной интеллектуальной архитектуры, позволяющей снизить сложность проектирования и обеспечить гибкость внедрения при сохранении педагогической автономии. Делается вывод о необходимости системной интеграции ИИ-инструментов как дополняющего элемента образовательной экосистемы, сопровождаемой развитием цифровой грамотности преподавателей и пересмотром их профессиональных ролей.*
Ключевые слова: *искусственный интеллект, поддержка принятия решений, адаптивное обучение, персонализация обучения, аналитика данных, когнитивный посредник, модульная архитектура, цифровая трансформация образования.*

ARTIFICIAL INTELLIGENCE AS A COGNITIVE-MANAGERIAL MEDIATOR IN THE EDUCATIONAL DECISION SUPPORT SYSTEM

Mentsiev A.U.,
Kadyrov Chechen State University
Edilov M.I.,
Chechencement Educational Center

Abstract. *The thesis advances the argument that the key role of AI in the educational environment lies not in the automation of pedagogical labor as such, but in the system's capacity to function as a cognitive-managerial mediator – a connecting link between heterogeneous educational data, personalized learning processes, and managerial decisions at various levels. The analysis centers on the concept of a modular intelligent architecture, which reduces design complexity and ensures implementation flexibility while preserving pedagogical autonomyThe paper concludes that systemic integration of AI tools as a complementary element of the educational ecosystem is necessary, accompanied by the development of digital literacy among educators and a revision of their professional roles.*
Keywords: *artificial intelligence in education, decision support, adaptive learning, personalized learning, educational data analytics, cognitive mediator, modular architecture, digital transformation of education.*

Современная система образования находится в стадии активной цифровой трансформации, что обусловлено как развитием информационных технологий, так и ростом доступности разнородных данных. Возрастающая сложность управленческих задач и непрерывное увеличение объема информации, которой необходимо владеть для обоснованного принятия решений в образовательных организациях, подчеркивают потребность в системах поддержки принятия решений (СППР), основанных на передовых технологиях [1]. Традиционные модели управления, опиравшиеся преимущественно на экспертные оценки и периодическую отчетность, демонстрируют снижающуюся эффективность перед лицом динамики образовательных процессов и индивидуализации траекторий обучения.

В этих условиях искусственный интеллект (ИИ) становится одним из ключевых инструментов модернизации не только педагогических, но и управленческих практик. Однако дискурс, сопровождающий внедрение ИИ в образование, часто смещает фокус либо на

технологические возможности («умные» платформы, автоматизация), либо на риски вытеснения преподавателя. Основной тезис настоящей работы заключается в том, что истинная ценность ИИ для образовательной системы лежит в плоскости интеграции – его способности выступать в роли *когнитивно-управленческого посредника*, связывающего процессы обучения, накопления данных и принятия решений на различных уровнях: от индивидуальной траектории студента до стратегического планирования на уровне образовательного учреждения.

Теоретической основой предлагаемого подхода служит представление об образовательной системе как о многоуровневом контуре, в котором пересекаются процессы педагогического взаимодействия, административного управления и аналитической рефлексии. Искусственный интеллект в этом контексте представляет собой систему, основанную на обмене знаниями и навыками между несколькими интеллектуальными сущностями, которые должны организовывать и координировать свои действия для достижения общей цели [2]. В образовательной среде такими сущностями выступают преподаватели, студенты, администраторы и сами интеллектуальные алгоритмы, взаимодействие между которыми требует тщательной координации.

Мы вводим понятие «когнитивно-управленческого посредничества» – функции, которую выполняет ИИ-система, обрабатывая разнородные образовательные данные и представляя результаты в форме, доступной для интерпретации как педагогами, так и управленцами. Данная концепция базируется на трех принципах. *Первый* – принцип модульности: сложность образовательной среды требует архитектуры, позволяющей снизить сложность проектирования всей системы и улучшить ее обслуживание [2]. *Второй* – принцип многоуровневой поддержки принятия решений: ИИ-системы должны обслуживать различные уровни управления – от микроуровня (индивидуальная поддержка студента) через мезоуровень (управление учебным курсом) до макроуровня (стратегическое планирование). *Третий* – принцип сохранения педагогической автономии: результаты работы ИИ-систем должны рассматриваться как рекомендательные, а не директивные; преподаватель сохраняет право на окончательное суждение.

Жизненный цикл применения ИИ в образовании может быть представлен как последовательность функциональных модулей, каждый из которых реализует специфическую задачу когнитивно-управленческого посредничества.

Первый модуль – персонализация обучения. Системы на основе ИИ способны анализировать уровень знаний студента и динамику его изменений, выявлять пробелы в обучении, подбирать индивидуальные образовательные траектории и адаптировать сложность учебных материалов в реальном времени [3]. Принцип модульности таких систем позволяет снизить сложность проектирования и улучшить их обслуживание [2]. С управленческой точки зрения, модуль персонализации генерирует данные о динамике освоения материала, которые могут быть агрегированы для оценки эффективности образовательных программ.

Второй модуль – автоматизация оценки знаний. Современные алгоритмы способны оценивать не только правильность ответа, но и структуру рассуждений, логику построения аргументов. С помощью обработки естественного языка ИИ может определить, кому нужна дополнительная поддержка, и сообщить об этом преподавателю [4]. Управленческая ценность заключается в возможности оперативного мониторинга успеваемости на масштабе всей образовательной организации.

Третий модуль – аналитика образовательных данных. ИИ активно используется для анализа больших массивов образовательных данных (learning analytics). Процесс интеллектуального анализа данных включает очистку данных, интеграцию, выбор, преобразование, собственно анализ, оценку шаблонов и представление знаний [2]. Этот модуль выполняет функцию «управленческого фильтра», преобразуя разнородные данные в формализованные индикаторы, пригодные для стратегического планирования.

Четвертый модуль – интеллектуальные образовательные системы. К ним относятся интеллектуальные тьюторы, чат-боты, системы рекомендаций, виртуальные ассистенты. Они

обеспечивают доступность образовательных ресурсов и снижают нагрузку на преподавателей по рутинным запросам [5]. С позиции когнитивно-управленческого посредничества эти системы выполняют интерфейсную функцию, собирая данные о запросах и затруднениях пользователей.

Пятый модуль – генерация учебного контента. Генеративные модели позволяют формировать тестовые задания различного уровня сложности, учебные материалы с адаптацией под уровень подготовки, краткие конспекты и аннотации к текстам. Этот модуль обеспечивает ресурсную базу для реализации персонализированных траекторий.

При всей перспективности применения ИИ в образовании необходимо четко обозначить границы его компетенции. Критически важным ограничением является зависимость от качества и репрезентативности данных. Алгоритмы, обученные на данных, отражающих существующие практики, могут воспроизводить и усиливать систематические ошибки. Кроме того, интерпретируемость моделей остается серьезным препятствием для их принятия в образовательной среде, где прозрачность оценивания имеет принципиальное значение.

В итоге современный искусственный интеллект может быть концептуализирован как когнитивно-управленческий посредник в образовании. Реализуемая через модульную архитектуру, эта посредническая роль позволяет снизить сложность проектирования и внедрения, обеспечивая гибкость адаптации к специфике конкретного образовательного учреждения. Системы поддержки принятия решений на основе искусственного интеллекта могут улучшать результаты, прогнозируя вероятности исходов и рисков, анализируя ретроспективные, текущие и новые данные, выявляя проблемные зоны и предлагая варианты управленческих воздействий.

Критическим условием успешной интеграции остается сохранение педагогической автономии и управленческого контроля. ИИ выступает не как замена преподавателя или администратора, а как высокотехнологичное расширение их аналитических возможностей, требующее развития цифровой грамотности и пересмотра профессиональных ролей. Человеческое измерение остается центральным звеном в образовательном контуре, а ИИ – его когнитивно-управленческим посредником, чьи функциональные ниши и границы должны быть четко специфицированы.

Список литературы

1. Губарев Р.В., Ярашева А.В., Дзюба Е.И. Искусственный интеллект – эффективный инструмент измерения и планирования качества жизни населения России // Народонаселение. 2025. № 2. – С. 129–144.
2. Лосева А.В. Эконометрическое моделирование оборота розничной торговли с использованием инструментов среды программирования R // Прикладная статистика и искусственный интеллект. 2024. № 4. – С. 45–58.
3. Алференко Е.В. Генеративный искусственный интеллект в инженерной деятельности: перспективы и практические рекомендации // Вестник Воронежского института высоких технологий. 2025. № 1. – С. 67–72.
4. Bruches E., Pauls A., Batura T. et al. Entity Recognition and Relation Extraction from Scientific Texts in Russian // arXiv.org. 2020. URL: https://arxiv.org/abs/2011.09817
5. Fishcheva I., Goloviznina V., Kotelnikov E. Machine Learning and Deep Learning Models for Argumentation Mining in Russian Texts // arXiv.org. 2021. URL: https://arxiv.org/abs/2106.14438

УДК 004.89

АРХИТЕКТУРНЫЕ МЕХАНИЗМЫ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ФАКТОЛОГИЧЕСКИХ ОШИБОК В ГЕНЕРАЦИИ МУЛЬТИМОДАЛЬНЫХ ЯЗЫКОВЫХ МОДЕЛЕЙ

Минаев О.М.,
старший преподаватель кафедры
«Программирование и инфокоммуникационные технологии»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: minaevosman@mail.ru
Умалатов С.Д.,
доцент кафедры «Высшая математика»
ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный технический университет»

Аннотация. *Фактологические ошибки (галлюцинации) в генерации текста мультимодальными большими языковыми моделями (MLLM) представляют собой системную проблему, ограничивающую применимость данных систем в задачах, требующих высокой достоверности. В данной работе проводится эмпирическое исследование влияния архитектурных механизмов выравнивания модальностей на частоту и типологию галлюцинаций. На основе контролируемого эксперимента с четырьмя архитектурами проекторов (линейный, MLP, Q-Former, гибридный) установлено, что применение контрастивного обучения в сочетании с трансформерными механизмами внимания снижает частоту объектных галлюцинаций на 52,7%, однако не устраняет систематические ошибки в интерпретации пространственных отношений.*
Ключевые слова: *мультимодальные языковые модели, фактологические ошибки, галлюцинации, таксономия ошибок, выравнивание модальностей, контрастивное обучение.*

ARCHITECTURAL MECHANISMS OF FACTUAL ERRORS IN THE GENERATION OF MULTIMODAL LANGUAGE MODELS

Minaev O.M.,
Senior Lecturer of the Department «Programming and Infocommunication Technologies»
Kadyrov Chechen State University
Umalatov S.D.,
Associate Professor of the Department of Higher Mathematics
Dagestan State Technical University

Abstract. *Factual errors (hallucinations) in text generation by multimodal large-scale language models (MLLMs) represent a systemic problem limiting the applicability of these systems to tasks requiring high fidelity. This paper empirically examines the impact of architectural modality alignment mechanisms on the frequency and typology of hallucinations. Based on a controlled experiment with four projector architectures (linear, MLP, Q-Former, and hybrid), it was found that the use of contrastive learning in combination with transformer attention mechanisms reduces the frequency of object hallucinations by 52,7%, but does not eliminate systematic errors in the interpretation of spatial relationships.*
Keywords: *multimodal language models, factual errors, hallucinations, error taxonomy, modality alignment, contrastive learning.*

Мультимодальные языковые модели (MLLM) подвержены фактологическим ошибкам (галлюцинациям). Однако существующие исследования не предоставляют дифференцированного анализа по типам ошибок в зависимости от архитектуры [1, 2]. Цель работы – установить закономерности возникновения различных типов галлюцинаций в зависимости от механизма выравнивания модальностей.

Исследуются четыре конфигурации механизма выравнивания:

1. Linear-Base. Линейный проектор + языковая потеря $\mathcal{L}_{LM}$.
2. MLP-Base. Двухслойный MLP-проектор + $\mathcal{L}_{LM}$.
3. QFormer-Contrastive. Q-Former + контрастивная потеря $\mathcal{L}_{cont}$ + $\mathcal{L}_{LM}$.
4. Hybrid-Full. Q-Former + $\mathcal{L}_{cont}$ + потеря согласования $\mathcal{L}_{match}$ + $\mathcal{L}_{LM}$ + fine-tuning на

инструктивных данных.

Результаты сравнительного анализа частоты фактологических ошибок для четырёх архитектурных конфигураций приведены в таблице 1 и визуализированы на рисунке 1.

Таблица 1. Частота галлюцинаций по типам для различных архитектур (%)

Тип ошибки	Linear-Base	MLP-Base	QFormer-Contrastive	Hybrid-Full
Объектные	18,4 ± 1,2	14,2 ± 1,0	11,8 ± 0,9	**8,7 ± 0,7**
Атрибутивные	22,1 ± 1,4	17,6 ± 1,1	14,3 ± 1,0	**10,2 ± 0,8**
Пространственные	15,7 ± 1,1	12,4 ± 0,9	10,1 ± 0,8	7,4 ± 0,6
Контекстуальные	12,3 ± 1,0	9,8 ± 0,8	8,2 ± 0,7	**6,1 ± 0,5**
Текстовые	31,2 ± 1,8	26,8 ± 1,5	23,4 ± 1,3	**18,9 ± 1,1**
Общая частота	**19,9 ± 0,9**	**16,2 ± 0,8**	**13,6 ± 0,7**	**10,3 ± 0,5**

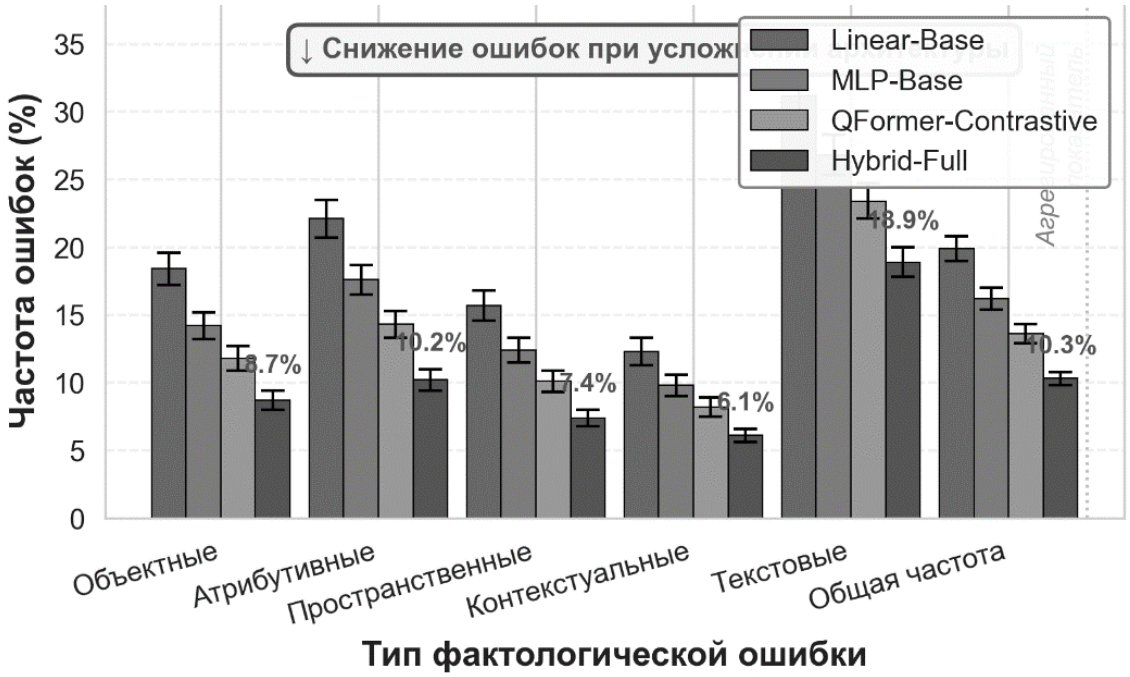

Рис. 1. *Частота фактологических ошибок по типам для различных архитектур механизмов выравнивания*

Анализ показывает монотонное снижение частоты всех типов ошибок при переходе от простых к сложным архитектурам. Наибольший относительный прирост наблюдается для текстовых ошибок (−39.4% для Hybrid-Full относительно Linear-Base), что объясняется улучшением передачи детальной визуальной информации через Q-Former.

Помимо агрегированных показателей, представляет интерес распределение ошибок по предметным доменам, так как различные архитектуры могут демонстрировать неодинаковую эффективность на данных разной природы [3]. Соответствующие результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2. Частота объектных галлюцинаций по предметным доменам (%)

Домен	Linear-Base	Hybrid-Full	Прирост
Бытовые сцены (COCO)	16,2	7,1	−56,2%
Портреты (Flickr30K)	14,8	6,9	−53,4%
Документы с текстом (TextVQA)	28,4	15,2	−46,5%
Медицинские изображения	31,7	19,8	−37,5%
Научные диаграммы	24,1	13,4	−44,4%

Данные таблицы 2 дополнительно представлены в виде горизонтальной диаграммы процентного снижения ошибок (рис. 2).

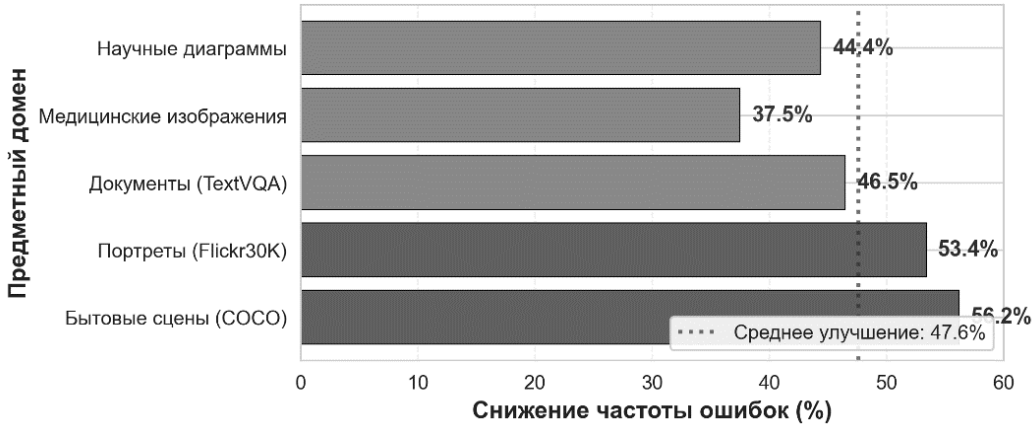

Рис. 2. *Относительное снижение объектных галлюцинаций при использовании гибридной архитектуры в различных предметных доменах*

Результаты дифференциального анализа, приведенного в таблице 2, выявляют важную закономерность: эффективность архитектурных улучшений неоднородна по предметным доменам. Для массовых приложений, работающих с бытовыми изображениями и портретами, гибридная архитектура обеспечивает снижение объектных галлюцинаций более чем на 50%, что делает ее пригодной для внедрения в пользовательские сервисы. Однако для доменов с высокими требованиями к достоверности (медицинская диагностика, анализ юридических документов) даже лучшие показатели гибридной модели (19,8% и 15,2% ошибок соответственно) могут быть недостаточными. Это формирует практическую рекомендацию: при развертывании MLLM в специализированных областях необходимо сочетать архитектурные улучшения с дообучением на доменно-специфичных данных и внедрением дополнительных механизмов верификации генерируемого контента.

Список литературы

1. Гольдберг Й. Нейросетевые методы в обработке естественного языка. – М.: ДМК Пресс, 2019. – 282 с.
2. Йылдырым С., Асгари-Ченаглу М. Осваиваем архитектуру Transformer. Разработка современных моделей с помощью передовых методов обработки естественного языка. – М.: ДМК Пресс, 2022. – 319 с.
3. Пылов П.А., Майтак Р.В., Дягилева А. В. Основы работы с моделями машинного и глубокого обучения. – М., Вологда: Инфра-Инженерия, 2023. – 256 с.
4. Сириченко А. В. Искусственные нейронные сети: практикум. – М.: Издательский Дом МИСиС, 2022. – 26 с.
5. Федоров А.О., Ананьев А.В. Библиотеки и генеративный ИИ: от первых шагов до продвинутых решений. – М.: КноРус, 2025. – 80 с.
6. Цуканова Н.И. Программирование глубоких нейронных сетей на языке Python. – М.: КУРС, 2024. – 224 с.

УДК 004.89

МЕТОДЫ ГИБРИДНОЙ ИНДЕКСАЦИИ И ИНТЕГРАЦИИ ГРАФОВЫХ ЗНАНИЙ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОИСКА В СИСТЕМАХ RAG

Минаев О.М.,
старший преподаватель кафедры
«Программирование и инфокоммуникационные технологии»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: minaevosman@mail.ru

Аннотация. *В настоящее время архитектуры Retrieval-Augmented Generation (RAG) стали стандартом для интеграции больших языковых моделей (LLM) с внешними базами знаний. Однако традиционные подходы, основанные исключительно на векторном поиске, демонстрируют ограничения при обработке запросов, требующих многошагового логического вывода или понимания глобальных связей между документами. В данной работе рассматривается методология гибридной индексации, сочетающая векторные представления с графами знаний (Knowledge Graphs). Предлагается архитектура системы, использующая комбинированный поиск для улучшения контекстуальной релевантности и снижения уровня галлюцинаций. Анализ показывает, что интеграция графовых структур позволяет повысить точность ответов на сложные запросы за счет явного моделирования семантических связей между сущностями.*
Ключевые слова: *RAG, большие языковые модели, графы знаний, гибридный поиск, векторные представления, семантический поиск.*

HYBRID INDEXING AND GRAPH KNOWLEDGE INTEGRATION METHODS FOR IMPROVING SEARCH PERFORMANCE IN RAG SYSTEMS

Minaev O.M.,
Senior Lecturer of the Department «Programming and Infocommunication Technologies»
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *Retrieval-Augmented Generation (RAG) architectures have become the standard for integrating large language models (LLMs) with external knowledge bases. However, traditional approaches based solely on vector search demonstrate limitations when processing queries that require multi-step inference or understanding global relationships between documents. This paper examines a hybrid indexing methodology that combines vector representations with knowledge graphs. We propose a system architecture that utilizes combined search to improve contextual relevance and reduce hallucinations. Analysis demonstrates that integrating graph structures improves the accuracy of answers to complex queries by explicitly modeling semantic relationships between entities.*
Keywords: *RAG, large language models, knowledge graphs, hybrid search, vector representations, semantic search.*

Несмотря на успехи больших языковых моделей (LLM), они склонны к галлюцинациям. Архитектура RAG решает эту проблему, однако традиционный векторный поиск не учитывает структурные связи между данными, что снижает эффективность на многошаговых запросах [2]. Цель работы – анализ методов гибридной индексации, объединяющих векторный поиск и графы знаний.

Предлагаемая архитектура включает три компонента:

1. Построение графа знаний. LLM извлекает сущности и отношения, выполняется разрешение дубликатов и векторизация узлов для семантического поиска внутри графа [3].

2. Гибридный поиск. Параллельно выполняются векторный поиск, обход графа (Personalized PageRank) и ключевой поиск (BM25) [1].

3. Слияние результатов. Агрегация выдачи методом обратного ранжирования (RRF).

Подход обеспечивает повышение качества извлечения информации для сложных запросов, требующих многошагового рассуждения.

Для объединения результатов различных поисковых подсистем применяется метод обратного ранжирования (Reciprocal Rank Fusion – RRF). Данный метод позволяет агрегировать списки результатов без необходимости калибровки скоринговых метрик разных

систем. Формула расчета веса документа:

$$Score(D) = \sum_{r \in R} \frac{1}{k + rank_r(D)}$$

где R – множество поисковых систем, $rank_r(D)$ – позиция документа в списке результатов системы r, k – константа сглаживания.

Дополнительно внедряется механизм переранжирования (re-ranking) с использованием кросс-энкодера для финальной фильтрации контекста перед передачей в генеративную модель [5].

Для оценки эффективности предложенного подхода был сконструирован тестовый набор данных, содержащий документацию технической поддержки и связанные отчеты.

В качестве генеративной модели во всех экспериментах использовалась Llama-3-8B-Instruct с фиксированными параметрами декодирования (temperature=0.1, top_p=0.9).

Запросы классифицированы на три категории:

1. Простые (Simple, n=200). Фактографические вопросы с прямым ответом в одном документе.

2. Многоскачковые (Multi-hop, n=180). Вопросы, требующие синтеза информации из 2–4 связанных документов.

3. Структурные (Structural, n=120). Вопросы, требующие понимания иерархии или отношений между сущностями.

Оценка проводилась по следующим метрикам:

1. Hit Rate @ K – доля запросов, для которых релевантный документ находился в топ-K результатов.

2. NDCG @ K – нормализованная дисконтированная кумулятивная прибыль, учитывающая позицию релевантного документа.

3. Ответность (Answer Faithfulness) – оценка соответствия сгенерированного ответа предоставленному контексту (без галлюцинаций).

Результаты оценки представлены в таблице 1.

Таблица 1. Сравнение метрик качества поиска для различных архитектур (K=5)

Метрика / Тип запроса	Baseline-V (Vector)	Baseline-BM25	Proposed-Hybrid	Прирост (%)
Hit Rate @ 5 (All)	0,742 ± 0,019	0,681 ± 0,021	0,863 ± 0,015	+16,3%
NDCG @ 5 (All)	0,689 ± 0,022	0,623 ± 0,025	0,821 ± 0,018	+19,2%
MRR (All)	0,612 ± 0,024	0,558 ± 0,027	0,754 ± 0,020	+23,2%
Hit Rate @ 5 (Simple)	0,891 ± 0,022	0,845 ± 0,026	0,912 ± 0,020	+2,4%
Hit Rate @ 5 (Multi-hop)	0,623 ± 0,036	0,511 ± 0,041	0,847 ± 0,027	+36,0%
Hit Rate @ 5 (Structural)	0,585 ± 0,045	0,612 ± 0,044	0,825 ± 0,034	+41,0%

Графическое представление этих результатов приведено на рисунке 1.

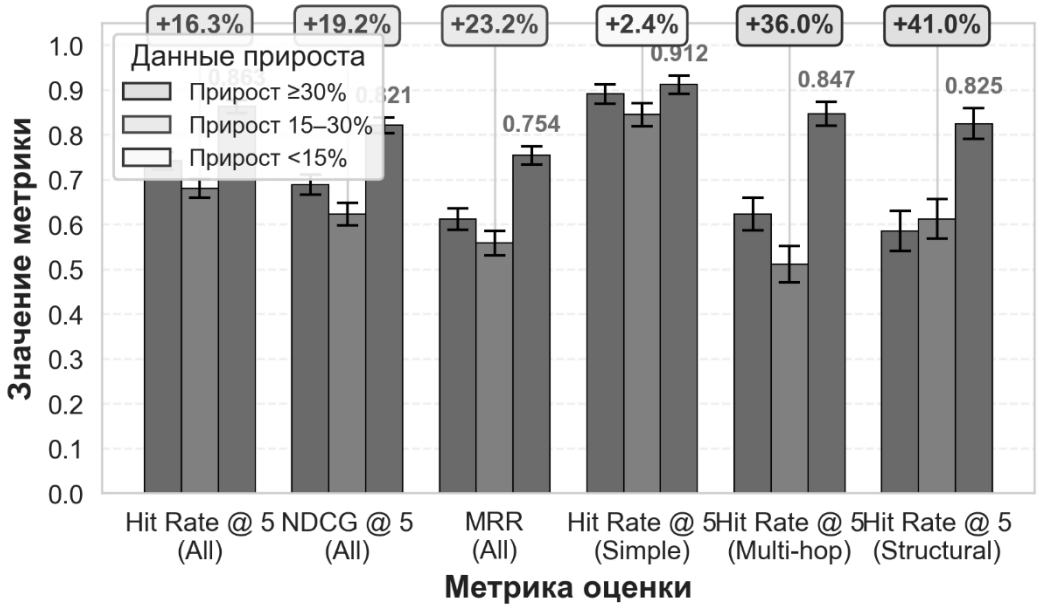

Рис. 1. *Сравнение метрик качества поиска для различных архитектур систем RAG (K=5)*

Анализ данных таблицы 1 позволяет сделать вывод о том, что интеграция графовых знаний в конвейер извлечения информации наиболее существенно влияет на обработку запросов, требующих понимания структурных связей между сущностями. При этом для простых фактографических вопросов прирост оказывается менее выраженным (+2,4%), что свидетельствует о достаточной эффективности традиционного векторного поиска в задачах с низкой когнитивной сложностью. Гибридный подход демонстрирует превосходство в многошаговых запросах за счет извлечения скрытых связей, недоступных векторному поиску, однако увеличивает задержки индексации и инференса. Интеграция графа знаний решает проблему фрагментации контекста, обеспечивая глобальное представление о домене, что критично для корпоративных данных.

Список литературы

1. Ганегедара Т. Обработка естественного языка с TensorFlow. – М.: ДМК Пресс, 2020. – 382 с.
2. Гольдберг Й. Нейросетевые методы в обработке естественного языка. – М.: ДМК Пресс, 2019. – 282 с.
3. Йылдырым С., Асгари-Ченаглу М. Осваиваем архитектуру Transformer. Разработка современных моделей с помощью передовых методов обработки естественного языка. – М.: ДМК Пресс, 2022. – 319 с.
4. Савченко Е. Ю. Основы и применение нейронных сетей: теория, практика, инновации. – Бишкек: Нео Принт, 2024. – 116 с.
5. Сириченко А.В. Искусственные нейронные сети: практикум. – М.: Издательский Дом МИСиС, 2022. – 26 с.
6. Ясницкий Л.Н. Интеллектуальные системы. – М.: Лаборатория знаний, 2024. – 222 с.

УДК 330

ВНЕДРЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ЭЛЕКТРОННУЮ КОММЕРЦИЮ

Мусаева Б.М.,
старший преподаватель кафедры
«Экономика и экономическая безопасность отраслей и предприятий»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: bela_musaeva@mail.ru

Аннотация. *В статье рассмотрены противоречия и вызовы, которые порождает развитие искусственного интеллекта в сфере электронной коммерции. Возникновение и развитие искусственного интеллекта, являющееся относительно автономным процессом, можно одновременно считать технологическим ответом на потребности ускорения цифровизации. При таком подходе внедрение алгоритмов искусственного интеллекта в электронную коммерцию несет с собой как положительные последствия, так и существенные угрозы устойчивому экономическому развитию в силу специфики институциональной среды электронного бизнеса.*

Ключевые слова: *цифровизация экономики, сетевая экономика, коммерция с использованием искусственного интеллекта, искусственный интеллект, институционализация, экономическая политика.*

IMPLEMENTATION OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE ALGORITHMS IN E-COMMERCE

Musaeva B.M.,
Senior Lecturer, Department of Economics and Economic Security of Industries and Enterprises,
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *This article examines the contradictions and challenges posed by the development of artificial intelligence in e-commerce. Emergence and development of artificial intelligence, while a relatively autonomous process, can simultaneously be considered a technological response to the need to accelerate digitalization. Given this approach, the introduction of artificial intelligence algorithms into e-commerce carries both positive consequences and significant threats to sustainable economic development, due to the specific institutional environment of e-business.*

Keywords: *digitalization of the economy, network economy, artificial intelligence commerce, artificial intelligence, institutionalization, economic policy.*

Возникновение интернета уже ушло в историю и стало прошлым человечества, хотя и относительно недавним. Экономическая жизнь в условиях цифровизации коренным образом изменилась и продолжает меняться. Цифровизированная экономика сегодня представляет собой модель системы, в которой органично соединились материальные и виртуальные реалии, то есть традиционные секторы создания товаров и услуг, которые все больше опираются в своей динамике на широкое применение ИКТ, направленных на сбор, обработку и коммерческое распространение самых разнообразных данных. В литературе в последнее время ставится вопрос о формировании так называемого капитализма платформ [3], характеризующегося формированием доминирующей организующей роли глобальных компаний, которые становятся центрами распространения информации; без широкого использования которой любая традиционная фирма обречена на поражение. Сейчас на наших глазах формируется новый мощный фактор ускорения экономической динамики – искусственный интеллект (ИИ), последствия использования которого для развития человечества (включая экономическое развитие) довольно неоднозначны.

Стремительное распространение ИКТ в бизнесе сопровождается значительным увеличением внимания ученых к исследованию проблематики е-коммерции [1–5]. Несмотря на большое внимание, уделяемое исследованию е-коммерции в современных условиях, особенности институциональной среды этого бизнес-сегмента в условиях внедрения алгоритмов ИИ пока системно не анализируются.

Цель статьи – выявить противоречия и вызовы, которые порождает развитие ИИ в секторе е-коммерции, а также пути решения этих противоречий.

Развитие е-коммерции является закономерным этапом виртуализации и цифровизации торговых сетей современной экономики. В свою очередь, возникновение и развитие ИИ, которое является относительно автономным процессом, можно одновременно считать технологическим ответом на потребности ускорения цифровизации.

При этом надо обязательно учитывать, что все экономические процессы всегда происходят в определенной институциональной среде, которая характеризуется единством формальных и неформальных институтов. Неэффективность этих институтов в определенной стране ставит под сомнение постоянство институциональной среды как предпринимательской деятельности в целом, так и сегмента е-коммерции в частности.

Поэтому сами по себе прогрессивные организационно-технологические инновации в сфере е-коммерции автоматически не означают ее успешное развитие. Напротив, внедрение алгоритмов ИИ в е-коммерцию может нести с собой как положительные последствия, так и существенные угрозы устойчивой экономической динамике – именно в силу специфики институциональной среды в электронном бизнесе.

Да, безусловно, ИИ создает ряд новых или существенно совершенствует имеющиеся элементы конкурентных производственных и маркетинговых стратегий е-коммерции.

Среди этих элементов можно отметить следующие: персонализация маркетингового воздействия через автоматизацию анализа данных, принятия решений с минимальным вмешательством человека; диверсификация моделей ценообразования путем разработки более гибких тарифных планов; ускоренная виртуализация взаимодействия продавцов и потребителей с помощью чат-ботов; роботизация бизнес-процессов; разработка алгоритмов обнаружения мошенничества и предотвращения его и т. д.

Персонализация маркетингового влияния. Благодаря максимальному использованию тактики размещения рекламных рекомендаций на домашних страницах ведущих глобальных платформ достигается эффект подавляющих просмотров потребителями именно рекомендованных видеороликов, следствием чего становится принятие соответствующих решений потребителями.

Чат-боты и виртуальные помощники. На бытовом уровне именно этот аспект распространения ИИ стал едва ли не наиболее распространенным. Каждый пользователь банковских и жилищно-коммунальных услуг ежедневно сталкивается с чат-ботами в этих сферах. Даже если общение с соответствующими живыми людьми – представителями банковских учреждений, коммунальных предприятий и некоторых государственных учреждений в итоге имеет место, ему обязательно предшествует контакт с чат-ботом. Что касается чисто коммерческой сферы, то использование чат-ботов пока является одним из способов коммуникации заказчика и поставщика, а не преимущественным способом, который был бы способен заменить живой разговор реальных людей. Помимо вспомогательной коммуникативной функции, чат-боты способны автоматизировать сами процессы заказа.

Указанное выше свидетельствует о том, что преимущества использования ИИ в соответствующих цепочках бизнес-процессов не следует абсолютизировать.

К примеру, обнаружение и предотвращение мошенничества. Фирмы, осуществляющие электронную коммерцию, могут сталкиваться с проблемами мошенничества со стороны заказчиков. Вместе с тем, к мошенничеству прибегают и отдельные фирмы или лица, выдающие себя за бизнесменов. Борьба с этими проблемами сопровождается как финансовыми, так и репутационными потерями с обеих сторон.

Важным элементом успешных маркетинговых кампаний является воздействие на потенциальных клиентов через систему положительных отзывов потребителей, которые ранее приобрели соответствующий продукт или получили услугу. Но при этом е-бизнес столкнулся с т. н. астротурфингом, то есть организацией фальшивых массовых положительных отзывов, распространение которых существенно искажает картину реальных потребительских предпочтений. К сожалению, этот прием является достаточно эффективным как для

искусственного рыночного успеха недобросовестных фирм, так и для недобросовестного вытеснения конкурентов с рынка.

Именно поэтому в современных условиях многие компании используют ИИ для борьбы с астротурфингом, уделяя большее внимание достоверным и полезным обзорам.

Развитие е-коммерции является закономерным этапом виртуализации и цифровизации торговых сетей современной экономики. В свою очередь, возникновение и развитие ИИ, которое является относительно автономным процессом, можно одновременно считать технологическим ответом на потребности ускорения цифровизации. При таком подходе внедрение алгоритмов ИИ в е-коммерцию несет с собой как положительные последствия, так и существенные угрозы устойчивому экономическому развитию – в силу специфики институциональной среды электронного бизнеса.

В связи с этим возникает объективная необходимость совершенствования институциональной среды осуществления е-коммерции путем, прежде всего, гармонизации неформальных институтов (укрепления доверия между участниками), а также усиления регуляторного влияния государства через усовершенствование нормотворчества (в частности, повышение действенности санкций за цифровое мошенничество и прозрачности осуществления электронных транзакций).

ИИ быстро превращается в ведущий фактор успешного осуществления е-коммерции, поскольку предоставляет бизнесу невозможные ранее способы принятия управленческих решений на основе учета индивидуальных предпочтений огромного количества потребителей соответствующих товаров и услуг. Обработка больших массивов данных позволяет не только выявлять особенности экономического поведения клиентов, но и целенаправленно воздействовать на нее и подстраивать под разработанные продукты.

Но одновременно с введением соответствующих алгоритмов ИИ возникает угроза возникновения предвзятости этих алгоритмов. Это требует особо тщательного мониторинга всех этапов разработки алгоритмов с целью недопущения создания манипулятивных воздействий на волеизъявление потребителей.

В свою очередь, учитывая недостаточную надежность и эффективность имеющихся процедур контроля за соблюдением этических принципов управления базами данных в частном секторе, целесообразно подкрепить эти принципы совершенствованием нормативной базы, регулирующей конкурентные механизмы.

Список литературы

1. Ивановский Б.Г. Экономические эффекты от внедрения технологий «искусственного интеллекта» // Социальные новации и социальные науки. 2021. № 2 (4). – С. 8–25.
2. Китиева М.И., Мусаева Х.М. Перспективы использования ИИ в экономике // Естественно-гуманитарные исследования. 2023. № 4. – С. 152–154.
3. Степнов И.М. Платформенный капитализм как источник формирования сверхприбыли цифровыми рантье // Вестник МГИМО. 2018. № 4. – С. 107–124.
4. Талапина Э. Прозрачность алгоритмов искусственного интеллекта // Право. Журнал Высшей школы экономики, 2025. № 18(3). – С. 4–27.
5. Юдина Т.Н. Цифровизация как тенденция современного развития экономики РФ // Государственное и муниципальное управление. 2017. № 3. – С. 139–143.

УДК 330

ПРИМЕНЕНИЕ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В УПРАВЛЕНИИ ПЕРСОНАЛОМ

Мусаева Х.М.,
ассистент кафедры «Экономика и экономическая безопасность отраслей и предприятий»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: heda_musaeva_997@mail.ru

Аннотация. *В статье рассмотрены теоретико-методические основы использования искусственного интеллекта в управлении персоналом как ключевого бизнес-процесса современного предприятия. Показано, что каждый новый этап развития искусственного интеллекта способствовал формированию моделей и направлений, способных интегрироваться с другими цифровыми инструментами и обеспечивать расширение сфер их практического применения. Обоснована целесообразность внедрения гибридного подхода к обучению моделей, сочетающего машинное обучение и символьные системы знаний и правил.*
Ключевые слова: *управление персоналом, искусственный интеллект, автоматизация, оптимизация, человеческие ресурсы, цифровые технологии.*

APPLICATION OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN HR MANAGEMENT

Musaeva H.M.,
Assistant of the Department of Economics and Economic Security of Industries and Enterprises
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *This article examines the theoretical and methodological foundations of using artificial intelligence in HR management as a key business process for a modern enterprise. It demonstrates that each new stage of artificial intelligence development has contributed to the development of models and approaches capable of integrating with other digital tools and expanding their practical applications. The feasibility of implementing a hybrid approach to model training, combining machine learning and symbolic knowledge and rule systems, is substantiated.*
Keywords: *personnel management, artificial intelligence, automation, optimization, human resources, digital technologies.*

Современные условия функционирования бизнеса требуют от компаний высокой адаптивности к изменениям на рынке труда и динамике технологического прогресса. Одной из важных предпосылок эффективной трансформации бизнес-процессов становится внедрение искусственного интеллекта как ключевого компонента цифровизации.

Особое внимание в этом контексте уделяется сфере цифрового управления персоналом, которая требует интеграции гибких, интеллектуальных и прозрачных решений.

Вопросы внедрения искусственного интеллекта в цифровое управление персоналом активно разрабатываются в трудах зарубежных и отечественных ученых [1–5], что подтверждает актуальность проблемы формирования целостной цифровой архитектуры в HR-среде. Несмотря на многочисленные исследования, отсутствует систематизированная теоретическая модель, которая могла бы объединить эти компоненты в рамках единой цифровой структуры, определяющей научную актуальность данной работы.

Искусственный интеллект (ИИ), или искусственный разум, в самом широком смысле – комплекс инструментов, позволяющих решать задачи уровня человеческого интеллекта и реализованных машинами, в частности компьютерными системами. ИИ – это название не какого-то отдельного алгоритма, но скорее группы методов, которыми пользуются для решения различного рода задач. Классический алгоритм не имеет возможности совершать разумные действия; он может лишь действовать по четким правилам и принимать то или иное решение в соответствии с заданными параметрами.

Технология ИИ содержит в себе много разных направлений, однако лишь часть из них используется в цифровом управлении персоналом. Их можно разделить на две группы: фундаментальные направления, на которых базируется вся общая структура, и практические

функциональные направления, отвечающие за понимание различных процессов и аспектов жизнедеятельности человека, что дает им возможность лучшей интеграции в операционные процессы цифрового управления персоналом.

Основополагающими направлениями ИИ в цифровом управлении персоналом являются машинное обучение, глубокое обучение, компьютерное зрение, обработка естественного языка, а также символьный ИИ.

Симбиоз типов машинного обучения и символьной системы правил и знаний обусловливает образование нейросимвольного (гибридного) подхода в обучении моделей, который повышает эффективность ИИ-решений.

Существует много различных типов машинного обучения, однако для моделей и инструментов, которые применяются в сфере управления персоналом, актуальны именно эти четыре типа: контролируемое обучение, полуконтролируемое обучение, неконтролируемое обучение и обучение с подкреплением.

Относительно системы знаний и правил, которая применяется в символьном ИИ, здесь можно выделить тоже четыре главных направления: ориентированные на правила системы, в которых знания кодируются в виде правил; логический ИИ, использующий логические модели, дедукции и онтологии; графы знаний, в которых данные представлены в виде связей между сущностями; решение задач на основе логических ограничений.

Благодаря сочетанию определенных типов машинного обучения и символьной системы правил и знаний возникает возможность объяснения логики тех или иных решений алгоритмов.

Функциональные направления обеспечивают более глубокую интеграцию ИИ в операционные процессы, сочетая различные технологические решения и смежные области знаний. Среди таких направлений можно выделить следующие: генеративный искусственный интеллект, разговорный искусственный интеллект, диалоговый искусственный интеллект, рекомендательный искусственный интеллект, эмоциональный искусственный интеллект, когнитивный искусственный интеллект, поведенческий искусственный интеллект.

ИИ как комплексный цифровой инструмент оптимизации управления персоналом не может рассматриваться исключительно через призму информационных технологий. Современные подходы требуют междисциплинарного понимания взаимодействия цифровых инструментов с человеческими факторами, корпоративной культурой и организационным поведением. Согласно теории социотехнических систем, предложенной Э. Тристом и Ф. Эмером, эффективность любой организационной системы обеспечивается сбалансированным взаимодействием между технической составляющей и социальной средой. В сфере управления персоналом эта концепция позволяет рассматривать эффективное внедрение ИИ в HR-процессы лишь при условии его интеграции в организационную среду, способную к цифровому взаимодействию. Это приводит к необходимости включения в систему ИИ элементов, ориентированных на распознавание эмоций, поведенческих реакций и когнитивных механизмов. Гибкое системное взаимодействие между ИИ и персоналом компании позволяет адаптироваться к организационному контексту при условии обеспечения прозрачности принятия решений [5].

На основе приведенного выше предлагается рассматривать структуру ИИ в контексте цифрового управления персоналом как совокупность фундаментальных и практических функциональных направлений, которые взаимодействуют между собой на основе гибридного подхода в обучении моделей и вместе со смежными научными отраслями образуют динамическую адаптивную архитектуру комплексного цифрового инструмента для автоматизации HR-процессов и принятия персонализированных, обоснованных и эффективных HR-решений. Таким образом, ИИ в цифровом управлении персоналом не только автоматизирует отдельные операционные процессы, но и формирует новую парадигму цифрового HR-менеджмента.

Появление идей о создании интеллектуальных систем началось еще в прошлые века, однако лишь в середине XX в. они приобрели четкие формы, которые обусловили создание

новой ведущей цифровой технологии под названием «искусственный интеллект». Ее эволюционная динамика в исторической плоскости объединяет в себе этапы активного развития и периоды упадка из-за несоответствия завышенных ожиданий научного сообщества ее текущим производительным возможностям в соответствующие промежутки времени. Однако каждый новый этап развития предопределяет появление новых направлений и моделей, которые способны решать более сложные задачи и интегрироваться с другими цифровыми технологиями и инструментами.

Глобальный тренд цифровизации бизнес-процессов актуализирует исследования по внедрению ИИ в сферу цифрового управления персоналом, что является одним из ключевых бизнес-процессов на предприятии. Развитие технологии ИИ приводит к образованию различных фундаментальных направлений, соответствующих основным способностям человека как профессионального субъекта.

Необходимость постоянного контроля прозрачности ИИ-решений обуславливает образование нового гибридного подхода к обучению моделей, который состоит из различных типов машинного обучения и символьной системы знаний и правил. Совместное использование этих компонентов повышает эффективность работы алгоритмов. Совокупность этих компонентов образует структуру ИИ в цифровом управлении персоналом, которая полностью соответствует требованиям современного этапа цифровой трансформации.

Ключевое преимущество концепции ИИ в цифровом управлении персоналом заключается в интеграции фундаментальных и практических функциональных направлений ИИ на основе гибридного подхода, что позволяет повысить эффективность, прозрачность и персонализацию HR-решений. Гибкая динамическая архитектура этой структуры позволяет использовать технологию ИИ как комплексный цифровой инструмент, который предоставляет возможность для масштабируемой автоматизации HR-процессов в рамках современной прогрессивной компании. Эффективность комплексного использования ИИ в цифровом управлении персоналом уже доказана на практике ведущими мировыми компаниями.

С учетом организационного контекста и человеческого фактора описанная выше ИИ-структура может стать основой для создания масштабируемых цифровых экосистем в современном цифровом управлении персоналом. Автоматизация HR-процессов на основе ИИ становится ведущим катализатором для развития компаний в цифровую эпоху, повышая эффективность их деятельности и позволяя им адаптироваться к меняющимся условиям современных рынков.

Список литературы

1. Головина А.Н., Пешкова А.А. Цифровизация как новый принцип организации производства // Экономические и социально-гуманитарные исследования. 2023. № 2 (38). – С. 15–24.
2. Китиева М.И., Мусаева Х.М. Перспективы использования ИИ в экономике // Естественно-гуманитарные исследования. 2023. № 4. – С. 152–154.
3. Коновалов М.А. Преимущества использования цифровых технологий при подборе персонала // Государственное управление. Электронный вестник. 2022. № 94. – С. 188–202.
4. Чуланова О.Л. Развитие и риски технологий искусственного интеллекта в HR // Управление персоналом и интеллектуальными ресурсами. 2019. № 6. – С. 5–8.
5. Trist E. L. The Evolution of Socio-Technical Systems. Ontario Quality of Working Life Centre, 1981. – 67 p.

УДК 621.382.002

ДИФФУЗИЯ ИОННО-ИМПЛАНТИРОВАННОГО МЫШЬЯКА В КРЕМНИЙ

Мустафаев Г.А.,
профессор кафедры электроники и цифровых информационных технологий
ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова»
Хасанов А.И.,
заведующий кафедрой физической электроники
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: fizelectronika@mail.ru
Мустафаев А.Г.,
заведующий кафедрой информационных систем и программирования
ГАОУ ВО «Дагестанский государственный университет народного хозяйства»

Аннотация. *Проведены исследования легированных слоев кремния, полученных диффузией мышьяка из ионно-имплантированных источников. Исследовался кремний p-типа ориентацией (100) с удельным сопротивлением 0,2 Ом·см и легированный мышьяком, и эпитаксиальный слой кремния толщиной 10 мкм с удельным сопротивлением 0,5 Ом·см на подложке кремния p-типа с удельным сопротивлением 10 Ом·см. Ионная имплантация мышьяка проводилась при энергии 50 кэВ и дозе облучения $1 \cdot 10^{15}$ см$^{-2}$. Наклон образцов к потоку ионов составлял при имплантации 8°. Показано, что распределение электрически активного мышьяка в кремнии имеет такую же форму, как и общий профиль мышьяка, когда все атомы мышьяка в диффузионном слое активны.*
Ключевые слова: *кремний, диффузия мышьяка, легированные слои, ионная имплантация, эпитаксиальный слой, удельное сопротивление.*

DIFFUSION OF ION-IMPLANTED ARSENIC INTO SILICON

Mustafayev G.A.,
Professor, Department of Electronics and Digital Information Technologies,
Kabardino-Balkarian State University
Khasanov A.I.,
Head of the Department of Physical Electronics,
Kadyrov Chechen State University
Mustafayev A.G.,
Head of the Department of Information Systems and Programming,
Dagestan State University of National Economy

Abstract. *Doped silicon layers obtained by arsenic diffusion from ion-implanted sources were studied. The investigated materials were p-type silicon with (100) orientation and a resistivity of 0.2 Ω·cm, doped with arsenic, and a 10 μm-thick epitaxial silicon layer with a resistivity of 0.5 Ω·cm on a p-type silicon substrate with a resistivity of 10 Ω·cm. Arsenic ion implantation was carried out at an energy of 50 keV and a irradiation dose of $1 \cdot 10^{15}$ cm^{-2}. The inclination of the samples to the ion flow during implantation was 8°. It was shown that the distribution of electrically active arsenic in silicon has the same shape as the overall arsenic profile when all arsenic atoms in the diffusion layer are active.*
Keywords: *Silicon, arsenic diffusion, doped layers, ion implantation, epitaxial layer, resistivity.*

Когда мышьяк As диффундирует в кремний Si из химических источников, таких как легированные окислы или твердый мышьяк в откачанной ампуле, в результате химических реакций образуются неактивные комплексы As. Поэтому концентрация электрически активного мышьяка ограничена [1–4]. Предполагается, что эти комплексы включают вакансии, так как между слоями, полученными диффузией мышьяка As и бора B, существует взаимодействие. Диффузионные эффекты, однако, между указанными слоями уменьшаются, когда в качестве источника мышьяка применяется слой, полученный ионной имплантацией мышьяка As в кремний Si.

В работе проведено исследование легированных слоев Si, полученных диффузией мышьяка As из ионно-имплантированных источников. Исследовались кремний p-типа проводимости с ориентацией (100) с удельным сопротивлением 0,2 Ом·см и легированный мышьяком n – эпитаксиальный слой Si толщиной 10 мкм с удельным сопротивлением 0,5 $Ом \cdot см$ на p-Si подложке с удельным сопротивлением 10 $Ом \cdot см$. Ионная имплантация мышьяка As проводилась при энергии 50 кэВ и дозе облучения $1x10^{15}$ $см^{-2}$ [5, 6]. Наклон образцов к потоку ионов составлял при имплантации 8°.

После имплантации образцы отжигались в атмосфере азота N_2 или кислорода O_2 при температуре 1050°С [7]. Профиль распределения примеси для одной части образцов измерялся по дифференциальной проводимости, а для другой части – с помощью вторичной масс-спектрометрии. Для перевода измеренных значений проводимости в концентрацию были выполнены измерения холловской подвижности, а также сделано предположение, что холловская подвижность равна дрейфовой подвижности. На рис. 1 приведена зависимость удельного сопротивления от концентрации электронов для кремния, легированного мышьяком.

Рис. 1. *Зависимость удельного сопротивления от концентрации электронов для кремния, легированного мышьяком*

Профили распределения мышьяка в кремнии представлены на рис. 2.

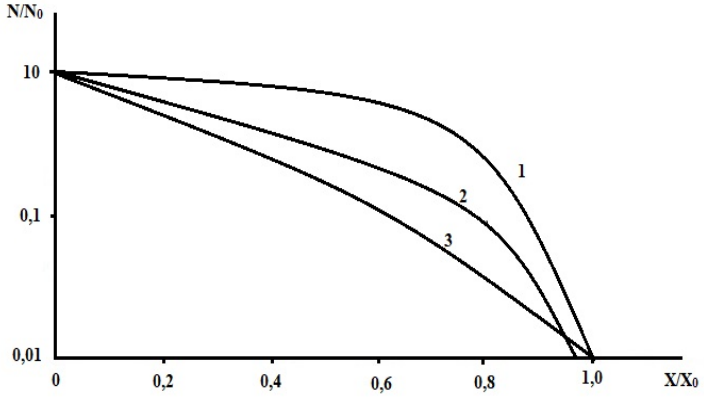

Рис. 2. *Профили распределения мышьяка в кремнии для поверхностной концентрации* $5 \cdot 10^{15} см^{-2}$ *(1) и* $1x\ 10^{15}$ $см^{-2}$ *(2), температура диффузии 1050°С в течение 15 и 30 мин, соответственно*

Для исследуемых условий диффузии поверхностная концентрация мышьяка медленно меняется с температурой и временем, однако в первом приближении можно считать поверхностную концентрацию постоянной.

Представленные на рис. 2 нормализованные кривые (1) и (2) получены для поверхностной концентрации $5 \cdot 10^{15} см^{-2}$, $1x\ 10^{15}$ $см^{-2}$, температуры диффузии 1050°С в

течение 15 и 30 мин, соответственно. Когда N_0 приближается к собственной концентрации n_i коэффициент диффузии становится независимым от концентрации, и профиль мышьяка приближается к распределению Гаусса (кривая 3, рис. 2).

Зависимости коэффициента диффузии *D* от концентрации As представлены на рис. 3 для четырех значений температуры диффузии от 1000 до 1200°C и для различных газовых сред.

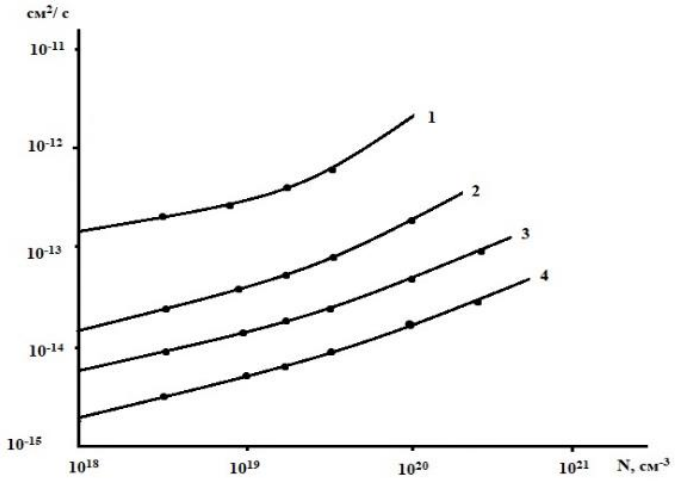

Рис. 3. *Зависимости коэффициента диффузии D от концентрации As для четырех значений температуры диффузии: 1 – 1200°C, 2 – 1100°C, 3 – 1050°C, 4 – 1000°, в которой проводится диффузия*

На рис. 4 приведены зависимости коэффициента диффузии мышьяка от температуры для диффузии из ионно-имплантированного слоя (2) и (1) – для диффузии из химического источника.

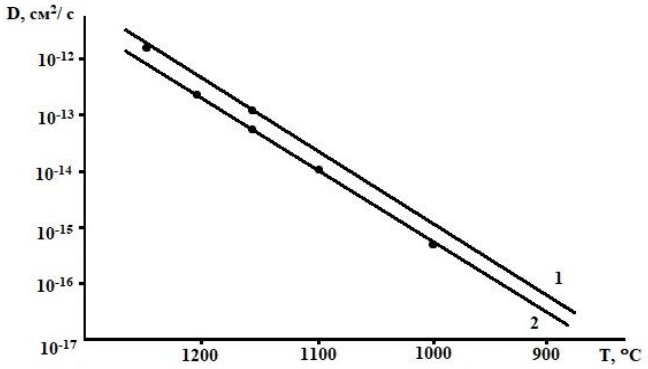

Рис. 4. *Зависимости коэффициента диффузии мышьяка от температуры для диффузии из ионно-имплантированного слоя (2) и (1) – для диффузии из химического источника*

Были исследованы также профили распределения As, полученные при диффузии в разных атмосферах, в частности профили распределения As в слое SiO_2 и в Si подложке для двух образцов при дозе $1\cdot10^{16}\ см^{-2}$ и энергии 50 кэВ, диффузия проводилась в сухом и влажном кислороде.

Из анализа проведенных исследований следует, что атомы As накапливаются в приповерхностной области Si толщиной 20–40 нм в атмосфере влажного O_2 и неоднородно проникают в слой SiO_2. В атмосфере сухого кислорода вырастает слой SiO_2 толщиной 50 нм и в пленку окисла проникает гораздо меньше атомов As. Для обеих окисляющих атмосфер при температуре 1050°C коэффициент сегрегации $m = 800$, что находится в согласии с термодинамическими расчетами. Следовательно, сегрегация As в SiO_2 незначительно уменьшает легирование мышьяком. Однако накопление As существенно, так как интегральная концентрация в поверхностной области равна $\sim 1{,}5\cdot10^{15}\ см^{-2}$ как для сухого, так и для

влажного кислорода. Глубина перехода, полученного при диффузии As во влажном кислороде $x_j = 0{,}43$ мкм, в сухом – $x_j = 0{,}48$ мкм при $N = 10^{18}\ см^{-3}$.

То, что ионы As^+ более растворимы в имплантационно-диффузионных слоях, а не в слоях, полученных диффузией из химических источников, проиллюстрировано графическими зависимостями, представленными на рис. 5, где по оси ординат откладывается температура, а по оси абсцисс – концентрация мышьяка: 1 – расчетная растворимость As при диффузии из химического источника; 2 – растворимость As при диффузии из ионно-имплантированных слоев**.**

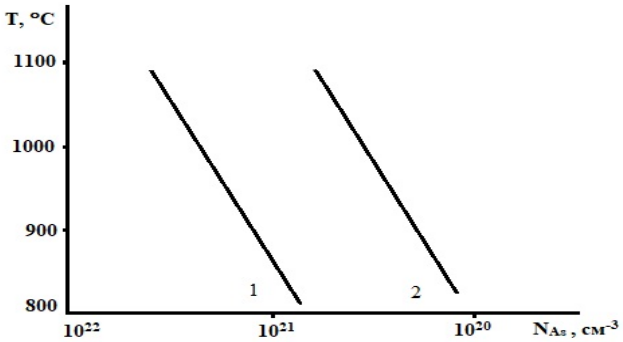

Рис. 5. *Графические зависимости растворимости As: 1 – расчетная растворимость As при диффузии из химического источника; 2 – растворимость As при диффузии из ионно-имплантированных слоев*

Распределение электрически активного As в Si имеет такую же форму, как и общий профиль мышьяка, когда все атомы мышьяка в диффузионном слое активны.

Итак, в работе установлены следующие факты:

1. Все профили диффузионного распределения As имели схожие профили при $N_0 \geq 1 \cdot 10^{20}\ см^{-3}$, которые могут быть описаны полиномиальным приближением Чебышева к диффузионному уравнению с коэффициентом диффузии, зависящим от концентрации.

2. Диффузия мышьяка не зависит от состава атмосферы в диффузионной печи. Более резкие глубокие переходы, как измерено на границах Si/SiO_2, получаются для диффузии во влажном кислороде, когда X_j менее 1 мкм. Этот результат не вызван сегрегацией As в SiO_2 ($m =$ 800 при 1050°C), но связан с перемещением границы раздела.

3. При температуре ниже 1100°C электрическая активность мышьяка выше при диффузии из ионно-имплантированных слоев по сравнению с диффузией из химических источников. В процессе диффузии электрическая активность As увеличивается со скоростью, пропорциональной $-z^{1/3}$ до полной активации, когда $N_0 \cong C_{A,SOL}$.

Список литературы

1. Курносов А.И., Юдин В.В. Технология производства полупроводниковых приборов и интегральных микросхем: Учебное пособие. – М.: Высш. шк., 1986. – 368 с.
2. Зи С. Технология СБИС. – М.: Мир, 1986. – 404 с.
3. Зи С. Физика полупроводниковых приборов. – М. Мир, 1984. – 456 с.
4. Мустафаев Г.А., Черкесова Н.В., Панченко В.А., Мустафаев А.Г. Влияние технологических факторов на дефектность структур кремний на сапфире // Электроника и электротехника. 2017. № 1. – С. 7–15.
5. Мустафаев Г.А., Мустафаев А.Г., Мустафаев А.Г. Способ формирования легированных областей полупроводникового прибора. Патент РФ 2476955. 2013. Бюл. № 6.
6. Мустафаев Г.А., Хасанов А.И., Мустафаев А.Г., Кутуев Р.А. Способ изготовления легированных областей. Патент РФ 2654984, 2018, Бюл. № 15.
7. Мустафаев Г.А., Мустафаев А.Г., Мустафаев А. Г., Черкесова Н.В. Способ отжига полупроводниковых структур. Патент РФ 2567117, 2015. Бюл. № 31.

УДК 004.9 (публикация отозвана 22.09.2026)

ЦИФРОВЫЕ ДВОЙНИКИ В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ: ТРАНСФОРМАЦИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ПАРАДИГМ

Муцуров Э.Ю.,
студент 4 курса направления «Торговое дело»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный педагогический университет»
e-mail: bombilo.ed@gmail.com
Муцурова З.М.,
доцент кафедры «Прикладная математика и компьютерные технологии»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: zalinan@bk.ru

Аннотация. *В статье проведён комплексный анализ современных подходов к созданию и применению цифровых двойников в естественнонаучных исследованиях. Рассмотрены методологические основы разработки цифровых двойников, включая интеграцию физического моделирования, методов машинного обучения и технологий обработки данных в реальном времени. Особое внимание уделено междисциплинарным аспектам применения цифровых двойников в физике, химии, биологии и науках о Земле. Проанализированы ключевые технологические вызовы и перспективные направления развития цифровых двойников в контексте современных научных исследований.*
Ключевые слова: *цифровые двойники, вычислительное моделирование, естественные науки.*

DIGITAL TWINS IN THE NATURAL SCIENCES: TRANSFORMATION OF RESEARCH PARADIGMS

Mutsurov E.Yu.,
fourth-year student majoring in Commerce (38.03.06)
Chechen State Pedagogical University
Mutsurova Z.M.,
Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Technology
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *The article provides a comprehensive analysis of modern approaches to the creation and application of digital twins in natural science research. It examines the methodological foundations of digital twin development, including the integration of physical modeling, machine learning techniques, and real-time data processing technologies. Special attention is given to the interdisciplinary aspects of digital twin applications in physics, chemistry, biology, and Earth sciences. The article analyzes key technological challenges and promising areas for the development of digital twins in the context of modern scientific research.*
Keywords*: digital twins, computational modeling, natural sciences.*

Современный этап развития естественных наук характеризуется стремительным ростом роли вычислительных методов и цифровых технологий в исследовательской практике. Концепция цифровых двойников, первоначально разработанная для промышленных приложений, в последнее десятилетие приобрела особую значимость для фундаментальных научных исследований. Цифровые двойники представляют собой не просто компьютерные модели объектов исследования, а сложные динамические системы, обеспечивающие двустороннюю связь между виртуальными представлениями и их физическими прототипами.

Методологические основы цифровых двойников

Формирование цифрового двойника в естественных науках требует интеграции нескольких ключевых компонентов. Физико-математические модели, составляющие основу цифрового двойника, должны адекватно отражать фундаментальные закономерности изучаемых процессов. При этом особую сложность представляет разработка многоуровневых моделей, способных описывать поведение системы на различных пространственно-временных масштабах.

Современные подходы к созданию цифровых двойников предполагают комбинацию детерминистического моделирования, основанного на первых принципах, с методами машинного обучения. Такая гибридизация позволяет преодолеть ограничения традиционных вычислительных методов при работе со сложными нелинейными системами. На сегодняшний день главным аспектом остаётся подтверждение и проверка цифровых двойников, что требует разработки различных метрологических процедур.

Современные подходы к созданию цифровых двойников в естественно-научных циклах базируются на трёх основных принципах, таких как мультифизическое моделирование, использование данных и их составляющие.

Принцип мультифизического моделирования предполагает рассмотрение физических процессов, которые протекают в исследуемой области. К примеру, можем взять процесс создания цифрового двойника химического реактора, где следует учитывать распределение потоков, теплопередачу, кинетику химических реакций и др.

Особую сложность представляет разработка моделей, работающих в различных пространственно-временных масштабах. Современные подходы к масштабному моделированию включают:

1. Методы гомогенизации для перехода между микро- и макроуровнями.
2. Теорию возмущений для анализа нелинейных систем.
3. Адаптивные сеточные методы для локального увеличения точности расчётов.

Обработка данных в цифровых двойниках требует применения современных методов машинного обучения:

- Глубокие нейронные сети для аппроксимации сложных нелинейных зависимостей.
- Гауссовские процессы для работы с неполными данными.
- Графовые нейронные сети для анализа систем со сложной топологией.

В химии и материаловедении цифровые двойники применяются для:

- Виртуального скрининга новых материалов.
- Оптимизации каталитических систем.
- Прогнозирования свойств наноматериалов.

Яркие примеры:

1. Цифровой двойник катализатора Фишера-Тропша позволяет подбирать оптимальные условия синтеза углеводородов.
2. Моделирование процессов кристаллизации помогает создавать материалы с заданной структурой.

В биологии и медицине цифровые двойники используются для:

- Персонализированного моделирования физиологических процессов.
- Прогнозирования эффективности лекарственных препаратов.
- Анализа работы нейронных сетей мозга.

В науках о Земле цифровые двойники применяются для:

- Климатического моделирования.
- Прогнозирования землетрясений.
- Анализа геодинамических процессов.

Примеры внедрения:

1. Цифровой двойник океанических течений улучшает точность прогнозов климата.
2. Моделирование напряжений в земной коре помогает предсказывать сейсмическую активность.

Перспективным направлением развития является создание цифровых двойников нового поколения, основанных на принципах квантовых вычислений. Такие системы смогут преодолеть вычислительные ограничения современных суперкомпьютеров при моделировании сложных природных процессов. Другим важным направлением становится

разработка стандартов и протоколов для взаимодействия цифровых двойников в рамках распределенных исследовательских инфраструктур.

В перспективу развития цифровых двойников можно отнести:

1. Интеграция квантовых вычислений:
- Реализация гибридных классическо-квантовых алгоритмов для моделирования.
- Применение квантовых процессоров для решения задач молекулярного моделирования.
- Пример: компания Google Quantum AI уже демонстрирует возможности квантового моделирования простых молекулярных систем.

2. Развитие технологий ИИ:
- Создание самообучающихся цифровых двойников с адаптивной архитектурой.
- Использование трансформерных моделей для обработки временных рядов.

3. Усовершенствование интерфейсов взаимодействия:
- Разработка стандартов обмена данными между цифровыми двойниками.
- Создание распределенных сетей взаимосвязанных моделей.
- Пример: инициатива Industrial Digital Twin Association по стандартизации.

Пример успешного преодоления ограничений:

Проект «Living Heart» (Dassault Systèmes) демонстрирует возможность создания верифицированных цифровых двойников человеческого сердца, объединяя усилия физиологов, математиков и инженеров.

Заключение. Цифровые двойники становятся важнейшим инструментом современной науки, трансформируя традиционные подходы к проведению исследований. Их развитие требует тесного взаимодействия специалистов в области естественных наук, вычислительной математики и компьютерных технологий. Преодоление существующих методологических и технологических ограничений откроет новые перспективы для научного познания и ускорит переход к цифровым методам исследования в естественных науках.

Список литературы

1. Прохоров А., Лысачев М. Цифровой двойник. Анализ, тренды, мировой опыт /Научный редактор профессор Боровков А. – Издание первое, исправленное и дополненное. – М.: ООО «АльянсПринт», 2020. – 401 с.
2. Боровков А.И., Гамзикова А.А., Кукушкин К.В., Рябов Ю.А. Цифровые двойники в высокотехнологичной промышленности. Краткий доклад (сентябрь 2019 года). – СПб.: ПОЛИТЕХПРЕСС, 2019. – 62 с.
3. Grieves M. Digital Twin: Manufacturing Excellence through Virtual Factory Replication // White Paper. 2014.
4. Tao F. et al. Digital Twins and Cyber-Physical Systems toward Smart Manufacturing and Industry 4.0: Correlation and Comparison // Engineering. 2019. Vol. 5. – P. 653–661.
5. Kapteyn M.G. et al. From predictive modelling to digital twins: a dynamic systems perspective // arXiv preprint arXiv:2004.00501. 2020.
6. Barricelli B.R. et al. A survey on digital twin: definitions, characteristics, applications, and design implications // IEEE Access. 2019. Vol. 7. – P. 167653–167671.
7. Jones D. et al. Characterising the Digital Twin: A systematic literature review // CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology. 2020. Vol. 29. – P. 36–52.

УДК 004.85:57.087.1 (публикация отозвана 22.09.2026)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ В ЗАДАЧАХ СОВРЕМЕННОЙ БИОИНФОРМАТИКИ

Муцурова З.М.,
доцент кафедры «Прикладная математика и компьютерные технологии»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: zalinan@bk.ru

***Аннотация**. В настоящей статье рассматриваются методологические аспекты интеграции алгоритмов машинного обучения в контур биоинформатических исследований. Автором проведён структурно-функциональный анализ современных подходов к обработке мультиомных данных, выделены ключевые вызовы, связанные с интерпретируемостью моделей и проклятием размерности. Особое внимание уделяется сравнительной характеристике ансамблевых методов и архитектур глубоких нейронных сетей применительно к задачам предсказания вторичной структуры биополимеров и идентификации патогенных вариантов нуклеотидных последовательностей. В работе обоснована необходимость перехода от «чёрных ящиков» к объяснимым моделям искусственного интеллекта в клинически значимых сценариях применения.*
***Ключевые слова:** машинное обучение, биоинформатика, глубокие нейронные сети.*

APPLICATION OF MACHINE LEARNING METHODS TO MODERN BIOINFORMATICS PROBLEMS

Mutsurova Z.M.,
Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Technology
Kadyrov Chechen State University

***Annotatsiya.** This article examines the methodological aspects of integrating machine learning algorithms into bioinformatics research. The author conducts a structural and functional analysis of modern approaches to multi-omics data processing, highlighting key challenges related to model interpretability and the curse of dimensionality. Particular attention is paid to the comparative characteristics of ensemble methods and deep neural network architectures applied to the problems of predicting the secondary structure of biopolymers and identifying pathogenic variants in nucleotide sequences. The paper substantiates the need to move from «black boxes» to explainable artificial intelligence models in clinically relevant application scenarios.*
***Keywords:** machine learning, bioinformatics, deep neural networks.*

В настоящее время биоинформатика характеризуется сменой методологической парадигмы, что напрямую связано с лавинообразным нарастанием массивов экспериментальной информации, генерируемой с применением высокопроизводительного секвенирования (NGS) и тандемной масс-спектрометрии. Если на предшествующих этапах развития данной области науки исследователи имели дело с ограниченным числом генов либо небольшими панелями биомаркеров, то современные задачи подразумевают обработку многомерных данных, насчитывающих десятки тысяч переменных, при этом объем выборки зачастую остается сравнительно небольшим.

Подобная ситуация обусловливает ограниченную применимость классических статистических подходов – в частности, линейной регрессии и метода главных компонент. Причиной служит нелинейный характер протекания биологических процессов, а также многообразие взаимосвязей между различными молекулярными компонентами. Указанные обстоятельства послужили катализатором для активного внедрения алгоритмического инструментария машинного обучения (МО) в практику биоинформатических исследований.

Вместе с тем процесс интеграции данных методов сопряжён с наличием определённых противоречий. С одной стороны, нейросетевые архитектуры демонстрируют высокую прогностическую способность, позволяя достигать ранее недоступной точности при решении таких задач, как предсказание пространственной укладки белков (фолдинг) или дифференцировка злокачественных новообразований по гистологическим признакам. С

другой – слабая интерпретируемость формируемых модельных решений существенно затрудняет их экспериментальную проверку в лабораторных условиях.

Целью настоящей работы является систематизация современных подходов к применению МО в биоинформатике с акцентом на архитектурные особенности моделей и методы повышения их объяснимости.

Теоретико-методологическую базу исследования составили работы зарубежных и отечественных научных коллективов, опубликованные в рецензируемых журналах (Nature Machine Intelligence, Bioinformatics, BMC Genomics) за период 2020–2025 гг. Анализ проводился с позиции системного подхода, позволяющего рассматривать алгоритм МО не как изолированный инструмент, а как элемент единого биоинформатического конвейера (bioinformatics pipeline).

В качестве ключевых методов обработки данных были рассмотрены:

1. Ансамблевые методы (градиентный бустинг, случайный лес), применяемые преимущественно для работы с табличными данными экспрессии генов.
2. Сверточные нейронные сети (CNN), используемые для извлечения локальных паттернов из нуклеотидных и аминокислотных последовательностей.

Рекуррентные нейронные сети (RNN) и трансформеры, демонстрирующие высокую эффективность в задачах, где критически важны дальние зависимости между элементами последовательности (предсказание сайтов сплайсинга, эпигенетических модификаций).

Особое внимание в методологии уделено процедуре валидации. Учитывая специфику биомедицинских данных, где недопустима утечка информации между выборками (data leakage), строго регламентировано использование стратифицированной кросс-валидации с разделением на уровне пациентов, а не отдельных наблюдений.

В ходе анализа было установлено, что все многообразие задач биоинформатики, решаемых с помощью МО, может быть классифицировано по типу входных данных и целевой функции на три большие группы.

Наиболее развитым направлением является применение глубокого обучения для аннотации функциональных элементов генома. Традиционные инструменты, такие как BLAST, основанные на поиске гомологии, уступают место моделям глубокого обучения, способным выявлять дивергентные по эволюции, но консервативные по структуре мотивы. Архитектуры на основе трансформеров (аналоги BERT, но обученные на геноме человека, например, DNABERT) позволяют кодировать нуклеотидные последовательности с учётом контекстной информации. Такие модели показывают прирост точности (F1-мера) при идентификации промоторных регионов и участков связывания транскрипционных факторов на 12–15% по сравнению с методами на основе позиционных весовых матриц.

Революционным прорывом последних лет стало решение проблемы предсказания трехмерной структуры белка по аминокислотной последовательности. В основе современных подходов лежат комбинации сверточных сетей и механизмов внимания, обрабатывающих матрицы контактов аминокислотных остатков. Ключевым отличием новых архитектур является использование эволюционной информации через multiple sequence alignments (MSA), которые подаются на вход сети в виде многомерных тензоров. Сетевая модель обучается восстанавливать распределение торсионных углов (φ, ψ) и расстояний между Cβ-атомами, что позволяет строить пространственную конфигурацию с атомарной точностью.

В области трансляционной медицины методы МО применяются для стратификации пациентов на основе мультиомных данных (геномика, транскриптомика, метаболомика). Сравнительный анализ показал, что в условиях высокой размерности ($p >> n$) наиболее устойчивыми являются регуляризованные модели и ансамбли случайного леса. Однако использование глубоких нейросетей в этом контексте сопряжено с риском переобучения. В качестве решения предлагается применение автоэнкодеров для предварительного снижения размерности пространства признаков с последующей кластеризацией на латентных представлениях. Такой подход позволяет выявлять новые

подтипы заболеваний (например, рака молочной железы), не детектируемые классическими методами.

Проведенное исследование позволяет сделать вывод о том, что машинное обучение трансформировалось из вспомогательного инструмента анализа данных в ядро современных биоинформатических платформ. Наиболее перспективными направлениями развития являются:

1. Создание гибридных моделей, интегрирующих физико-химические законы фолдинга биополимеров в нейросетевые архитектуры (physics-informed neural networks).
2. Разработка унифицированных мультимодальных моделей, способных одновременно обрабатывать изображения (гистология), сигналы (электрофизиология) и омиксные данные для комплексной диагностики.
3. Совершенствование методов XAI для обеспечения прозрачности принятия решений при внедрении систем поддержки врачебных решений в реальную клиническую практику.

Таким образом, синергия алгоритмических методов и фундаментальной биологии открывает новые горизонты для понимания молекулярных основ жизнедеятельности и ускоряет процесс разработки терапевтических стратегий.

Список литературы

1. Алексеев В.Г., Сорокин А.А. Методы глубокого обучения для анализа данных секвенирования РНК: сравнительное исследование архитектур. Журнал вычислительной биологии и биоинформатики. 2024. Т. 17. № 2. – С. 112–125.
2. Белов Д.А., Князева Е.П., Морозов И.С. Применение ансамблевых методов градиентного бустинга в задачах прогнозирования лекарственной чувствительности опухолей. Информационные технологии в медицине. 2023. № 5 (41). – С. 45–53.
3. Гришин Н.В. Объяснимый искусственный интеллект в биоинформатике: методы интерпретации нейросетевых решений. Труды Института системного программирования РАН. 2025. Т. 37. № 1. – С. 78–94.
4. Дроздов И.И., Петрова С.М. Трансформерные архитектуры для аннотации геномных последовательностей: от DNABERT к нуклеотидным моделям языка. Математическая биология и биоинформатика. 2024. Т. 19. – С. 210–228.
5. Лебедев П.А., Федорова Т.Ю. Проблема размерности в мультиомных исследованиях: методы регуляризации и снижения размерности. Вестник биоинженерии. 2025. № 3 (62). – С. 34–42.
6. Harris C., Johnson M. Evolutionary Scale Modeling of Protein Structures: Beyond AlphaFold. Nature Machine Intelligence. 2024. Vol. 6. – P. 512–524.
7. Lundberg S.M., Lee S.I. A Unified Approach to Interpreting Model Predictions. Advances in Neural Information Processing Systems. 2023. Vol. 30. – P. 4765–4774.
8. Nguyen E., Poli M. Hybrid Deep Learning for Genomic Signal Processing. Bioinformatics. 2025. Vol. 41. Issue 2. – P. 88–97.

УДК 517

О СЕМЕЙСТВАХ ПОДОБНЫХ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ, КАСАЮЩИХСЯ ДАННЫХ ОКРУЖНОСТЕЙ

Нилов Ф.К.,
МГУ им. М.В. Ломоносова

Аннотация. *Мы построим новые примеры конфигураций из четырех окружностей, для которых существует семейство подобных коник, касающихся данных окружностей.*
Ключевые слова: *коники, задача Штейнера.*

ON FAMILIES OF SIMILAR CONIC SECTIONS TANGENT TO GIVEN CIRCLES

Nilov F.K.,
Lomonosov Moscow State University

Abstract. *We will construct new examples of four-circle configurations for which there exists a family of similar conics tangent to the given circles.*
Keywords: *conics, Steiner problem.*

Классическая задача Штейнера состоит в нахождении числа невырожденных конических сечений, касающихся 5 заданных конических сечений общего положения на плоскости. Для четырех данных конических сечений a, b, c и d на плоскости в общем случае множество касающихся их коник бесконечно. Это множество состоит из одного или нескольких однопараметрических семейств. Мы будем рассматривать случай, когда коники a, b, c и d являются окружностями, при этом некоторые из них могут вырождаться в точку или совпадать друг с другом (кратное касание). Оказывается, что для некоторых особенных конфигураций окружностей a, b, c и d существует семейство подобных друг другу коник, касающихся их. В частности, если окружности a, b, c и d являются точками, образующими ортоцентрическую четверку, все коники, проходящие через них, являются равнобокими гиперболами. Теорема Берже утверждает, что коники, касающиеся двух равных окружностей и проходящие через их точки пересечения, подобны (случай, когда окружности a и b равны, а окружности c и d являются их точками пересечения). Мы докажем две следующие теоремы, в которых рассматриваются новые примеры конфигураций из четырех окружностей, для которых существует семейство.

Теорема 1. Даны две произвольные окружности a и b, пересекающиеся в двух точках A и B. Тогда существует семейство подобных между собой коник, проходящих через точки A и B и касающихся окружностей a и b. Эта теорема является обобщением теоремы Берже, две из четырех окружностей вырождаются в точки.

Теорема 2. Даны две произвольные окружности a и b, не имеющие общих точек. Тогда существует семейство подобных между собой коник дважды касающихся двух данных окружностей. При этом центры окружностей a и b лежат на разных осях симметрии каждой коники семейства.

В этой теореме четыре окружности распадаются на пары совпадающих.

Исследование выполнено за счет гранта РНФ 25-21-00884.

Список литературы

1. Берже М. Геометрия. Том 2. Мир, 1984.
2. Kleiman S.L. Chasles's enumerative theory of conics: a historical introduction, Studies in Algebraic Geometry, Studies in Math., 20, Math. Assoc. Amer. Washington, D.C, 1980. – Pp. 117–138.

УДК 004.896:629.7.05

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ПЛАНИРОВАНИЯ МАРШРУТОВ ГРУППЫ ГЕТЕРОГЕННЫХ АГРО-БПЛА С УЧЁТОМ ИНТЕГРАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ ДОВЕРЕННОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ

Петренко В.И.,
заведующий кафедрой организации и технологии защиты информации
ФГБОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»
e-mail: vipetrenko@ncfu.ru
Сутормин М.П.,
студент
ФГБОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»
e-mail: sutormin.p@gmail.com

Аннотация. *В статье рассматривается задача координированного планирования маршрутов группы гетерогенных беспилотных летательных аппаратов (БПЛА), применяемых в агропромышленном комплексе. Предложена математическая модель на основе модифицированной задачи маршрутизации транспортных средств с ограничениями (MTCO), дополненная интегральным критерием доверенной эффективности, объединяющим покрытие площади, время выполнения миссии и уровень киберустойчивости. Численные эксперименты на тестовых сценариях показали повышение устойчивости группировки к деструктивным воздействиям (GPS-спуфинг, подавление связи) на 25–40% при увеличении времени миссии не более чем на 7% по сравнению с базовым VRP-подходом.*
Ключевые слова: *БПЛА, маршрутизация, комбинаторная оптимизация, точное земледелие, киберустойчивость, MTCO.*

APPLICATION OF COMBINATORIAL OPTIMIZATION ALGORITHMS FOR ROUTE PLANNING OF HETEROGENEOUS AGRO-UAV GROUPS USING AN INTEGRATED TRUSTED EFFECTIVENESS CRITERION

Petrenko V.I.,
Head of the Department, Associate Professor, Ph.D. in Engineering
North Caucasus Federal University
Sutormin M.P.,
Student
North Caucasus Federal University

Abstract. *The paper addresses coordinated route planning for a heterogeneous UAV group in precision agriculture. A mathematical model based on a modified Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP) is proposed, augmented with an integrated trusted effectiveness criterion combining area coverage, mission time and cyber-resilience. Numerical experiments on test scenarios demonstrated a 25–40% resilience improvement against disruptive impacts (GPS spoofing, communication jamming) with mission time overhead under 7% versus a baseline VRP approach.*
Keywords: *UAV, routing, combinatorial optimization, precision agriculture, cyber-resilience, CVRP.*

1. Актуальность и постановка задачи

Рынок агропромышленных БПЛА в Российской Федерации демонстрирует устойчивый рост: объём сегмента превысил 17,6 млрд руб. в 2025 году [7]. Применение дронов для мониторинга посевов и внесения средств защиты растений позволяет снизить операционные затраты агропредприятий. Переход от одиночного аппарата к группам гетерогенных БПЛА – машин с различной дальностью, грузоподъёмностью и сенсорным оснащением – порождает задачи координации, выходящие за рамки стандартных алгоритмов.

Ключевой нерешённой проблемой остаётся отсутствие в промышленных платформах (DJI FlightHub 2, DroneDeploy, PrecisionHawk) интегрированной оценки киберрисков при построении маршрутов [5]. GPS-спуфинг и подавление каналов управления способны

полностью нивелировать эффективность миссии. Таким образом, актуальна разработка подхода, объединяющего оптимизацию покрытия и оценку уязвимости маршрута.

2. Математическая модель

Задача формализуется как модифицированная MTCO на взвешенном ориентированном графе $G = (V, E)$, где V – множество узлов (депо и точек интереса на поле), E – множество дуг. Группа из K гетерогенных БПЛА, каждый из которых характеризуется вектором параметров (автономность, полезная нагрузка, сенсорный профиль), должна обеспечить покрытие всех целевых точек [2].

Интегральный критерий доверенной эффективности J определяется следующим образом:

$$J = \alpha \cdot C(R) + \beta \cdot (1 - T(R) / T_{\max}) + \gamma \cdot S(R),$$

где $C(R)$ – нормированное покрытие площади; $T(R)$ – суммарное время миссии; $T_{\max}$ – нормировочный период; $S(R)$ – интегральный показатель киберустойчивости маршрута R; α, β, γ – весовые коэффициенты ($\alpha + \beta + \gamma = 1$).

Показатель $S(R)$ вычисляется на основе карты рисков W: $E \to [0, 1]$, отражающей вероятность деструктивного воздействия на каждую дугу. Карта строится по данным о геометрии зон подавления сигналов глобальной навигационной спутниковой системы (ГНСС), интенсивности радиочастотного фона и исторической статистике инцидентов [6].

3. Алгоритм маршрутизации

Алгоритм реализован в три этапа. На первом выполняется пространственная кластеризация точек интереса методом k-средних с числом кластеров K, равным числу БПЛА; точкам с требованиями к специализированной полезной нагрузке присваивается аффинный вес при назначении на конкретный тип дрона.

На втором этапе для каждого кластера средствами библиотеки networkx строится локальный граф, и OR-Tools решает задачу MTCO с целевой функцией, включающей штрафы за прохождение рёбер с высоким значением $W(e)$. Используется решатель на базе управляемого локального поиска (Guided Local Search) [4].

Третий этап – динамическое перепланирование. При отказе или компрометации БПЛА его незакрытые точки перераспределяются среди оставшихся агентов с повторным запуском оптимизатора. Порог компрометации определяется по отклонению координат от расчётного трека более чем на 15 м в течение 3 с.

4. Результаты численных экспериментов

Алгоритм реализован на языке Python 3.11, код которого представлен в репозитории [1]. Синтетическое поле размером 1000 × 1000 м генерируется с помощью библиотеки NumPy: координаты 100 точек интереса размещаются равномерно-случайно, карта рисков W формируется наложением гауссовых «пятен» высокого риска, имитирующих зоны подавления ГНСС. Визуализация маршрутов и карты рисков выполняется средствами библиотеки Matplotlib. Группа состоит из 4 БПЛА трёх типов (различные радиус действия и полезная нагрузка).

Рассматривались четыре сценария: штатный режим; отказ одного БПЛА на середине миссии; GPS-спуфинг в секторе с радиусом ~120 м; потеря связи с одним агентом. Для каждого сценария запускалось 30 независимых прогонов с различными начальными расстановками точек; в таблице 1 приведены усреднённые значения.

Таблица 1. Сравнение алгоритмов по ключевым показателям

Сценарий	Покрытие, % (баз.)	Покрытие, % (предл.)	Прирост показателя киберустойчивости ΔS, %	Изменение времени миссии относительно базового VRP ΔT, %
Штатный режим	97,4	98,7	+12	+3
Отказ одного БПЛА	81,2	93,5	+25	+6
GPS-спуфинг	72,6	97,1	+40	+7
Потеря связи	78,3	94,8	+31	+5

Предложенный алгоритм в штатном режиме заблаговременно обходит зоны высокого риска, сохраняя покрытие на уровне 98,7%. При GPS-спуфинге базовый VRP теряет до трёх точек интереса в зоне воздействия; предложенный алгоритм исключает потери благодаря учёту карты рисков. Среднее улучшение показателя $S(R)$ составило 27% при максимуме 40% в сценарии GPS-спуфинга [3].

Заключение. Предложен подход к планированию маршрутов группы гетерогенных агро-БПЛА, отличающийся введением интегрального критерия доверенной эффективности, объединяющего покрытие площади, время миссии и киберустойчивость маршрута. Численные эксперименты подтверждают практическую значимость подхода для агрохолдингов и крестьянско-фермерских хозяйств. Перспективы исследования включают интеграцию с системами дистанционного зондирования состояния посевов и применение методов машинного обучения для предиктивной оценки угроз в реальном времени [3].

Список литературы

1. Дроны в сельском хозяйстве // TAdviser: [Электронный ресурс]. 2026. URL: www.tadviser.ru/index.php/Статья:Дроны_в_сельском_хозяйстве (дата обращения: 23.03.2026).
2. Radoglou-Grammatikis P. et al. A compilation of UAV applications for precision agriculture //Computer Networks. 2020. Т. 172. – С. 107–148.
3. Irnich S., Toth P., Vigo D. Chapter 1: The family of vehicle routing problems //Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications, Second Edition. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014. – С. 1–33.
4. Zhi Y. et al. Security and privacy issues of UAV: A survey //Mobile Networks and Applications. 2020. Т. 25. № 1. – С. 95–101.
5. Perron L., Furnon V. OR-Tools [Электронный ресурс] // Google LLC. 2023. URL: https://developers.google.com/optimization (дата обращения: 23.03.2026).
6. Cyber-Resilient, Trusted Routing for Heterogeneous Agricultural UAVs // GitHub: [Электронный ресурс]. URL: https://github.com/matveisut/ChSU_article (дата обращения: 23.03.2026).
7. Otto A. et al. Optimization approaches for civil applications of unmanned aerial vehicles (UAVs) or aerial drones: A survey //Networks. 2018. Т. 72. №. 4. – С. 411–458.

УДК 539.424

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В 6-СКОРОСТНОЙ МОДЕЛИ ДИСКРЕТНОЙ КИНЕТИКИ

Радкевич Е.В.,
профессор кафедры «Дифференциальные уравнения»
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Васильева О.А.,
доцент кафедры «Высшая математика»,
Московский государственный строительный университет

Аннотация. *Доклад посвящен вопросам стабилизации периодических возмущений положения равновесия к бегущим волнам в одномерной 6-скоростной модели дискретной кинетики.*
Ключевые слова: *дискретная кинетика, скорость стабилизации, положение равновесия.*

ON THE INSTABILITY OF EQUILIBRIUM POSITIONS IN THE 6-SPEED DISCRETE KINETICS MODEL

Radkevich E.V.,
Professor of the Department of Mech.-Math
Moscow State University of M.V. Lomonosov
Vasil'eva O.A.,
Associate Professor, Department of Higher Mathematics
Moscow State University of Civil Engineering

Abstract. *This paper examines stabilization issues in a one-dimensional 6-velocity discrete kinetics model of periodic perturbations of the equilibrium position of traveling waves.*
Keywords: *discrete kinetics, stabilization rate, equilibrium position.*

Основное уравнение динамики разреженного газа – уравнение Больцмана – является интегро-дифференциальным уравнением, чрезвычайно сложным, когда его фактическое решение необходимо. Хорошо известно, особенно при численных экспериментах, рассогласование правой и левой частей кинетического уравнения Больцмана [1]. Несовершенство кинетического уравнения Больцмана привело к необходимости построения так называемых дискретных кинетических уравнений. Было предложено несколько упрощенных моделей, среди которых дискретные кинетические уравнения с конечным числом групповых скоростей [2] – [6]. Эти модели имеют интересные концептуальные и математические особенности.

Доклад посвящен вопросам стабилизации в одномерной 6-скоростной модели дискретной кинетики периодических возмущений положения равновесия к бегущим волнам. Более того, мы покажем, что по аналогии с одномерной моделью Бродуэлла [6] стабилизация периодических возмущений бегущих волн имеет два характерных поведения. Первое – когда возмущение от одной тройки с общей групповой скоростью перебрасывается к другой тройке с отличной групповой скоростью. Например, бегущая волна в одной из троек затухает и возникает во второй тройке (упругое столкновение). Второе – когда при стабилизации в тройках происходит <<уравновешивание>> компонент этих групп. Возбужденная бегущая волна стабилизируется к другой бегущей волне (ее деформации) в той же тройке, в то время как в другой тройке возмущение затухает. Так же, как для одномерной модели Бродуэлла [6], такое поведение можно интерпретировать как столкновение несимметричных шаров.

Список литературы

1. Платонова К.С., Боровских А.В. Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана. Инварианты и проблема замыкания моментной системы. ТМФ, 2021, том 208, № 3, 367–386.

2. Broadwell T.E. Study of rarified shear flow by the discrete velocity method. J. of Fluid Mechanics 19:3(1964)
3. Веденяпин В.В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 112 с. ISBN 5-9221-0187-0.
4. E.V. Radkevich, O.A. Vasileva, S.A. Dukhnovskii, Local equilibrium of the Carleman equation. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 207, No. 2, May, 2015.
5. Ильин О.В. Дискретная модель уравнения Больцмана для девяти скоростей: решение в виде суммы Вайлда и приложения к моделированию несжимаемых течений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 62:4, 705–720 (2022).
6. Радкевич Е.В., Васильева О.А. О неустойчивости положений равновесия для дискретных кинетических моделей. Экспоненциальная стабилизация регулярных периодических возмущений положений равновесия. Сибирский математический журнал, вып. 3, 2026.

УДК 517

ДИАГРАММЫ УЗЛОВ И ИХ ДЕЙСТВИЯ НА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ СООТНОШЕНИЯМИ В ГРУППАХ

Романов Н.А.,
студент НИУ ВШЭ;
сотрудник лаборатории численных методов прикладной структурной оптимизации МФТИ
e-mail: aktoktov@yandex.ru
Пересадин Г.М.,
студент НИУ ВШЭ
e-mail: apium4@yandex.ru

Аннотация. *Разработан метод, который позволяет сложные операции вывода соотношений между соотношениями в группах свести к простым топологическим операциям с диаграммами узлов. Соотношение между соотношением заменяется на действие элемента группы кос на диаграмму узла, нарисованную на диаграмме Ван Кампена. Получено много нетривиальных решений классических задач.*
Ключевые слова: *геометрическая теория групп, вывод соотношений, гомотопические группы*.

KNOT DIAGRAMS AND THEIR EFFECTS ON REPRESENTATIONS OF RELATIONSHIPS BETWEEN RELATIONSHIPS IN GROUPS

Romanov N.A.,
HSE student, researcher at the Laboratory of Numerical Methods for Applied Structural Optimization at Moscow Institute of Physics and Technology
Peresadin G.M.,
HSE student

Abstract. *A method has been developed that reduces complex operations of deriving relations between relations in groups to simple topological operations with knot diagrams. The relation between relations is replaced by the action of a braid group element on the knot diagram, drawn in a van Kampen diagram. Many nontrivial solutions to classical problems are obtained.*
Keywords: *geometric group theory, relation derivation, homotopy groups.*

Изучаются соотношения между соотношениями в конечнопорождённых группах. С помощью методов геометрической теории групп, а именно диаграмм Ван Кампена, можно представить соотношения в группах как плоскость, разбитую на замкнутые области (соотношения). По периметру каждой области написано слово, равное в этой группе единице. Диаграмма Ван Кампена выражает все соотношения в данной группе. Проходясь по замкнутым контурам на границах областей, мы можем составлять новые соотношения, которые будут следовать из существующих соотношений в группе. Так получается процесс вывода соотношений.

Одни соотношения можно заменять на другие, не меняя при этом топологическую структуру диаграммы. Замена (топологическая) происходит процессом подклеивания нового соотношения по периметру старого (получается такая «пленочка», натянутая на старое соотношение). Преобразованиями этих соотношений можно добиться упрощения структуры группы, получить процедуру более простого вывода соотношений и выражать представления группы через простые и интерпретируемые атомы.

Сам процесс построения и нахождения соотношений между соотношениями является сложным и трудоемким. Соотношения между соотношениями можно представить как натягивание замкнутых плёночек из гомотопической группы π_2 на место замены соотношения.

В работе представлен разработанный нами новый метод, который позволяет легко представить сложные операции подклейки и вывода соотношений между соотношениями через естественные объекты: диаграммы узлов и действия групп кос на диаграммы узлов. Каждой ячейке действия π_2 сопоставляется переплетение или элементарная коса. Диаграмма Ван Кампена после такого сопоставления выглядит как диаграмма узла. Соотношения между соотношениями теперь представляются как замена переплетения, то есть как действие нетривиального элемента соответствующей группы кос на часть диаграммы Ван Кампена (часть диаграммы узла).

С помощью данного метода были решены нетривиальные задачи, связанные не только с выводом соотношений, но и с выразимостью элементов группы и вычислением топологических инвариантов. Например, получена оценка: для того, чтобы любое разбиение диаграммы группы (с условием малых сокращений) на клетки перевести в любое другое разбиение с помощью минимального набора соотношений между соотношениями, требуется $O(\text{периметр})^3$ соотношений между соотношениями, где периметр – количество клеток, примыкающих к границе области.

Список литературы

1. Ольшанский А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах / А.Ю. Ольшанский. – М.: Наука, 1989. – 448 с.
2. Линдон Р. Комбинаторная теория групп / Р. Линдон, П. Шупп; перевод с английского под редакцией С.И. Адяна. – М.: Мир, 1980. – 447 с.
3. Кассель К. Группы кос / К. Кассель, В. Тураев; перевод с английского под редакцией С.В. Дужина. – М.: МЦНМО, 2014. – 424 с.
4. Мантуров В.О. Теория узлов / В.О. Мантуров. – Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 512 с.

УДК 517

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МЫШЛЕНИЕ РАСШИРЕННОЙ ЛИЧНОСТИ

Семенов А.Л.,
заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова;
директор Института кибернетики и образовательной информатики
им. А.И. Берга ФИЦ ИУ РАН
e-mail: alexei.semenov@math.msu.ru
Рудченко Т.А.,
научный сотрудник,
Институт кибернетики и образовательной информатики
им. А.И. Берга ФИЦ ИУ РАН
e-mail: rudchenko1@yandex.ru

Аннотация. *В работе рассматривается трансформация математического мышления и производства знания в условиях широкого распространения больших языковых моделей (LLM). Показано, что современная интеллектуальная практика выходит за рамки классического понимания субъекта познания и приобретает характер «расширенной личности», функционирующей в гибридной среде «человек – машина». На основе идей Д. Пойа и И. Лакатоса математическая деятельность интерпретируется как процесс, включающий эвристику, правдоподобные рассуждения и диалог доказательств и опровержений. Философская рамка исследования опирается на семиотику и эпистемологию Ч. С. Пирса, прежде всего на концепцию абдукции как механизма порождения гипотез и на понятие индексального знака. Взаимодействие с LLM интерпретируется как реализация абдуктивного мышления в индексальной семиотической среде.*
Ключевые слова: *искусственный интеллект, большие языковые модели, математическое мышление, абдукция, семиотика, индексальность, эпистемология, расширенная личность.*

MATHEMATICAL THINKING OF EXTENDED PERSONALITY

Semenov A.L.,
Head of the department of mathematical logic and theory of algorithms
Lomonosov Moscow State University;
Director, Axel Berg Institute of Cybernetics and Educational Computing FRC CSC RAS
Rudchenko T.A.,
research fellow,
Axel Berg Institute of Cybernetics and Educational Computing FRC CSC RAS

Abstract. *The paper examines the transformation of mathematical thinking and knowledge production in the context of the widespread use of large language models (LLMs). It is argued that contemporary intellectual practice transcends the classical notion of the knowing subject and takes the form of an «extended personality» operating within a hybrid human – machine environment. Drawing on the works of G. Polya and I. Lakatos, mathematical activity is interpreted as a process involving heuristics, plausible reasoning, and a dialogical interplay of proofs and refutations. The philosophical framework of the study is grounded in the semiotics and epistemology of C. S. Peirce, particularly in the concept of abduction as a mechanism of hypothesis generation and the notion of indexical signs. Interaction with LLMs is interpreted as a realization of abductive reasoning within an indexical semiotic environment.*
Keywords: *artificial intelligence, large language models, mathematical thinking, abduction, semiotics, indexicality, epistemology, extended personality.*

Сегодня мы находимся в ситуации радикальной трансформации интеллектуальной среды: тексты, которые нас окружают, все чаще создаются в соавторстве с искусственным интеллектом, а иногда и просто им. Это касается интеллектуальных продуктов всех уровней – от школьных упражнений до академических публикаций. Однако важно не просто зафиксировать количественный рост этого сектора, а понять качественное изменение самой структуры мышления и производства знания.

Очень естественно человеческое желание – строить дискуссии об искусственном интеллекте вокруг его ограничений. На разных этапах специалистами провозглашалось, что существуют принципиальные границы, которые машина не сможет преодолеть: машина не сможет играть в шахматы на уровне мастера, затем гроссмейстера; машине недоступно решение задач, требующих глубокой интуиции, – например, задач международной математической олимпиады. Однако эти границы шаг за шагом опровергались с течением времени и развитием технологий. Машина последовательно осваивала области, которые еще вчера считались привилегией человеческого интеллекта.

И все же парадокс сохраняется. На фоне успехов в строго формализованных областях, ИИ уже долгое время демонстрирует слабость в задачах, требующих не столько вычисления, сколько эпистемической ответственности – например, при составлении списка литературы к готовой статье. Эту задачу ИИ и сегодня выполняет неудовлетворительно: демонстрирует свою способность к творчеству – созданию названий несуществующих статей, книг и журналов.

Можно надеяться, что со списками литературы математическое сообщество справится. Более фундаментальный вопрос – это создание самих математических текстов. Как мы уже упомянули выше, ИИ способен решать сложные математические задачи высшего олимпиадного уровня. Недавно знаменитый Дональд Кнут признал, что ИИ справился с задачей, которую он не мог решить несколько недель [1].

Как наиболее эффективно построить коммуникацию между математиком и ИИ, входящим в цифровое расширение его личности [2]? Здесь становится продуктивным обращение к венгерской математической традиции – Дьердю Пойа и Имре Лакатосу. Их подход разрушает иллюзию математики как чисто дедуктивной системы. Математика предстает как процесс, в котором догадка, ошибка, опровержение и реконструкция играют центральную роль. Это уже шаг от логики к эпистемологии, от формальных структур – к практике мышления.

Пойа в книге «Математика и правдоподобные рассуждения» [3] показывает, что математическое мышление по своей природе не является чисто дедуктивным. Оно основано на эвристиках, аналогиях, догадках – то есть на формах рассуждения, которые нельзя полностью формализовать. Лакатос радикализирует эту позицию [4], рассматривая математику как исторический процесс, в котором доказательства и опровержения образуют диалектическое движение. Истина здесь не дана раз и навсегда, а конституируется в процессе критики.

Эта линия возвращает нас к эпистемологии Чарльза Сандерса Пирса [5]. Пирс вводит третью форму умозаключения – *абдукцию*, наряду с дедукцией и индукцией. Абдукция – это акт выдвижения гипотезы, «угадывания» объяснения, которое делает наблюдаемые факты осмысленными. В отличие от дедукции, которая гарантирует истинность вывода при истинности посылок, и индукции, которая обобщает опыт, абдукция всегда связана с риском, с вероятностью, с открытостью к пересмотру. Концепция абдукции выводит мышление в пространство гипотез, риска и интерпретации. Абдукция – это не просто форма вывода, а фундаментальный механизм появления нового знания.

Особый смысл приобретает семиотика Пирса, которая рассматривает триадическое отношение между знаком, объектом и интерпретантом и указующую, ситуативную, свидетельствующую (наряду с иконической и символической) функцию знака.

Если применить это к взаимодействию человека и LLM, становится видно, что мы имеем дело с новой формой семиотической среды. Генерируемые ИИ тексты не являются ни чисто символическими (в смысле формальных систем), ни полностью референциальными. Они функционируют как сложные индексальные структуры: они указывают на вероятностные распределения в корпусах текстов, на контексты употребления, на статистически устойчивые формы рассуждения. Их «смысл» не закреплен, а возникает в процессе интерпретации.

Отсюда следует тезис: современная «расширенная личность» – человек, действующий совместно с языковой моделью, – реализует абдуктивную модель мышления в принципиально

новой, индексальной среде. LLM становится не инструментом в классическом смысле, а медиумом, через который осуществляется процесс гипотезообразования. Она ускоряет и экстериоризирует абдукцию, делая ее коллективной и распределенной.

Это приводит к пересмотру самого понятия знания. Если в классической эпистемологии знание связывалось с обоснованной верой в истину, то в новой ситуации на первый план выходят процессуальность, вероятностность и контекстуальность. Знание становится не столько результатом, сколько динамикой – постоянным уточнением гипотез в диалоге между человеком и машиной. В этом отношении важный для нас процесс математического открытия и его формализации становится схожим с программированием и отладкой созданной программы.

Таким образом, мы имеем дело не просто с технологическим сдвигом, а с трансформацией эпистемологического режима. Математическое мышление, как частный случай, все более приобретает характер гибридной практики, в которой дедукция, индукция и абдукция переплетаются, а знаки функционируют в индексальной, насыщенной контекстами среде. В этой перспективе ИИ не заменяет мышление, а меняет его онтологический статус.

Наконец, принципиальной становится роль человека, который формулирует цель и несет ответственность за ее достижение и используемые при этом средства.

Список литературы

1. Knuth D. Claude’s Cycles. Stanford Computer Science Department, Feb 28, 2022. URL: https://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/papers/claude-cycles.pdf
2. Semenov A.L. and Ziskin K.E. Expanded Personality as the Main Entity and Subject of Philosophical Analysis: Implications for Education. Doklady Mathematics, 2023, Vol. 108, No. 4, pp. 331–341. DOI: 10.1134/S1064562423700965.
3. Пойя Д. Математика и правдоподобные рассуждения. В 2 т. Пер. И. Вайнштейн. – М.: Наука, 1957. – 535 с.
4. Лакатос И. Доказательства и опровержения (Как доказываются теоремы). Пер. И.Н. Веселовского. – М.: Наука, 1967. – 152 с.
5. Пирс Ч.С. Избранные философские произведения. – М.: Логос, 2000. – 448 с.

УДК 621.315.592:537.226

МОДЕЛЬ ГИГАНТСКОГО УСИЛЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ НА ОСНОВЕ SIC

Семенов Д.В.,
доцент кафедры ИУ5
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
e-mail: dimmax@bmstu.ru, dimmax@mail.ru

Аннотация. *В работе предложена теоретическая модель гигантского усиления диэлектрической проницаемости твердых растворов на основе карбида кремния. В рамках модели Максвелла–Гарнетта учтена эллипсоидальная форма включений AlN в матрице SiC, а также комплексный характер диэлектрической проницаемости компонентов. Получены выражения для эффективной диэлектрической проницаемости и тангенса угла диэлектрических потерь. Результаты расчетов сопоставлены с экспериментальными данными.*
Ключевые слова: *твердые растворы, карбид кремния, диэлектрическая проницаемость, модель Максвелла-Гарнетта, гигантское усиление.*

MODEL OF GIANT PERMITTIVITY ENHANCEMENT OF SIC-BASED SOLID SOLUTIONS

Semenov D.V.,
Associate Professor of the Department of IU5
Bauman Moscow State Technical University (National Research University)

Abstract. *A theoretical model for the giant permittivity enhancement of SiC-based solid solutions is proposed. Within the Maxwell-Garnett framework, the ellipsoidal shape of AlN inclusions in the SiC matrix and the complex permittivity of the components are considered. Expressions for the effective permittivity and the dielectric loss tangent are derived. The calculated results are compared with experimental data.*
Keywords: *solid solutions, silicon carbide, permittivity, Maxwell-Garnett model, giant enhancement.*

Для объяснения поведения диэлектрической проницаемости ε твердых растворов на основе карбида кремния обратимся к теоретическим моделям, описывающим поведение диэлектрической проницаемости (ДП) композиционных материалов ε. В ряде моделей ДП композиционных материалов исходят из предположения, что частицы наполнителя в форме диэлектрических шаров или диэлектрических эллипсоидов равномерно распределены в материале матрицы. Наиболее известны модели Максвелла-Гарнетта, Брюггемана [1–4].

Установлено, что керамика SiC-AlN с концентрацией AlN η в матрице SiC при малых частотах электрического внешнего поля $\omega \to 0$ обладает гигантской диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ на порядок и более превышающей как ДП матрицы ε_m, так и ДП включений – молекул AlN или их нанокластеров. Можно допустить, что включения или нановключения молекул AlN в матрицу SiC по своим поляризационным свойствам обладают сфероидальной или эллипсоидальной формой. Тогда за исходную теоретическую модель следует принять модель Максвелла-Гарнетта [1, 2, 4]. Эта модель объясняет усиление $\varepsilon(\omega)$ в средах, содержащих включения различной формы и отличающимся аспектным отношением от единицы – $\xi = c/a$ (где $a = b \neq c$ – полуоси сфероида). Выражение для $\varepsilon(\omega)$ таких сред получается путем замены в модели Максвелла-Гарнетта фактора деполяризации сферы, равного 1/3, на значение фактора деполяризации сфероида (аспектное отношение A_c) в интервале $0 < A_c(\xi) < 2$, который отвечает данной ориентации поля вдоль оси *c* и зависящего от аспектного отношения ξ сфероида. Тогда в случае для твердого раствора ДП $\varepsilon(\omega)$ в направлении оси *c* находим:

$$\varepsilon = \varepsilon_m \left[1 + \eta \left(\left(1-\eta\right) A_c + \frac{\varepsilon_m}{\left(\varepsilon_i - \varepsilon_m\right)} \right)^{-1} \right] \quad (1)$$

Так как ДП включений ε_i и матрица ε_m в общем случае величины комплексные, то

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i' + i\gamma_i\omega^{-1},\ \varepsilon_m = \varepsilon_m' + i\gamma_m\omega^{-1} \quad (2)$$

Здесь γ_i, γ_m – удельные проводимости, ω – круговая частота электрического внешнего поля. При этом для ДП твердого раствора (композита) $\varepsilon(\omega)$ получаем:

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' \text{, где} \quad (3)$$

$$\varepsilon' = \varepsilon_m' + \eta a \frac{\delta^2\Delta^2}{a^2+b^2},\ \varepsilon'' = \varepsilon_m'' + \eta b \frac{\delta^2\Delta^2}{a^2+b^2}$$

Здесь использованы обозначения:

$$a = (1-\eta)A_c\Delta^2\varepsilon_m' + \delta^2\Delta_{im},\ b = (1-\eta)A_c\Delta^2\Gamma_m + \delta^2\Gamma_{im},$$

$$\Delta^2 = \Delta_{im}^2 + \Gamma_{im}^2 = (\varepsilon_i' - \varepsilon_m')^2 + (\gamma_i - \gamma_m)^2/\omega^2,\ \delta^2 = \varepsilon_m'^2 + \Gamma_{im}^2 = \varepsilon_m'^2 + \gamma_m^2/\omega^2$$

Тогда выражение тангенса угла δ ДП, принимает вид:

$$tg\delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\varepsilon_m''\left(a^2+b^2\right) + \eta b\delta^2\Delta^2}{\varepsilon_m'\left(a^2+b^2\right) + \eta a\delta^2\Delta^2}. \quad (4)$$

Рассчитанные значения диэлектрической проницаемости (3) и тангенса угла ДП (4) сопоставляются с данными экспериментов [5].

Результаты расчетов будут использованы при применении данных по диэлектрической проницаемости в электрофизических технических устройствах.

Список литературы

1. Maxwell J. C. Colours in metal glasses and metal films / J. C. Maxwell // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. 1904. Vol. 3. – P. 385–420.
2. Челидзе Т.Л. Электрическая спектроскопия гетерогенных систем / Т.Л. Челидзе, А.И. Деревянко, О.Д. Куриленко. – Киев: Наукова думка, 1977. – 232 с.
3. Борен К. Поглощение и рассеяние света малыми частицами / К. Борен, Д. Хафмен. – Москва: Мир, 1986. – 662 с.
4. Sihvola A. Electromagnetic Mixing Formulas and Applications / A. Sihvola. – London: IEE, 1999. – 284 p. (IEE Electromagnetic Wave Series; 47).
5. Казаров Б.А. Моделирование и расчет тепловых, электрических свойств сегнетоэлектрических и полупроводниковых материалов твердотельной электроники: диссертация … кандидата физико-математических наук: 01.04.10 / Казаров Багаутдин Абдуллаевич. – Махачкала: ДГУ, 2007. – 187 с. Библиогр. – С. 175–187.

УДК 517

ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ С ОДНОРОДНЫМИ РАЗНОСТНЫМИ ЯДРАМИ

Солдатов А.П.,
Федеральный исследовательский центр РАН «Информатика и управление»
e-mail: soldatov48@gmail.com

Аннотация. *Описаны условия, обеспечивающие принадлежность функций, порожденных двумерными сингулярными интегралами и обобщенными интегралами типа Коши, весовым пространствам Гельдера. Полученные результаты применены к эллиптическим системам первого порядка.*
Ключевые слова*: двумерные сингулярные интегралы, обобщенные интегралы типа Коши.*

BOUNDARY PROPERTIES OF INTEGRALS WITH HOMOGENEOUS DIFFERENCE KERNELS

Soldatov A.P.,
Federal Research Center «Computer Science and Control» of the Russian Academy of Sciences

Abstract. *The conditions ensuring the belonging of functions generated by two-dimensional singular integrals and generalized Cauchy-type integrals to the weighted Hölder spaces are described. Applications of the obtained results to elliptic systems of the first-order are given.*
Keywords: *two-dimensional singular integrals, generalized Cauchy-type integrals.*

В области D комплексной плоскости, ограниченной кусочно-гладкой кривой Γ с множеством узлов F, рассматриваются двумерные сингулярные интегралы вида:

$$\psi(z) = \int\limits_D Q_2(t, t-z)\varphi_2(t)d_2t, \quad z \in D,$$

и обобщенные интегралы типа Коши

$$\varphi(z) = \int\limits_\Gamma Q_1(t, t-z)\varphi_1(t)d_1t, \quad z \in D,$$

где ядра $Q_k(t,\xi)$ однородны степени $-k$ по переменной $\xi \in \mathbb{C}$. Описываются условия, обеспечивающие принадлежность функций φ и ψ весовым пространствам Гельдера, соответственно, $C_\lambda^\mu(\overline{D}, F)$ и $C_\lambda^\mu(\Gamma, F)$. Обсуждаются также принадлежность данных функций классам со степенно-логарифмической асимптотикой в узлах. Приводятся приложения этих интегралов к эллиптическим системам первого порядка.

УДК 539.424

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КОНУСЕ

Сопова Т.В.,
ассистент кафедры «Прикладная математика и компьютерное моделирование»
ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный
исследовательский университет»
e-mail: sopova_t@bsuedu.ru

Аннотация. *Применяя специальную факторизацию эллиптического символа псевдодифференциального оператора, удаётся построить единственное решение соответствующего уравнения в некотором пространстве Соболева – Слободецкого. Для того чтобы это решение принадлежало заданному пространству, необходимо выполнение условий разрешимости. В статье такие условия приведены для конкретных случаев.*
Ключевые слова: *пространство Соболева – Слободецкого, ядро Бохнера, псевдодифференциальное уравнение, волновая факторизация, эллиптический символ.*

ON SOLVABILITY CONDITIONS OF ELLIPTIC EQUATIONS IN A CONE

Sopova T.V.,
Assistant Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modeling
Belgorod State National Research University

Abstract. *By applying a special factorization of the elliptic symbol of a pseudodifferential operator, it is possible to construct a unique solution to the corresponding equation in a certain Sobolev – Slobodetskii space. For this solution to belong to the given space, solvability conditions must be satisfied. In this article, such conditions are presented for specific cases.*
Keywords: *Sobolev – Slobodetskii space, the Bochner kernel, pseudo-differential equation, wave factorization, elliptic symbol.*

Рассматривается уравнение [2]

$$(Au)(x) = v(x), \qquad x \in C, \tag{1}$$

в пространстве Соболева – Слободецкого $H^s(C)$, где $C_a \subset \mathbb{R}^3$ – выпуклый острый конус следующего вида

$$C_a = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3), x_2 > a|x_1|, x_3 > 0, a > 0\},$$

А – модельный псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, удовлетворяющим оценке

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \le |A(\xi)| \le c_2(1 + |\xi|)^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \qquad c_1, c_2 > 0$$

$$(Au)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{i(x-y)\cdot\xi} d\xi dy.$$

Пространство $H^s(C_a)$ – подпространство $H^s(\mathbb{R}^3)$ с индуцированной нормой

$$\|u\|_s = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} |\tilde{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} \, d\xi \right)^{1/2},$$

где $\tilde{u}$ – преобразование Фурье u

$$\tilde{u}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{ix\cdot\xi} u(x) dx$$

и $supp\, u \subset \overline{C}$.

Оператор A – ограниченный линейный оператор $A : H^s(\mathbb{R}^3) \longrightarrow H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^3)$, и правая часть берется из пространства $\dot{H}^{s-\alpha}(\mathbb{R}^m)$; он состоит из умеренных распределений $S'(C)$, которые допускают продолжение на $H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^3)$ с конечной нормой

$$\|u\|^{+}_{s-\alpha} = \inf\|lv\|_{s-\alpha},$$

где нижняя граница берется по всем продолжениям l.

Рассматриваемый конус $C_a \in \mathbb{R}^3$ является прямым произведением двумерного конуса $C^a_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_2 > a|x_1|, a > 0\}$ и положительной полупрямой $\mathbb{R}_+ = \{x_3 \in \mathbb{R} : x_3 > 0\}$. Этому случаю соответствует следующий оператор

$$(B_3u)(x) = \lim_{C^*_a \ni \tau \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{u(y_1, y_2, y_3)dy}{((x_1 - y_1 + i\tau_1)^2 - a^2(x_2 - y_2 + i\tau_2)^2)(x_3 - y_3 + i\tau_3)},$$

где C^* – сопряженный конус [1]. Данный оператор помогает найти решение псевдодифференциального уравнения (1). Далее введем

$$(B_2u)(x) = \lim_{C^{*a}_+ \ni (\tau_1, \tau_2) \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{u(y_1, y_2, y_3)dy_1y_2}{((x_1 - y_1 + i\tau_1)^2 - a^2(x_2 - y_2 + i\tau_2)^2)},$$

$$(S_3u)(x) = \lim_{R_+ \ni \tau_3 \to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(y)dy_3}{x_3 - y_3 + i\tau_3},$$

Заметим, что $B_3 = B_2S_3$. Оператор S_3 является одномерным интегралом типа Коши по 3-й переменной.

Для решения уравнения (1) применяется специальное представление символа $A(\xi)$ относительно выпуклого конуса C_a.[1].

Волновая факторизация – это представление $A(\xi)$ в виде

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi)A_{=}(\xi),$$

где $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ – элементы волновой факторизации, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $A_{\neq}(\xi)$ и $A_{=}(\xi)$ определены для всех $\xi \in \mathbb{R}^m$ и могут быть без точек на границе сопряженного конуса $C^*_a \cup (-C^*_a)$;
2) $A_{\neq}(\xi)$ и $A_{=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в радиальные трубчатые области $T(C^*_a)$ и $T(-C^*_a)$ над конусами C^*_a и $-C^*_a$, соответственно, и удовлетворяют оценкам

$$c_1 \le \left|A^{\pm}_{\neq}(\xi + i\tau)\right|(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm æ} \le c_2,$$
$$c_3 \le \left|A^{\pm}_{\neq}(\xi - i\tau)\right|(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm(\alpha - æ)} \le c_4, \qquad \forall \tau \in C^*_a,$$

где c_1, c_2, c_3 и c_4 – положительные константы. Число $æ \in \mathbb{R}$ называется индексом волновой факторизации.

Существование волновой факторизации позволяет описать ситуации разрешимости уравнения (1) в пространствах Соболева–Слободецкого $H^s(C)$ для различных типов конусов C. Ситуации разрешимости различны в зависимости от целого n такого, что $æ - s = n + \varepsilon, n \in \mathbb{Z}, |\varepsilon| < 1/2$. Итак, при $n = 0$ имеем следующий результат [2], который здесь и используем.

Пусть символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно C_a и $|æ - s| < 1/2$. Тогда уравнение (1) имеет единственное решение в пространстве $H^s(C_a)$ для произвольного $v \in H_0^{s-\alpha}(C_a)$ и решение имеет вид

$$\tilde{u}(\xi) = A^{-1}_{\neq}(\xi)\left(B_3A^{-1}_{=}\tilde{lv}\right)(\xi), \quad \|u\|_s \le const\ \|v\|^{+}_{s-\alpha}$$

где lv – произвольное продолжение v на $H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^3)$.

Теорема 1. Пусть символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно C_a, индекс волновой факторизации таков, что $|æ - s| = -1 + \varepsilon, |\varepsilon| < 1/2$. Тогда решение уравнения (1) можно представить в виде

$$\tilde{\omega}(\xi) = \frac{1}{A_{\neq}(\xi)(\xi_3 + i)}(B_2\tilde{g}_1)(\xi_1, \xi_2) + \tilde{u}(\xi),$$

где $u \in H^s(C_a), g_1 \in H^{1/2-\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$ и априорные оценки

$$\|u\|_s \le const\ \|v\|^{+}_{s-\alpha}, [g_1]_{1/2-\varepsilon} \le const\ \|v\|^{+}_{s-\alpha}$$

справедливы, $[\cdot]_{1/2-\varepsilon}$ обозначает норму в $H^{1/2-\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$. Такое представление единственно.

Теорема 2. Пусть символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно C_a, индекс волновой факторизации таков, что $æ - s = -1 + \varepsilon, |\varepsilon| < 1/2$. Тогда единственное решение уравнения (1) может быть представлено в виде

$$\widetilde{\omega}(\xi) = \frac{1}{2a} A_{\mp}^{-1}(\xi - 1, \xi_2, \xi_3) \frac{1}{(\xi_1 - a\xi_2 + i)} \big(S_2 S_3 \tilde{G}_1\big)(\xi_1 + a\xi_2, \xi_3) + \tilde{u}(\xi),$$

где $u \in H^s(C_a), G_1 \in H^{1/2-\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$ и выполняются априорные оценки

$$\|u\|_s \leq const\ \|v\|_{s-\alpha}^{+}, [g_1]_{1/2-\varepsilon} \leq const\ \|v\|_{s-\alpha}^{+}.$$

$[\cdot]_{1/2-\varepsilon}$ обозначает норму в $H^{1/2-\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$. Такое представление является единственным.

Список литературы

1. Эскин Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 236 с.
2. Vasil'ev V.B. Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in NonSmooth Domains. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 2000.
3. Vasil'ev V.B. Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains, Dordrecht-Boston-London, Kluwer Academic Publishers, 2000.
4. Vasil'ev V.B. Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case // Opusc. Math. 2019. Vol. 39, №1. – P. 109–124.
5. Vasil'ev V.B. Elliptic operators and their symbols // Demonstr. Math. 2019. Vol. 52. – P. 361–369.

УДК 004.8

ОНТОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ДИАЛОГОВЫХ СИСТЕМ

Тимаев Д.Х.,
магистрант 1 курса направления «Информатика и вычислительная техника»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: 23.djabrail.23@mail.ru
Гериханов З.А.,
доцент кафедры «Программирование и инфокоммуникационные технологии»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: gerikhanov95@mail.ru
Ойсаев И.И.,
магистрант 1 курса направления «Информатика и вычислительная техника»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: 23.djabrail.2003@gmail.ru

Аннотация. *В статье рассматриваются теоретические и методологические основы разработки интеллектуального помощника с диалоговым управлением, базирующегося на онтологии предметной области. Проанализирована роль онтологии как средства формализации знаний, обеспечивающего семантическую связность и поддержку логического вывода. Предложена концептуальная архитектура системы, включающая модули семантического анализа, онтологического вывода и управления диалогом. Обоснованы преимущества онтологического подхода: интерпретируемость, адаптивность и глубина понимания запросов. Определены перспективные направления дальнейших исследований, связанные с автоматическим построением онтологий и гибридизацией символьных и нейросетевых методов.*
Ключевые слова: *интеллектуальный помощник, диалоговое управление, онтология, семантический анализ, обработка естественного языка.*

ONTOLOGICAL APPROACH TO BUILDING INTELLIGENT DIALOGUE SYSTEMS

Timaev D.Kh.,
1st year master's student in the field of «Informatics and Computer Engineering»
Kadyrov Chechen State University
Gerikhanov Z.A.,
Associate Professor of the Department of Programming and Infocommunication Technologies
Kadyrov Chechen State University
Oysaev I.I.,
1st year master's student in the field of «Informatics and Computer Engineering»
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *The article discusses the theoretical and methodological foundations for developing an intelligent assistant with dialog control based on an ontology of the subject area. The role of ontology as a means of knowledge formalization that ensures semantic coherence and supports logical inference is analyzed. A conceptual architecture of the system is proposed, including modules for semantic analysis, ontological inference, and dialog management. The advantages of the ontological approach–interpretability, adaptability, and depth of query understanding–are substantiated. Promising directions for further research related to automatic ontology construction and hybridization of symbolic and neural network methods are identified.*
Keywords: *intelligent assistant, dialog control, ontology, semantic analysis, natural language processing.*

В современном мире развитие технологий искусственного интеллекта приводит к активному внедрению интеллектуальных помощников в различные сферы человеческой деятельности. От систем управления умным домом до корпоративных консультантов – диалоговое взаимодействие становится доминирующим интерфейсом человека с

информационными системами. Традиционные подходы к построению диалоговых систем показывают ограничения при работе со сложными предметными областями.

Онтологический подход позволяет структурировать информацию о предметной области, представить связи между понятиями и обеспечить логический вывод новых знаний. Сазонов С. Н. подчеркивает, что «онтологии выступают основой для построения систем, способных к семантическому пониманию запросов и контекстно-зависимому взаимодействию» [4].

Целью работы является теоретическое обоснование и разработка интеллектуального помощника с диалоговым управлением на основе онтологии предметной области. В качестве предметной области рассматривается сфера технической поддержки оборудования, характеризующаяся сложной иерархией понятий, разнообразием типов неисправностей и необходимостью контекстного анализа запросов пользователей.

В рамках разработки диалоговых помощников онтология обеспечивает единое семантическое пространство для взаимодействия компонентов системы, позволяет хранить знания о предметной области, а также поддерживает логический вывод для получения скрытой информации.

Эффективность интеллектуального помощника во многом определяется качеством семантического анализа запросов пользователя. В контексте онтологического подхода применяются следующие методы. Извлечение сущностей на основе онтологии дополняет традиционные методы извлечения именованных сущностей (NER) использованием онтологической информации: распознанные сущности сопоставляются с классами и экземплярами онтологии, что позволяет учитывать иерархические связи. Определение интенции может выполняться как на основе правил, использующих семантические шаблоны, так и с применением методов машинного обучения. Преимуществом онтологического подхода является возможность динамического расширения набора интенций за счет добавления новых классов действий в онтологию. Контекстное связывание исходит из того, что семантический анализ запроса не может быть выполнен изолированно от истории диалога; онтология позволяет хранить контекстную информацию в виде набора фактов, которые обновляются по ходу взаимодействия, обеспечивая преемственность рассуждений.

Управление диалогом в интеллектуальных помощниках традиционно рассматривается как задача управления состояниями. В онтологическом подходе состояние диалога может быть явно представлено как набор фактов в онтологии, включающий текущую тему, историю заданных вопросов, неопределенности, требующие уточнения, а также роли и предпочтения пользователя. Переходы между состояниями инициируются результатами семантического анализа очередного запроса и выполняемыми правилами вывода. Такой подход обеспечивает интерпретируемость, поскольку логику переходов можно проследить по выполненным правилам; адаптивность, так как изменение сценариев диалога осуществляется через модификацию онтологии и правил без перепрограммирования системы; и масштабируемость, поскольку добавление новых тем и сценариев не требует изменения ядра системы.

Онтологический подход к построению интеллектуальных помощников имеет ряд преимуществ перед альтернативными методами (правилами без семантической структуры, нейросетевыми моделями). Ключевыми достоинствами являются интерпретируемость – каждое решение системы может быть объяснено через цепочку логического вывода; адаптивность – онтология может эволюционировать вместе с предметной областью; и глубина понимания – учет семантических связей позволяет отвечать на сложные составные вопросы.

Заключение. В статье рассмотрены теоретические и методологические основы разработки интеллектуального помощника с диалоговым управлением на основе онтологии предметной области. Проанализирована роль онтологии как средства формализации знаний, обеспечивающего семантическую связность и поддержку логического вывода. Предложена концептуальная архитектура системы, включающая модули семантического анализа, онтологического вывода и управления диалогом. Показано, что онтологический подход

позволяет достичь высокой интерпретируемости и адаптивности, что критически важно для систем технической поддержки и других областей со сложной структурой знаний.

Дальнейшие исследования должны быть направлены на разработку методов автоматического построения онтологий из неструктурированных текстов, создание гибридных архитектур, сочетающих достоинства символьного и субсимвольного подходов, а также на масштабирование предложенных решений для различных предметных областей.

Список литературы

1. Жданов А.А. Автономный искусственный интеллект / Жданов А.А. 6-е изд. – Москва: Лаборатория знаний, 2024. – 360 с. ISBN 978-5-93208-674-2. Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. URL: https://www.iprbookshop.ru/135845.html
2. Орлов А.И. Искусственный интеллект: нечисловая статистика: учебник / Орлов А.И. – Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. – 446 с. ISBN 978-5-4497-1435-0. Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. URL: https://www.iprbookshop.ru/117028.html
3. Темкин И.О. Искусственные нейронные сети в АСУ ТП: учебник / И.О. Темкин, В.Б. Трофимов. – Москва: Издательский Дом МИСиС, 2023. – 352 с. ISBN 978-5-907560-95-6. Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/137527.html
4. Человек и системы искусственного интеллекта / В.А. Лекторский [и др.]. – Санкт-Петербург: Юридический центр Пресс, 2022. – 328 с. ISBN 978-5-94201-835-1. Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. URL: https://www.iprbookshop.ru/133137.html
5. Ручкин В.Н. Системы искусственного интеллекта. Нейросети и нейрокомпьютеры: учебник / Ручкин В.Н., Костров Б.В., Свирина А.Г. – Москва: КУРС, 2024. – 288 с. ISBN 978-5-906818-42-3. Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. URL: https://www.iprbookshop.ru/144821.html
6. Менисов А.Б. Киберщит. Искусственный интеллект и кибербезопасность / А.Б. Менисов. – Москва, Алматы: Ай Пи Ар Медиа, EDP Hub (Идипи Хаб), 2024. – 166 с. ISBN 978-5-4497-2336-9. Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. URL: https://www.iprbookshop.ru/138398.html

УДК 517

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Токарев Д.А.,
студент кафедры «Прикладной математики и компьютерного моделирования»
ФГБОУ ВО «Белгородский государственный национальный
исследовательский университет»
e-mail: 1469493@bsuedu.ru

Аннотация. *Для эллиптического псевдодифференциального уравнения в специальном трехмерном конусе на основе метода волновой факторизации символа получены новые результаты о разрешимости одной краевой задачи в соответствующем пространстве Соболева-Слободецкого.*
Ключевые слова: *псевдодифференциальное уравнение, конус, краевая задача, волновая факторизация.*

ON A CERTAIN BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN ELLIPTIC EQUATION

Tokarev D.A.,
Student of the Department of Applied Mathematics and Computer Modeling
Belgorod State National Research University

Abstract. *New results on the solvability of a boundary value problem for an elliptic pseudo-differential equation in a specific three-dimensional cone have been obtained in the corresponding Sobolev–Slobodetskii space using the method of wave factorization of the symbol.*
Keywords: *pseudo-differential equation, cone, boundary value problem, wave factorization.*

Рассмотрим однородное эллиптическое псевдодифференциальное уравнение:

$$(Au)(x) = 0,\ x \in C_3, \tag{1}$$

где A – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$. Решение u ищется в пространстве Соболева-Слободецкого $H^s(C_3)$ [3, 6]. А C_3 – выпуклый конус в трехмерном пространстве, который задается неравенством $x_3 > \varphi(x_1, x_2) > 0$, где

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{cases} ax_1 + bx_2, & x_1 > 0, x_2 > 0, \\ ax_1 - dx_2, & x_1 > 0, x_2 < 0, \\ -cx_1 + bx_2, & x_1 < 0, x_2 > 0, \\ -cx_1 - dx_2 & x_1 < 0, x_2 < 0. \end{cases}$$

Преобразование Фурье функции u будем обозначать $\tilde{u}$. Введем дополнительное интегральное условие

$$\int_0^{+\infty} u(x', x_3)dx_3 = g(x'), \tag{2}$$

тогда при наличии специальной (волновой) факторизации [6] символа $A(\xi) = A_{\neq}(\xi)A_{=}(\xi)$ относительно конуса C_3 с индексом κ таким, что $\kappa - s = 1 + \varepsilon$, где $|\varepsilon| < 1/2$ из [4] следует, что краевая задача (1), (2) имеет единственное решение, прежде чем привести общую формулу введем для краткости следующие специальные операторы:

$$P_k = \frac{1}{2}(I + S_k), \quad Q_k = \frac{1}{2}(I - S_k), \quad k = 1, 2,$$

под I понимается тождественный оператор, а S_k – это одномерные сингулярные интегральные операторы [2], следующего вида:

$$(S_1\,\tilde{u})(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{i}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}(\eta, \xi_2, \xi_3)d\eta}{\xi_1 - \eta},$$

$$(S_2\,\tilde{u})(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\frac{i}{\pi}v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{u}(\xi_1,\eta,\xi_3)d\eta}{\xi_2-\eta}.$$

Итак, общее решение краевой задачи (1), (2) в образах Фурье имеет следующий вид

$$A_{\neq}(\xi)\tilde{u}(\xi)=(P_1P_2\tilde{c}_0)(\xi_1-a\xi_3,\xi_2-b\xi_3)+(P_1Q_2\tilde{c}_0)(\xi_1-a\xi_3,\xi_2+d\xi_3)+$$
$$+(Q_1P_2\tilde{c}_0)(\xi_1+c\xi_3,\xi_2-b\xi_3)+(Q_1Q_2\tilde{c}_0)(\xi_1+c\xi_3,\xi_2+d\xi_3) \quad (3)$$

где $c_0\in \mathrm{H}^{s-\kappa+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)$ и

$$\tilde{c}_0\,(\xi_1,\xi_2)=A(\xi_1,\xi_2,0)\tilde{g}(\xi_1,\xi_2).$$

Отметим, что случай $a=c,b=d$, был изучен в [5]. Вопрос о том, что происходит со структурой решения краевой задачи (1), (2) в случае предельных значений параметров конуса, уже изучался в [1, 4], но для других видов конусов. Покажем, при каких значениях параметров формула (3) значительно упрощается и содержит только одномерные сингулярные интегралы.

Теорема 1. *Если символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно конуса C_3 при $a=c=0;a=b=c=0$, с индексом κ, таким, что $\kappa-s=1+\varepsilon$, где $|\varepsilon|<1/2$, то краевая задача (1), (2) имеет единственное решение для любой функции $g(x')\in \mathrm{H}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)$, которое имеет следующий вид:*

1. *При $a=c=0$*

$$A_{\neq}(\xi)\tilde{u}(\xi)=\frac{A_{\neq}\tilde{g}(\xi_1,\xi_2-b\xi_3)+A_{\neq}\tilde{g}(\xi_1,\xi_2+d\xi_3)}{2}+$$
$$+\frac{i}{2\pi}\left(v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_{\neq}(\xi_1,\eta,0)\tilde{g}(\xi_1,\eta)d\eta}{\xi_2-b\xi_3\ -\eta}-v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_{\neq}(\xi_1,\eta,0)\tilde{g}(\xi_1,\eta)d\eta}{\xi_2+d\xi_3-\eta}\right).$$

2. *При $a=b=c=0$*

$$A_{\neq}(\xi)\tilde{u}(\xi)=\frac{A_{\neq}\tilde{g}(\xi_1,\xi_2)+A_{\neq}\tilde{g}(\xi_1,\xi_2+d\xi_3)}{2}+$$
$$+\frac{i}{2\pi}\left(v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_{\neq}(\xi_1,\eta,0)\tilde{g}(\xi_1,\eta)d\eta}{\xi_2\ -\eta}-v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_{\neq}(\xi_1,\eta,0)\tilde{g}(\xi_1,\eta)d\eta}{\xi_2+d\xi_3-\eta}\right).$$

Список литературы

1. Васильев В.Б., Кутаиба Ш., Ядута А.З. Асимптотический анализ эллиптической краевой задачи в клине // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обр. № 195, 2021. – С. 3–9.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977.
3. Эскин Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1973.
4. Tokarev D.A., Vasilyev V.B. On some transformations associated to a certain cone // arXiv:2512.16840v1 [math.AP].
5. Vasilyev V.B. On Certain 3-Dimensional Limit Boundary Value Problems // Lobachevskii J Math. 2020. V. 41, № 5. – P. 917–925.
6. Vasil'ev V.B. Wave factorization of elliptic symbols: theory and applications. Introduction to the theory of boundary value problems in non-smooth domains. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic, 2000.

УДК 517.958

СУЩЕСТВОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ И РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТИМОШЕНКО ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

Умаров Х.Г.,
Академия наук Чеченской Республики;
Чеченский государственный педагогический университет
e-mail: umarov50@mail.ru

Аннотация. *Для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка по времени, моделирующего распространение изгибных волн в стержне Тимошенко, исследуется задача Коши в пространстве непрерывных функций, заданных на всей числовой оси и для которых существуют пределы на бесконечности. Установлен временной отрезок существования и единственности классического решения вспомогательной задачи Коши, связанной с исходной, и приведена оценка нормы этого локального решения. Найдены условия, обеспечивающие связь между локальными классическими решениями исходной и вспомогательной задач Коши на определенном временном отрезке. Рассмотрены достаточные условия продолжения локального классического решения задачи Коши до глобального и разрушения решения нелинейного уравнения Тимошенко на конечном временном отрезке.*
Ключевые слова: *нелинейное уравнение Тимошенко изгибных колебаний стержня, глобальное решение, разрушение решения.*

SOLUTION BLOW-UP AND GLOBAL SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE NONLINEAR TIMOSHENKO EQUATION FOR BENDING OSCILLATIONS OF A BEAM

Umarov Kh.G.,
Academy of Sciences of the Chechen Republic;
Chechen State Pedagogical University

Abstract. *For a fourth-order nonlinear partial differential equation in time that models the propagation of bending waves in a Timoshenko beam, the Cauchy problem is studied in the space of continuous functions defined on the entire number line and for which limits at infinity exist. The time interval for the existence and uniqueness of a classical solution to an auxiliary Cauchy problem related to the original problem is established, and an estimate for the norm of this local solution is given. Conditions are found that relate the local classical solutions of the original and auxiliary Cauchy problems over a certain time interval. Sufficient conditions for the extension of a local classical solution of the Cauchy problem to a global solution and for the blowup of the solution of the nonlinear Timoshenko equation over a finite time interval are considered.*
Keywords: *nonlinear Timoshenko equation for bending oscillations of a beam, global solution, solution blow-up.*

В докладе представлено исследование в пространстве $C[\mathbb{R}]$, $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, непрерывных функций, для которых существуют пределы при $x\to\pm\infty$, рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения изгибных волн в стержне Тимошенко в рамках математической модели, учитывающей геометрическую и физическую нелинейности среды [1, гл. 6, § 6.3, (6.26)]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\left(1+\frac{c_0^2}{\aleph c_\tau^2}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial t^2\partial x^2}+\frac{c_0^2}{\aleph c_\tau^2}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}=\frac{\alpha_6 w_0^2}{E r_y^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3, \tag{1}$$

$$w|_{t=0}=\varphi_0(x),\ w_t|_{t=0}=\varphi_1(x),\ w_{tt}|_{t=0}=\varphi_2(x),\ w_{ttt}|_{t=0}=\varphi_3(x),\ x\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

где $w=w(t,x)$ – поперечное смещение. Используя нижние буквенные индексы для производных по соответствующим независимым переменным, уравнение (1) можно переписать в виде

$$W_{tt}-a^2W_{xx}+a^2W=-\lambda\partial_x(w_x)^3-a^2w_{xx},\qquad W=w_{tt}-w_{xx},$$

где коэффициенты $a^2=\aleph c_\tau^2/c_0^2$ и $\lambda=-\alpha_6\aleph c_\tau^2 w_0^2/\left(Ec_0^2r_y^2\right)$ – положительные константы [1].

Полагаем, что стержень является бесконечным. Такая идеализация допустима [1, гл. 6,

§ 6.3], если параметры граничного закрепления таковы, что падающая на них изгибная волна не отражается.

Начальные функции и искомое классическое решение $w = w(t,x)$, $(t,x) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0,+\infty)$, вместе с частными производными входящими в уравнение (1), для всех значений временной переменной t по переменной x принадлежат $C[\mathbb{R}]$, в котором $C^{(n)}[\mathbb{R}] = \{g(x) \in C[\mathbb{R}]: g'(x), \cdots, g^{(n)}(x) \in C[\mathbb{R}]\}$, $n \in \mathbb{N}$, подмножества дифференцируемых функций.

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать и уравнение

$$V_{tt} - a^2 V_{xx} + a^2 V = -\lambda \partial_x^2 v^3 - a^2 v_{xx}, \qquad V = v_{tt} - v_{xx}, \tag{3}$$

получающееся из (1) после дифференцирования его обеих частей по x и последующей замены $v = v(t,x) = w_x(t,x)$. Для этого уравнения начальные условия примут вид

$$v|_{t=0} = \varphi_0'(x),\ v_t|_{t=0} = \varphi_1'(x),\ v_{tt}|_{t=0} = \varphi_2'(x),\ v_{ttt}|_{t=0} = \varphi_3'(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Исследование задачи Коши (1), (2) проведено по следующей схеме.

Вначале, для того чтобы убедиться, что постановка вспомогательной задачи Коши (3), (4) корректна и локальное по времени решение существует, выводится (применяя метод Римана) соответствующее задаче Коши (3), (4) нелинейное интегральное уравнение типа интегрального уравнения Вольтерра второго рода. Оценивая норму левой части этого уравнения через норму правой части (при этом для удобства получения и записи последующих оценок считаем $t \in [0,1]$), приходим к интегральному неравенству

$$\|v(t,\cdot)\|_C \le k_1 + \int_0^t (k_2 \|v(\tau,\cdot)\|_C + k_3 \|v(\tau,\cdot)\|_C^3) d\tau, \tag{5}$$

где константы k_n – определяются параметрами a, λ и начальными функциями $\varphi_n(x)$, $n = \overline{0,3}$.

Из (5) найдем отрезок $[0,t_1] \subset [0,1]$ существования и единственности решения задачи Коши (3), (4) и оценку нормы в $C[\mathbb{R}]$ этого локального по времени решения.

Теорема 1. [2] *Пусть начальные функции* $\varphi_n(x)$ *удовлетворяют условиям* $\varphi_n(x) \in C^{(5-n)}[\mathbb{R}]$, $n = \overline{0,3}$, *причем* $\|\varphi_0'\|_C + \|\varphi_1\|_C + (1 + a^2/2)\|\varphi_2' - \varphi_0'''\|_C + \|\varphi_3' - \varphi_1'''\|_C > 0$, *тогда на временном отрезке* $[0,t_1]$ *существует единственное классическое решение* $v = v(t,x) = w_x(t,x)$ *задачи Коши* (3), (4) *в пространстве* $C[\mathbb{R}]$, *для которого справедлива оценка*

$$\|v(t,\cdot)\|_C = \|w_x(t,\cdot)\|_C = \sup_{x\in\mathbb{R}} |w_x(t,x)| \le h(t).$$

Мажоранта $h(t)$ и длина отрезка t_1 определяются параметрами a, λ и начальными функциями $\varphi_n(x)$, $n = \overline{0,3}$.

Установлена связь между существованием локальных решений уравнений (1) и (3).

Лемма. [2] *Из существования локального классического решения* $v = v(t,x)$, $t \in [0,t_1]$, *задачи Коши* (3), (4) *следует существование соответствующего решения*

$$w = w(t,x) = \lim_{x_0 \to -\infty} \int_{x_0}^{x} v(t,s) ds = \int_{-\infty}^{x} v(t,s) ds$$

задачи Коши (1), (2) *на том же временном отрезке* $[0,t_1]$ *при выполнении условий* w_{ttttx}, w_{ttxxx}, w_{xxxxx}, w_{ttx}, $w_x(w_{xx})^2$, $w_{xxx}(w_x)^2 \in C[\mathbb{R}] \cap L_1(\mathbb{R})$, *где* $L_1(\mathbb{R})$ *– пространство абсолютно интегрируемых функций на* $\mathbb{R}$, *и предельных соотношений* w_{tttt}, w_{ttxx}, w_{xxxx}, w_{tt}, $w_{xx} \to 0$ *при* $x \to -\infty$.

В дальнейших рассмотрениях предполагается, что классическое решение $w = w(t,x)$, $(t,x) \in [0,t_1] \times \mathbb{R}$, задачи Коши (1), (2) принадлежит вместе с частными производными входящими в уравнение (1), пересечению пространства $C[\mathbb{R}]$ с пространством $L_2(\mathbb{R})$ функций с интегрируемым квадратом. Все эти требования выполнены, если на временном отрезке $[0,t_1]$ справедливы условия

$$\partial_t^n \partial_x^m w(t,x) \in C[\mathbb{R}] \cap L_2(\mathbb{R}), \qquad n+m \le 4,\ n = \overline{0,4},\ m = \overline{0,4}. \tag{6}$$

Достаточные условия продолжения локального ($t \in [0,t_1]$) классического решения задачи Коши (1), (2) до глобального ($t \in \overline{\mathbb{R}}_+$) получены в теореме 2.

Теорема 2. [2] *Пусть для решения* $w(t,x)$ *задачи Коши* (1), (2) *выполнены условия* (6),

требования леммы и теоремы 1, *и пусть параметры* a, λ *уравнения* (1) *и начальные функции* $\varphi_n(x)$, $n=\overline{0,3}$, *обеспечивают выполнение условий*

$$a^2 > \max\left\{\lambda-1; \frac{\lambda+7+\sqrt{\lambda^2+18\lambda+45}}{2}\right\},\ (\varphi_0'',\varphi_2'')+\|\varphi_1''\|_2^2>0,\ (\varphi_1',\varphi_3')+\|\varphi_2'\|_2^2>0,$$

$$a^2\|\varphi_0''\|_2^2+a^2\|\varphi_1\|_2^2+(1+a^2)\|\varphi_1'\|_2^2+2(\varphi_1,\varphi_3)\geq\|\varphi_2\|_2^2+\frac{\lambda}{2}\|(\varphi_0')^2\|_2^2,$$

$$a^2\|\varphi_0'''\|_2^2+a^2\|\varphi_1'\|_2^2+(1+a^2)\|\varphi_1''\|_2^2+2(\varphi_1',\varphi_3')\geq\|\varphi_2'\|_2^2,$$

$$\|\varphi_3\|_2^2+(1+a^2)\|\varphi_2'\|_2^2+2a^2[\|\varphi_1''\|_2^2+(\varphi_0'',\varphi_2'')]+a^2\|\varphi_2\|_2^2\geq\max\{A;A+2\lambda(\varphi_2',(\varphi_0')^3)\},$$

где $A=3a^2\|\varphi_1''\|_2^2$, *тогда существует единственное глобальное классическое решение* $w=w(t,x)$ *задачи Коши* (1), (2), *для которого справедлива оценка*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|w(t,x)|\leq k_4e^{k_5t/2},\qquad t\in\overline{\mathbb{R}}_+,$$

в которой константы k_4 *и* k_5 *определяются параметрами* a, λ *и начальными функциями* $\varphi_n(x)$, $n=\overline{0,3}$, *в ходе доказательства теоремы.*

Замечание. При продолжении классического решения $w=w(t,x)$, $(t,x)\in[0,t_1]\times\mathbb{R}$, задачи Коши (1), (2) на положительную полуось $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$, используется следующий алгоритм: доказываем априорную оценку, обеспечивающую существование решения на отрезке $[0,t_2]$, $t_2=t_1+T_1$, далее, принимая функции $\vartheta_n(x)=\partial_t^n w(t,x)|_{t=t_2}$, $n=\overline{0,3}$, за новые начальные функции и отмечая, что функции $\vartheta_n(x)$ обладают тем же набором свойств, которые, будучи допущенными для функций $\varphi_n(x)=\partial_t^n w(t,x)|_{t=0}$, позволили доказать существование единственного классического решения $w(t,x)$ на отрезке $0\leq t\leq t_2$, решение $w(t,x)$ с отрезка $[0,t_2]$ продолжается до решения $w(t,x)$, $t\in[0,t_2+T_2]$, где величина T_2 зависит от параметров a, λ и начальных функций $\varphi_n(x)$, $n=\overline{0,3}$. Повторяя этот процесс достаточно большое число раз, получим неограниченное расширение временного отрезка, в течение которого гарантируется решение, т. е. получим классическое решение задачи Коши для уравнения (1) на произвольном временном интервале.

Достаточные условия разрушения классического решения $w=w(t,x)$ задачи Коши (1),(2) на конечном временном отрезке, т.е. условия возникновение разрыва второго рода для функционала $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}(w^2+w_x^2)dx=\|w(t,\cdot)\|_{W_2^1}^2$ получены в теореме 3.

Теорема 3. [2] *Пусть для решения* $w(t,x)$ *задачи Коши* (1), (2) *выполнены условия* (6), *требования леммы и теоремы* 1, *и пусть параметры* a, λ *уравнения* (1) *и начальные функции* $\varphi_n(x)$ *обеспечивают выполнение условий*

$$\lambda<2(1+a^2);\qquad 2a^2>7+3\sqrt{5};\qquad 12a^2(2+a^{-2})\lambda>(1+a^2-9(1+a^{-2})^{-1})^2;$$

$$\|\varphi_1\|_{W_2^1}^2>(\varphi_2,\varphi_0''-\varphi_0);\quad \|\varphi_3\|_2^2+(1+a^2)\|\varphi_2'\|_2^2+a^2\|\varphi_2\|_2^2+3a^{-2}\lambda\,k_6>0;$$

$$a^2\|\varphi_0'''\|_2^2+(1+a^2-k_7)\|\varphi_1''\|_2^2+3k_8+3\lambda k_9>3\|\varphi_2'\|_2^2+k_{10}(\varphi_0'',\varphi_2'');$$

$$k_{11}(\varphi_0'',\varphi_1'')+k_{12}(\varphi_1',\varphi_2')+k_{13}\big(\|\varphi_2\|_2^2+(\varphi_1,\varphi_3)\big)>0;$$

$$\big((\varphi_0,\varphi_1)+(\varphi_0',\varphi_1')\big)^2>\left(\frac{k_{16}}{k_{15}-4}\|\varphi_0\|_{W_2^1}^2+\frac{k_{14}}{k_{15}-2}\right)\|\varphi_0\|_{W_2^1}^2>0;$$

где положительные константы k_m *определяются параметрами* a, λ *и начальными функциями* $\varphi_n(x)$. *Тогда время* T *существования классического решения* $w(t,x)$ *задачи Коши* (1), (2) *ограничено сверху*

$$T\leq\frac{1}{k_{17}\|\varphi_0\|_{W_2^1}^{(k_{15}-4)/2}},$$

причем справедлива оценка снизу для функционала

$$y(t)=\|w(t,\cdot)\|_{W_2^1}^2\geq\frac{1}{\left(\|\varphi_0\|_{W_2^1}^{(4-k_{15})/2}-k_{17}t\right)^{4/(k_{15}-4)}}$$

и, значит, $\lim_{t\uparrow T}y(t)=+\infty$.

Список литературы

1. Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н. П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. – М.: Физматлит, 2002. – 208 с.
2. Умаров Х.Г. Разрушение решения и глобальная разрешимость задачи Коши для нелинейного уравнения Тимошенко изгибных колебаний стержня // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2025. Т. 65, № 11. – С. 1881–1898; Comput. Math. Math. Phys. 2025. V. 65, № 11. – P. 2652–2671.

УДК 004.89:338.24

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ОПТИМИЗАЦИИ ЗАКУПОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ МАЛОГО БИЗНЕСА

Умархаджиев М.-Х.Р.,
старший преподаватель кафедры «Программирование и инфокоммуникационные технологии»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: umrhd@internet.ru
Оздиева С.С.,
студентка направления «Информатика и вычислительная техника»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»

Аннотация. *В статье проведен анализ эффективности применения методов искусственного интеллекта (ИИ) для оптимизации закупочной деятельности малого бизнеса. На основе данных 2025 года (опрос 120 малых предприятий Чеченской Республики и обработка 4500 записей о закупках) рассмотрены ключевые методы ИИ: прогнозирование спроса с помощью моделей машинного обучения (Random Forest, XGBoost), кластеризация поставщиков (K-Means) и оптимизация выбора на базе генетических алгоритмов. Сравнительный анализ с традиционными методами показал положительные результаты: средняя экономия затрат составила 18,4%, сокращение времени на подготовку закупок – 32%, точность прогнозирования спроса достигла 91%. Снижение рисков просрочек и переплат – на 27%. Полученные данные подтверждают высокую эффективность ИИ для малого бизнеса в условиях ограниченных ресурсов. Ожидаемый эффект – повышение конкурентоспособности субъектов МСП за счет снижения себестоимости и ускорения операционных процессов.*
Ключевые слова: *искусственный интеллект, оптимизация закупок, малый бизнес, машинное обучение, прогнозирование спроса, анализ эффективности.*

ANALYSIS OF THE EFFECTIVENESS OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE METHODS IN OPTIMIZING PROCUREMENT ACTIVITIES OF SMALL BUSINESSES

Umarkhadzhiev M.-Kh.R.,
Senior Lecturer, Programming and Infocommunication Technologies
Kadyrov Chechen State University
Ozdieva S.S.,
Computer Science and Engineering Student
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *The article presents an analysis of the effectiveness of artificial intelligence (AI) methods in optimizing procurement activities of small businesses. Based on 2025 data (a survey of 120 small enterprises in the Chechen Republic and processing of 4,500 procurement records), the key AI methods were examined: demand forecasting using machine learning models (Random Forest, XGBoost), supplier clustering (K-Means), and optimization of selection based on genetic algorithms. A comparative analysis with traditional methods showed positive results: average cost savings amounted to 18,4%, reduction in procurement preparation time – 32%, demand forecasting accuracy reached 91%. Reduction in risks of delays and overpayments – by 27%. The obtained data confirm the high effectiveness of AI for small businesses under resource constraints. The expected effect is an increase in the competitiveness of SMEs by reducing cost price and accelerating operational processes.*
Keywords: *artificial intelligence, procurement optimization, small business, machine learning, demand forecasting, effectiveness analysis.*

В условиях современной экономики малый бизнес сталкивается с острой необходимостью оптимизации закупочной деятельности. Высокая волатильность цен, ограниченность ресурсов и растущая конкуренция делают традиционные методы ручного планирования закупок неэффективными. Методы искусственного интеллекта открывают новые возможности для автоматизированного анализа данных, прогнозирования спроса и выбора оптимальных поставщиков. Согласно отчетам McKinsey и Spend Matters за 2025 год,

внедрение ИИ в закупки позволяет сократить затраты на 15–25% даже для предприятий малого сектора. Настоящее исследование направлено на количественный анализ эффективности этих методов на примере малого бизнеса Чеченской Республики по итогам 2025 года.

Исследование проводилось на основе смешанного подхода. Были собраны данные от 120 малых предприятий (торговля, производство, услуги) за 2025 год – всего 4500 записей о закупках (объем, стоимость, сроки, поставщики). Данные анонимизированы в соответствии с Федеральным законом № 152-ФЗ.

Анализ включал три этапа:

1. Предобработка данных (Python, библиотеки pandas, numpy).
2. Применение моделей ИИ: Random Forest и XGBoost для прогнозирования спроса, K-Means для кластеризации поставщиков, генетические алгоритмы для оптимизации выбора.
3. Сравнительный A/B-тест: группа с ИИ vs. контрольная группа (традиционные методы).

Валидация проводилась методом k-fold cross-validation (k=5). Метрики эффективности: точность (F1-score), экономия затрат (%), время обработки (часы), уровень риска (коэффициент просрочек).

В ходе анализа были протестированы ключевые методы ИИ. Модель XGBoost показала наибольшую точность прогнозирования спроса – 91% (F1-score 0,89), что на 28% выше традиционных статистических методов. Это позволило сократить излишние запасы на 19 % и избежать дефицита в 87% случаев.

Кластеризация поставщиков с помощью K-Means выделила 4 оптимальные группы по критериям цены, надежности и сроков поставки. В результате средняя стоимость закупок снизилась на 18,4% за счет перехода на рекомендованных поставщиков. Генетические алгоритмы оптимизации позволили сформировать портфель закупок с минимальными затратами при заданном уровне риска, обеспечив дополнительную экономию 7–9%.

Положительные результаты анализа на реальных данных 2025 года:

- Экономия общих затрат на закупки – 18,4% (среднее по выборке).
- Сокращение времени на планирование и проведение закупок – 32% (с 14 до 9,5 часов на одну процедуру).
- Снижение рисков просрочек и переплат – 27%.
- Повышение точности прогнозирования – 91% против 63% в контрольной группе.

Сравнительный анализ подтвердил статистическую значимость результатов ($p < 0,01$ по t-критерию). Для малого бизнеса с ограниченным штатом ИИ-методы особенно ценны, поскольку позволяют автоматизировать до 65% рутинных операций без дополнительных инвестиций в персонал.

Проведенный анализ убедительно доказывает высокую эффективность методов искусственного интеллекта в оптимизации закупочной деятельности малого бизнеса. Положительные результаты 2025 года демонстрируют существенное снижение затрат, ускорение процессов и минимизацию рисков.

Применение моделей машинного обучения и алгоритмов оптимизации повышает эффективность закупок на 18–32% по ключевым показателям. Ожидаемый эффект – рост конкурентоспособности малого бизнеса за счет снижения себестоимости продукции на 12–15 %, высвобождение времени руководителей для стратегических задач и масштабирование деятельности без пропорционального роста расходов. Рекомендуется внедрение ИИ-инструментов в региональные программы поддержки МСП.

Список литературы

1. Смагина И.А. Малый бизнес: большой справочник / Смагина И.А., Сергеева Т.Ю. – Москва: Юркнига, 2008. – 320 с. Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. URL: https://www.iprbookshop.ru/1693.html

2. Основы функционирования малого бизнеса: учебник и практикум для бакалавров / А.В. Казакова [и др.]. – Москва: Дашков и К, 2017. – 196 с. ISBN 978-5-394-02870-0. Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/85411.html
3. Титов А.Н. Основы работы с библиотекой NumPy: учебно-методическое пособие / Титов А.Н., Тазиева Р.Ф. – Казань: Издательство КНИТУ, 2024. – 112 с. ISBN 978-5-7882-3470-0. Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. URL: https://www.iprbookshop.ru/147895.html
4. Маккини У. Python и анализ данных: Первичная обработка данных с применением pandas, NumPy и Jupiter / У. Маккини; перевод А.А. Слинкин. 3-е изд. – Москва: ДМК Пресс, 2023. – 535 с. ISBN 978-5-93700-174-0. Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. URL: https://www.iprbookshop.ru/159742.html
5. Маккини, У. Python и анализ данных / У. Маккини; перевод А.А. Слинкин. 2-е изд. – Москва: ДМК Пресс, 2020. – 540 с. ISBN 978-5-97060-590-5. Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. URL: https://www.iprbookshop.ru/125361.html
6. Монгуш Ч.М. Введение в анализ данных: учебное пособие для студентов / Ч.М. Монгуш. – Кызыл: Издательство Тувинского государственного университета, 2022. – 51 с. Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. URL: https://www.iprbookshop.ru/149460.html
7. Горбаченко В.И. Машинное обучение: учебное пособие / В И. Горбаченко, К.Е. Савенков, М.А. Малахов. – Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2023. – 217 с. ISBN 978-5-4497-1860-0. Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. URL: https://www.iprbookshop.ru/125886.html

УДК 544.778.4

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ЧАСТИЦ И СТРУКТУРА ПОВЕРХНОСТИ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ ФЕРРИТОВ – ГРАНАТОВ И ФЕРРИТОВ ШПИНЕЛЕЙ В КОНДЕНСИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ

Хайманов С.А.,
старший научный сотрудник научного центра «Магнитные наноструктуры»
ФГБОУ ВО «Северо-Кавказский горно-металлургический институт
(государственный технологический университет)»
e-mail: sh_khaymanov@mail.ru

Аннотация. *С использованием технологии гидротермального синтеза получены наноструктурированные материалы $Sm_3Fe_5O_{12}$, $Er_3Fe_5O_{12}$, $Pr_3Fe_5O_{12}$, $CoFe_2O_4$ в виде порошков, т. е. в конденсированном состоянии. Методами сканирующей зондовой и электронной микроскопии исследованы геометрические особенности частиц и структура поверхности полученных материалов. Результаты исследования позволили подтвердить предположение о том, что уменьшение размеров частиц путем регулирования параметров синтеза улучшает магнитные и адсорбционные свойства исследуемых материалов. Представлены методы контроля чистоты синтезированных материалов от примесей Fe_2O_3.*
Ключевые слова: *редкоземельные ферриты-гранаты, ферриты-шпинели, сканирующая зондовая и электронная микроскопия, микроструктурные особенности поверхности.*

GEOMETRICAL FEATURES OF PARTICLES AND SURFACE STRUCTURE OF MATERIALS BASED ON RARE-EARTH IRON GARNET AND SPINEL FERRITES IN A CONDENSED STATE

Khaimanov S.A.,
Senior Researcher of Scientific Centre «Magnetic Nanostructures»
North Caucasian Institute of Mining and Metallurgy (State Technological University)

Abstract. *Using hydrothermal synthesis technology, nanostructured materials $Sm_3Fe_5O_{12}$, $Er_3Fe_5O_{12}$, $Pr_3Fe_5O_{12}$, and $CoFe_2O_4$ were obtained in powder form, i.e., in a condensed state. The geometric properties of the particles and the surface structure of the obtained materials were studied using scanning probe and electron microscopy. The results of the study confirmed the conclusion that reducing the particle size by adjusting the synthesis parameters improves the magnetic and adsorption properties of the studied materials. Methods for monitoring the purity of the synthesized materials from Fe_2O_3 impurities are presented.*
Keywords: *rare-earth iron garnet, spinel ferrites, scanning probe and electron microscopy, microstructural features of the surface.*

В многочисленных работах как сторонних авторов, так и наших показано определяющее и безусловное влияние структуры поверхности и геометрических особенностей частиц на свойства материалов [1–4]. В связи с вышеуказанным существенным фактором является выбор технологии синтеза, позволяющей получить материалы с заданными параметрами.

Сканирующая зондовая (СЗМ) микроскопия и сканирующая электронная (СЭМ) микроскопия являются наиболее оптимальными методами для исследования поверхности твердых материалов, т. е. материалов, находящихся в конденсированном состоянии. Данный факт обусловлен рядом преимуществ этих методик: использование новейшего оборудования, позволяющего исследовать несколько параметров поверхности порошков; методики не требуют большого потребления электроэнергии, т. е. являются энергоэффективными; при исследовании не требуется специальная пробоподготовка; в процессе проведения эксперимента образцы не подвергаются негативному воздействию, что дает возможность использовать их в других экспериментах.

Цель исследований: детальное и целенаправленное изучение при помощи сканирующей зондовой и сканирующей электронной микроскопии корреляции параметров синтеза с

геометрическими особенностями частиц и структурой поверхности ферритов-гранатов и ферритов-шпинелей в конденсированном состоянии.

В ходе работы применялось следующее оборудование: сканирующий зондовый микроскоп СОЛВЕР НЕКСТ NT-MDT, Nanolab NTEGRA Spectra NT – MDT и сканирующий электронный микроскоп Hitachi S4700. Параметры, при которых проводилось исследование, подробно представлены в наших работах [5–7].

Основные результаты, полученные в процессе исследования, представлены на рисунках 1 и 2 и далее по тексту. На первом рисунке на примере $Pr_3Fe_5O_{12}$, наглядно показано удаление примесей Fe_2O_3 при изменении температуры синтеза со 180ºС до 240ºС. Происходит удаление негативно влияющей примеси, что подтверждается уменьшением количества частиц, соответствующих размерами и геометрическими формами Fe_2O_3.

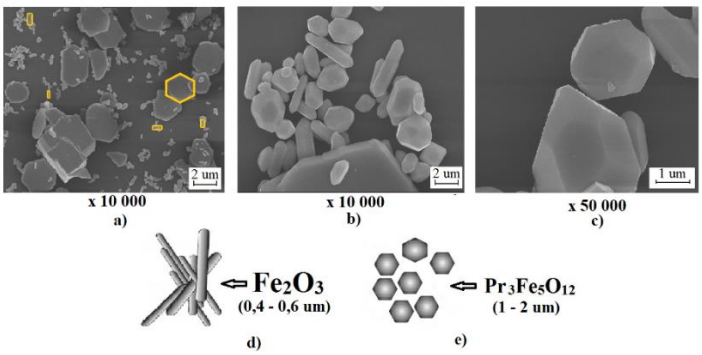

Рис. 1. *СЭМ – изображения порошков $Pr_3Fe_5O_{12}$ при температурах синтеза 180 ºС (а), 200 ºС (б) и 240 (в) ºС.*

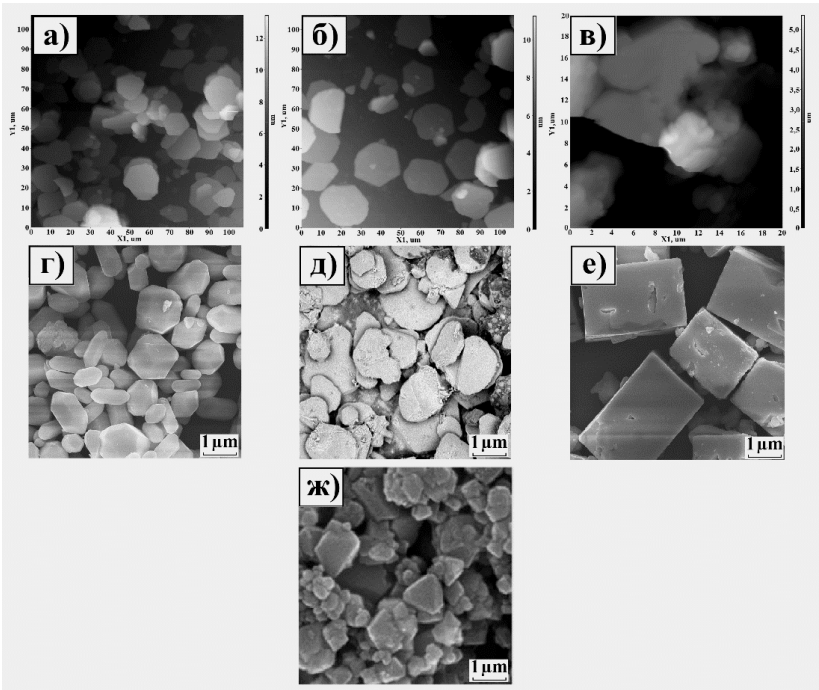

Рис. 2. *СЭМ – изображения поверхности порошков $Sm_3Fe_5O_{12}$ (а), $Pr_3Fe_5O_{12}$ (б), $Er_3Fe_5O_{12}$ (в), а также СЭМ – изображения формы и размеров отдельных частиц $Sm_3Fe_5O_{12}$ (г), $Pr_3Fe_5O_{12}$ (д), $Er_3Fe_5O_{12}$ (е), $CoFe_2O_4$ (ж)*

Результаты, представленные на рисунке 2, позволили оценить форму и размеры частиц исследуемых порошков. У порошков $Sm_3Fe_5O_{12}$, $Pr_3Fe_5O_{12}$ и $CoFe_2O_4$ наблюдается форма частиц в виде ромбических додекаэдров. В случае порошка $Er_3Fe_5O_{12}$ видны вытянутые в горизонтальном направлении прямоугольные частицы.

В заключение следует отметить следующее: все полученные образцы обладают свойствами, позволяющими использовать их в качестве фильтрующих материалов для очистки промышленных сточных вод, что является актуальной проблемой, особенно в горной области, где многие методы фильтрации являются неэффективными [8]. В дальнейшем в наших работах будут показаны результаты исследования магнитных и адсорбционных свойств синтезированных порошков, на основе которых представлены материалы с наиболее оптимальными фильтрационными характеристиками.

Список литературы

1. Nakusov A.T., Khaymanov S.A., Way Wang., Tsidaeva N.I. Industrial wastewater purification adsorption materials based on rare-earth ferrite garnets $Sm_3Fe_5O_{12}$//Sustainable Development of Mountain Territories, 2021. Vol. 13, № 4(50). – P. 629-636. DOI: 10.21177/1998-4502-2021-13-4-629-636.
2. Chen R., Wang W., Zhao X., Zhang Y., Wu S., Li F. Rapid hydrothermal synthesis of magnetic $Co_xNi_{1x}Fe_2O_4$ nanoparticles and their application on removal of Congo red// Chemical Engineering Journal, 2014. Vol. 242. – P. 226–233. DOI:10.1016/j.cej.2013.12.016.
3. Tsidaeva N., Nakusov A., Khaimanov S., Wang W. Hydrothermal synthesis of various magnetic properties of controlled micro/nanostructured powders and films of rare earth iron garnet// Nanomaterials, 2021. Vol. 11 (4). – – P. 972. DOI: 10.3390/nano11040972.
4. Ramonova A.G., Nakusov, A.T., Sozanov, V.G., Bliev, A.P., Magkoev, T.T. AFM and XRD data on structural features and properties of films and powders based on naphthalocyanines// Tech. Phys., 2015. Vol.60. P. 877–884. DOI:10.1134/S1063784215060195.
5. Tsidaeva N.I. The magnetic and magnetooptical properties of Y-substituted erbium iron garnet single crystals//Journal of Alloys and Compounds, 2004. Vol. 374(1-2). – P. 160–164. https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2003.11.143.
6. Tsidaeva N.I. The magneto-optical activity of rare-earth ion in Y-substituted erbium and neodymium iron garnets// Journal of alloys and compounds. 2006. Vol. 408. –P. 164–168. DOI: 10.1016/j.jallcom.2005.04.027.
7. Tsidaeva N.I., Nakusov A.T., Khaimanov S.A., Khubaev A.K., Kubalova L.M., Wang W. Microstructure and elemental composition of nanopowders and films of Sm3Fe5O12 rare-earth garnet ferrites. Technical Physics. 2020. V. 65. № 2. – P. 276–283. DOI:10.1134/s1063784220020243.
8. Pukhova V.P., Voropanova L.A. Wastewater treatment of mining and processing plants using the natural products// Sustainable Development of Mountain Territories, 2019. Vol.11.2(40). – P. 134–141. DOI: 10.21177/1998-4502-2019-11-2-134-141.

УДК 517

ИНДЕКС ЭКСТРЕМАЛЯ-ГУТМАНА ДЛЯ ДЕРЕВЬЕВ КАТЕРПИЛДЕРА С ЗАДАННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ СТЕПЕНЕЙ

Хамуд Ж.,
аспирант кафедры «Дискретная математика»,
Московский физико-технический институт
(Национальный исследовательский университет)
e-mail: jasem1994hamoud@gmail.com
Белов А.Я.,
профессор кафедры «Дискретная математика»,
Московский физико-технический институт
(Национальный исследовательский университет)
e-mail: kanelster@gmail.com

Аннотация. *В данном исследовании рассматривается индекс Гутмана конкретно для классов деревьев, с акцентом на «гусеничных» деревьях и (1,i)-деревьях. Мы выводим формулы в замкнутой форме, представляющие индекс Гутмана в виде взвешенных сумм типа Винера, включающих внутренние и подвешенные вершины. В рамках «гусеничных» деревьев с фиксированными последовательностями степеней мы выделяем конфигурации, минимизирующие и максимизирующие индекс Гутмана, тем самым определяя оптимальное распределение вершин вдоль позвоночника.*
Ключевые слова: *Индекс Гутмана, деревья «гусеница», последовательность степеней, путь, экстремальное значение.*

EXTREMAL GUTMAN INDEX OF CATERPILLAR TREES WITH GIVEN DEGREE SEQUENCE

Hamoud J.,
Postgraduate student, Department of Discrete Mathematics
Moscow Institute of Physics and Technology
Belov A.Ya.,
Professor, Department of Discrete Mathematics
Moscow Institute of Physics and Technology

Abstract. *This study investigates the Gutman index specifically for classes of trees, focusing on caterpillar trees and* $(1, i)$*-trees. We derive closed-form expressions that represent the Gutman index as weighted Wiener-type sums involving internal and pendent vertices. Within caterpillar trees having fixed degree sequences, we identify configurations that minimize and maximize the Gutman index, thereby determining optimal vertex distributions along the spine.*
Keywords: *Gutman index, Caterpillar trees, Degree sequence, Path, Extremal value.*

Let $G = (V, E)$ be a simple undirected graph, where $V = V(G)$ is the vertex set with $|V(G)| = n$ and $E = E(G)$ is the edge set with $|E(G)| = m$. The vertices are denoted by $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Two vertices $u, v \in V(G)$ are adjacent (or neighbors) if $uv \in E(G)$. The degree of a vertex $u \in V(G)$, denoted $d_G(u)$, is the number of neighbors of u in G.

An extremal tree, with respect to a graph invariant I, is a tree that attains the absolute extremum (maximum or minimum) of I among all trees within a specified class. Such classes may include, for example, all trees on n vertices, all trees with a given degree sequence, or all caterpillar trees with a specified degree sequence. The length of the shortest path between vertices u and v of the graph G is their distance, denoted by $\mathrm{dist}(u, v)$. The sum of distances between all pairs of vertices of the graph G is called the Wiener index

$$W(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} \mathrm{dist}\,(u, v).$$

It was first introduced in 1947, by Wiener [2]. The degree distance is an important topological index that combines information about the degrees of vertices and the distances between them in a graph. It is defined [3] as

$$\mathcal{DT}(G) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} [d_G(u) + d_G(v)]\ \mathrm{dist}(u,v).$$

This index has found applications in chemistry, network analysis, and combinatorics, providing insights into graph structure by reflecting both local and global connectivity properties.

The Gutman index Gut is a natural vertex-degree-extension of the Wiener index. It defined as

$$\mathrm{Gut}(G) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} d_G\,(u)\,d_G(v)\,\mathrm{dist}(u,v).$$

This topological index was invented in 1994 by [1] as a refinement of the earlier proposed Schultz index [4].

Among the class of all caterpillars with degree sequence $\mathcal{D}$, there exists a unique caterpillar (up to isomorphism) whose Gutman index attains the maximum value. For any caterpillar $\mathcal{CT}$ belonging to the family $\mathcal{CT}(\mathcal{D})$, we have

$$\mathrm{Gut}(\mathcal{CT}) \le \mathrm{Gut}(\mathcal{CT}_{\max}(\mathcal{D})),$$

with equality holding if and only if $\mathcal{CT}$ is isomorphic to $\mathcal{CT}_{\max}(\mathcal{D})$. through Lemma 1, we exemplify the intimate relevance of $\mathrm{Gut}(G)$ and $W(G)$ across caterpillar trees. This relevance reflects the significance of the interconnection of topological indices and the reflection in the chemical graph theory.

Lemma 1. Let $T_\ell(m_1, m_2, \dots, m_\ell)$ be a tree with a path containing ℓ-th vertices where $n \equiv (\ell-2) \pmod{(\ell-1)}$. If Gutman index satisfy $\mathrm{Gut}(G) = \frac{8(n-2)(n+1)}{3}$, then $\mathrm{Gut}(G) = n^2\,W_{n_i} + n\,W_{n_in_j} + W_{n_j}$.

The relationship of Gutman index and caterpillar tree had provided among Lemma 2.

Lemma 2. Let $\mathcal{CT}(n,p)$ be a caterpillar tree with degree sequence $\mathcal{D} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$. Then, the Gutman index is $\mathrm{Gut}(\mathcal{CT}(n,p)) = \sum_{i=1}^{n} p\,d_i + \sum_{i=1}^{n/2} d_{2i-1}\,d_{2i} + \sum_{i=2}^{n-1} d_i\,d_{i+1}$.

For a degree sequence satisfies $3 \le d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_{n-1} \le d_n$. Then, we note that $d_1 + d_n \le \min\{\mathrm{dist}(v_1, v_n)\}$ and $d_2 + d_{n-1} \le \min\{\mathrm{dist}(v_2, v_{n-1})\}$. Thus,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n/2} (\,d_k + d_{n-k+1}) \le \min\{\mathrm{dist}(v_k, v_{n-k+1})\} & \text{if } n \text{ is even,} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor} (\,d_k + d_{n-k+1}) + d_{(n+1)/2} \le \min\left\{\frac{1}{2}\mathrm{dist}(v_k, v_{n-k+1})\right\} & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

Thus, from [eq2lem1gutn2] we find that

$$\sum_{i=2}^{n-1} d_i\,d_{i+1} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n/2} (\,d_k + d_{n-k+1}) & \text{if } n \text{ is even,} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor} (\,d_k + d_{n-k+1}) + d_{(n+1)/2} & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

The Gutman index of a tree T is given by formula $\mathrm{Gut}(T) = \sum_{v\in V(T)} d_T\,(v)\cdot f_T(v)$, where

$$f_T(v) := \sum_{u\in V(T)} d_T\,(u)\cdot \mathrm{dist}_T(u,v).$$

Since the degree sequence $\mathcal{D}$ is fixed, minimizing $\mathrm{Gut}(T)$ over $T \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$ is equivalent to minimizing the weighted sum $\sum_v d_T\,(v) f_T(v)$. Consider an arbitrary caterpillar $T \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$ that is not isomorphic to $T_{\min}(\mathcal{D})$. By the construction of $T_{\min}(\mathcal{D})$, there exist two vertices u and v on the spine of T satisfying $d_T(u) > d_T(v)$ and $f_T(u) > f_T(v)$. The resulting change in the Gutman index is

$$\begin{aligned}\mathrm{Gut}(T') - \mathrm{Gut}(T) &= d_T(u)f_T(v) + d_T(v)f_T(u) - d_T(u)f_T(u) - d_T(v)f_T(v)\\ &= (d_T(u) - d_T(v))(f_T(v) - f_T(u))\\ &< 0,\end{aligned}$$

since $d_T(u) - d_T(v) > 0$ and $f_T(v) - f_T(u) < 0$. Consequently, $\mathrm{Gut}(T') < \mathrm{Gut}(T)$. Repeating this interchange procedure–analogous to the bubble-sort algorithm–progressively moves every vertex of high degree toward the centre of the spine and terminates at the caterpillar $T_{\min}(\mathcal{D})$.

It follows that every caterpillar distinct from $T_{\min}(\mathcal{D})$ can be transformed, via a finite sequence of such interchanges, into a caterpillar with a strictly smaller Gutman index.

Theorem 1. Let $\mathcal{CT}$ be a caterpillar tree, and let $\mathcal{D} = (d_1, \dots, d_n)$ be a degree sequence with $n \geq 3$ such that $d_n > d_1 > d_{n-2} > \cdots > d_3 > d_2 > d_{n-1}$. Then the caterpillar tree with this ordering attains the maximum value of Gut among all caterpillar trees whose path vertices have the degree sequence $\mathcal{D}$.

Assume that path spine $\mathcal{P} = (p_1, p_2, \dots, p_k)$, where $k \geq 3$, and let the degrees of the spine vertices $p_1, \dots, p_k$ be $d_1, d_2, \dots, d_k$ (in some order). It is well known that the Gutman index of a caterpillar satisfies

$$\mathrm{Gut}(\mathcal{CT}) = \sum_{i=1}^{k} d_{p_i} \cdot f_{\mathcal{CT}}(p_i) + \eta, \quad \text{where} \quad f_{\mathcal{CT}}(p_i) = \sum_{x \in V(\mathcal{CT})} \mathrm{dist}_{\mathcal{CT}}(x, p_i).$$

Here $f_{\mathcal{CT}}(p_i)$ represents the sum of distances from all vertices to the spine vertex p_i, and $\eta \in \mathbb{Z}$ is a constant that depends solely on the number of pendant leaves attached to each spine vertex and is independent of the ordering of the degrees along the spine.

Example 1. The path graph P_n has a degree sequence consisting of two vertices of degree 1 and $n-2$ vertices of degree 2. Thus, $\sum_{i=1}^{n} d_i\,(nd_i) = 2(n-1) + 2(n-2)^2$, $\sum_{i=1}^{n} d_i\,(d_i - 1) = 2(n-2)$. Therefore, we obtained that $\mathcal{DT}(P_n) = 4(n-1)(n^2 - 3n + 3)$ and $\mathrm{Gut}(P_n) = 4(n-1)(n-2)$.

Joint work with A.Ya. Kanel-Belov.

Список литературы

1 Gutman I., Selected properties of the Schultz molecular topological index,// *J. Chem. Inf. Comput. Sci.* 34 (1994) 1087–1089.

2 Wiener H., Structural determination of paraffin boiling points,// *J. Am. Chem. Soc.* 69 (1947) 17–20.

3 Mao Y., Das K. C. Steiner gutman index, // *MATCH Commun. Math. Comput. Chem,* 79(3) (2018) 779–794.

4 Schultz H. P., Topological organic chemistry. 1. Graph theory and topological indices of alkanes,// *J. Chem. Inf. Comput. Sci.* 29 (1989) 227–228.

УДК 537226.4

ФАЗООБРАЗОВАНИЕ И ОСОБЕННОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЕРАМИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ ФЕРРИТА ВИСМУТА И ТИТАНАТОВ БАРИЯ-СТРОНЦИЯ

Хасбулатов С.В.,
канд. физ.-мат. наук, заведующий лабораторией экспериментальной физики
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»;
Комплексный научно-исследовательский институт им. Х.И. Ибрагимова РАН
e-mail: sidudkina@sfedu.ru
Дудкина С.И.,
старший научный сотрудник ОИМНТ,
Научно-исследовательский институт физики,
Южный федеральный университет
Резниченко Л.А.,
главный научный сотрудник, зав. ОИМНТ
Научно-исследовательский институт физики,
Южный федеральный университет
e-mail: sidudkina@sfedu.ru

Аннотация. *В работе проведена оптимизация условий получения керамик $BiFeO_3$ и $(Ba,Sr)TiO_3$. Показана возможность управления физическими свойствами твердых растворов $BiFeO_3$ и $(Ba,Sr)TiO_3$, в том числе, модифицированных редкоземельными элементами. Выявлено, что применение механоактивации позволяет повысить коэффициент управляемости диэлектрическими характеристиками.*
Ключевые слова: *мультиферроики, оптимизация технологических регламентов, механоактивация.*

PHASE FORMATION AND FEATURES OF PHYSICAL PROPERTIES OF FUNCTIONAL CERAMIC MATERIALS BASED ON BISMUTH FERRITE AND BARIUM-STRONTIUM TITANATES

Khasbulatov S.V.,
PhD, *Head of the Experimental Physics Laboratory*
Kadyrov Chechen State University,
Kh.I. Ibragimov Integrated Research Institute of the Russian Academy of Sciences
Dudkina S.I.,
Senior Researcher, OIMNT
Physics Research Institute, Southern Federal University
Reznicenko L.A.,
Chief Researcher, Head of the OIMNT
Physics Research Institute, Southern Federal University

Abstract. *This study optimized the conditions for producing $BiFeO_3$ and $(Ba,Sr)TiO_3$ ceramics. It demonstrated the feasibility of controlling the physical properties of $BiFeO_3$ and $(Ba,Sr)TiO_3$ solid solutions, including those modified with rare earth elements. It was found that the use of mechanical activation allows for an increase in the controllability of dielectric characteristics.*
Keywords: *multiferroics, optimization of process regulations, mechanical activation.*

Мультиферроик феррит висмута ($BiFeO_3$, BFO) и твердые растворы (ТР) на основе титанатов бария и стронция ((Ba, Sr)TiO_3, BST) в последнее время привлекают все большее

внимание исследователей не только с точки зрения фундаментальной науки, но и как объекты, перспективные для прикладных разработок и применений в различных областях техники: спинтронике, стрейтронике, радиоэлектронике и пр. [1–3]. Кроме уникальных физических свойств (сегнетоэлектрических, магнитных), эти объекты отличаются от многих уже используемых в промышленности материалов (на основе титаната-цирконата свинца) экологической чистотой своих элементных составов, не содержащих токсичных элементов. Доступность и относительно невысокая стоимость создаваемых с их участием материалов позволяют проводить адресное изучение названных композиций, имея в виду вышеуказанные возможности их востребованности на практике. Мотивацией к подготовке наших исследований явилась и некоторая бессистемность сведений, характеризующих выбранные объекты, в том числе модифицированные редкоземельными элементами (РЗЭ).

Настоящая работа в определенной мере восполняет этот пробел. В ходе её реализации нами проведены комплексные экспериментальные и теоретические исследования физических и физико-химических свойств объектов в широких интервалах концентраций компонентов и параметров внешних воздействий.

Результаты и обсуждения

Проведена оптимизация технологических регламентов получения BFO и BST с РЗЭ. В качестве последних выступили крупно (1)/средне (2)/и малоразмерные (3) РЗЭ (от La … до Lu) с радиусами (R) ионов от 0,94Å до 1,04 Å (1) и менее 0,94 Å (2, 3). Основными критериями выбора таких регламентов были приняты беспримесность образующихся керамик, их высокоплотность, достаточно высокая механическая прочность. Объекты получены двухэтапным синтезом с последующим спеканием по обычной керамической технологии (ОКТ).

Построены x–T диаграммы всех систем, выявлены особенности связей «состав – структура – свойства», установлена специфическая морфология фазовых диаграмм с большим количеством морфотропных фазовых переходов, сопровождающихся экстремумами электрофизических откликов. Установлено влияние размерных эффектов (ионных радиусов РЗЭ) на вид x–T диаграмм систем BFO и BST с РЗЭ, структурную нестехиометрию ТР, поликристалличность керамик, диэлектрические/теплофизические свойства объектов. Показано, что аномальное «поведение» их диэлектрических характеристик обусловлено явлениями Максвелла – Вагнеровской релаксации за счет пространственной неоднородности структуры изучаемых сред.

Выводы. Рассмотрена возможность управления физическими свойствами BST- ТР, в том числе с РЗЭ вариацией условий их структурообразования, включающих введение стеклодобавок, механоактивацию (МА) прекурсоров и синтезированных продуктов. Показано, что МА позволяет значительно повысить коэффициент управляемости диэлектрическими характеристиками объектов, что важно для многих применений разработанных материалов. Сделан вывод о том, что полученные в работе результаты создадут научную основу для целенаправленного атомно-молекулярного дизайна функциональных материалов с особыми электрическими и магнитными свойствами.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (Государственное задание в сфере научной деятельности). Проект № FENW-2026-0022. Использовано оборудование ЦКП НИИ физики Южного федерального университета «Электромагнитные, электромеханические и тепловые свойства твердых тел».

Список литературы

1. Wang N., Luo, X., Han, L. et al. Structure, Performance, and Application of $BiFeO_3$ Nanomaterials // Nano-Micro Lett. 2020. V. 12 – P. 81.
2. Shreiber D., Zhou W., Dang G., Taysing-Lara M., Metcalfe G., Ngo E., Ivill M., Hirsch S.G., Cole M.W. Tunable metamaterial device for THz applications based on $BaSrTiO_3$ thin film // Thin Solid Films 2018. V. 660. – P. 282-286.
3. Prasad Gajula, Insun Woo, Jin Woo Bae Voltage-switchable Janus-inspired triboelectric nanogenerator with La-MOF@GO–$BaSrTiO_3$ hybrids for self-powered smart school bag and directional energy harvesting // Composites Part B: Engineering. 2026. V. 312, – P.113329.

УДК 519.63

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Худалов М.З.,
доцент, канд. физ.-мат. наук,
СОГУ им. Хетагурова К.Л.
e-mail: hmz@mail.ru

Аннотация. *Изучена нелокальная краевая задача для уравнения параболического типа с дробной производной по времени. Для исследования задачи применяется метод Ротэ. Методом энергетических неравенств получена априорная оценка, из которой следует, что решение является единственным и устойчивым относительно правой части и начальных данных. Установлена сходимость схемы Ротэ к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью* $O(\tau^2)$.
Ключевые слова: *дробная производная Капуто, нелокальная краевая задача, априорная оценка, схема Ротэ, уравнение параболического типа.*

ON A METHOD FOR SOLVING A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A PARABOLIC-TYPE EQUATION

Khudalov M.Z.,
Associate Professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences.
Khetagurov North Ossetian State University

Abstract. *A nonlocal boundary value problem for a parabolic-type equation with a fractional time derivative has been studied. The Rothe method is applied to investigate the problem. Using the method of energy inequalities, an a priori estimate is obtained, from which it follows that the solution is unique and stable with respect to the right-hand side and initial data. The convergence of the Rothe scheme to the solution of the original differential problem is established with a rate of* $O(\tau^2)$.
Keywords: *Caputo fractional derivative, nonlocal boundary value problem, a priori estimate, Rothe method, parabolic-type equation.*

Постановка задачи. В замкнутом прямоугольнике $\overline{D} = \{(x,t): 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим нелокальную краевую задачу для уравнения параболического типа с дробной производной по времени [1], [2]:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = (ku_x)_x - q(x,t)u + f(x,t),\ 0<x<l,\ 0< t \le \mathrm{T}, \tag{1}$$

$$k(0,t)u_x(0,t) = \int_0^l u(x,t)dx,\ 0 \le t \le \mathrm{T}, \tag{2}$$

$$u(l,t) = 0,\ 0 \le t \le \mathrm{T}, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ 0 \le x \le l, \tag{4}$$

где $\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{u}(x,\eta)d\eta}{(t-\eta)^{\alpha}}$ – дробная производная Капуто [3] порядка $\alpha,\ 0 < \alpha < 1$,

$$u(x,t) \in C^{2,3}(\overline{D}),\ \ k(x,t) \in C^{1,3}(\overline{D}),\ \ q(x,t), f(x,t) \in C^{0,2}(\overline{D}), \tag{5}$$
$$u_0(x) \in C(D),\ k(x,t), q(x,t) \ge c_0 > 0,\ c_0 - const > 0,$$

В дальнейшем предполагаем, что решение рассматриваемой дифференциальной задачи (1)–(4) существует и единственно.

На отрезке [0,T] введем сетку [4] $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0,1,2,\dots,j_0, T = j_0\tau\}$. На равномерной сетке $\bar{\omega}_\tau$ дифференциальной задаче (1)-(4) поставим в соответствие схему Ротэ порядка аппроксимации $O(\tau^2)$ [5]:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y = k(x.t^*)(y_x^{(\sigma)})_x - q(x,t^*)y^{(\sigma)} + f(x,t^*),\ \ 0 < x < l,\ t \in \omega_\tau, \tag{6}$$

$$k(0.t^*)y_x^{(\sigma)}(0.t^*) = \int_0^l u(x,t)dx\,, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \tag{7}$$

$$y^{(\sigma)}(l,t^*) = 0, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \tag{8}$$

$$y(x,0) = u_0(x), 0 \le x \le l, \tag{9}$$

где $\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y=\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j}c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}\,y_t^s$ – дискретный аналог дробной производной Капуто порядка $\alpha,\ 0<\alpha<1$, обеспечивающий высокий порядок точности $O(\tau^{3-\alpha})$ в промежуточных точках $t_{j+\sigma}, \sigma=1-\frac{\alpha}{2}, j=0,1,2,\dots,j_0-1$ [6].

$$a_0^{(\alpha,\sigma)}=\sigma^{1-\alpha},\ a_l^{(\alpha,\sigma)}=(l+\sigma)^{1-\alpha}-(l-1+\sigma)^{1-\alpha},\ l\geq 1,$$

$$b_l^{(\alpha,\sigma)}=\frac{1}{2-\alpha}[(l+\sigma)^{2-\alpha}-(l-1+\sigma)^{2-\alpha}]-\frac{1}{2}[(l+\sigma)^{1-\alpha}+(l-1+\sigma)^{1-\alpha}],\ l\geq 1,$$

$$\text{при } j=0,\quad c_0^{(\alpha,\sigma)}=a_0^{(\alpha,\sigma)};$$

$$\text{при } j>0,\quad c_s^{(\alpha,\sigma)}=\begin{cases}a_0^{(\alpha,\sigma)}+b_1^{(\alpha,\sigma)},\ s=0,\\ a_s^{(\alpha,\sigma)}+b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)}-b_s^{(\alpha,\sigma)},\ 1\leq s\leq j-1,\\ a_j^{(\alpha,\sigma)}-b_j^{(\alpha,\sigma)},\ s=j,\end{cases}$$

$$c_s^{(\alpha,\sigma)}>\frac{1-\alpha}{2}(s+\sigma)^{-\alpha}>0,\quad y^{(\sigma)}=\sigma y^{j+1}+(1-\sigma)y^{j},\ y_x=\frac{\partial y}{\partial x},\ t^*=t_{j+\sigma},$$

$$\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}y^{(\sigma)}(0,t_s)\tau=\sum_{s=0}^{j-1}y^{(\sigma)}(0,t_s)\tau+0.5\tau y\big(0,t_j\big),\quad y_t^s=\frac{y(t_{s+1})-y(t_s)}{\tau}.$$

Теорема. Пусть выполнены условия гладкости и ограниченности (5), тогда для решения задачи (6)-(9) при $\tau\leq\tau_0(c_0,\sigma)$ справедлива априорная оценка

$$\|\ y\ \|_1^2\leq \mathrm{M}\big(\textstyle\sum_s^j\|\ \mathrm{f}\ \|_0^2\ \tau+\|\ u_0(x)\ \|_0^2\ \big) \tag{10}$$

на каждом временном слое в смысле нормы

$$\|\ y\ \|_1^2=\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j}c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}\ \|\ y^{s+1}\ \|_0^2+\sum_{s=0}^{j}\|\ y^{(\sigma)}\ \|_{W_2^1(0,l)}^2\ \tau.$$

где $M-$ положительная постоянная, не зависящая от τ.

Таким образом, на основании (10) доказаны единственность, устойчивость решения задачи (6)–(9) по правой части и начальным данным в смысле нормы $\|\ y\ \|_1^2$ на слое, а также в силу линейности рассматриваемой задачи сходимость метода Ротэ со скоростью $O(\tau^2)$.

Список литературы

1. Худалов М.З. Нелокальная задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной по времени. Априорная оценка. Вестник СОГУ. Серия: Естественные науки, 2002. № 2.
2. Худалов М.З. Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения параболического типа. Владикавказский математический журнал. 2002. Т. 4. Вып. 4. – С. 59–64.
3. Caputo H. Lineal model of dissipation whose Q is almost frequency independent. II Geophys J. Astronom. Soc. 1967. Vol. 13. № 5. – Pp. 529–539.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
5. Rothe E. Warmeleiturgsgleichung mit nichtconstanten koeffizienten // Math. Ann., 104 (1931), 340–362.
6. Alikhanov A.A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // Journal of Computational Physics. 2015. №280. – Pp. 424–438.

УДК 004.032.26

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ АУГМЕНТАЦИИ И НОРМАЛИЗАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ СХОДИМОСТИ И ОБОБЩАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СВЕРТОЧНЫХ СЕТЕЙ В УСЛОВИЯХ МАЛЫХ ВЫБОРОК

Хусаинов И.Р.,
магистрант 1 курса направления «Информатика и вычислительная техника»
Института математики, физики и информационных технологий
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: khusainov_pi@mail.ru
Гериханов З.А.
доцент кафедры «Программирование и инфокоммуникационные технологии»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: gerikhanov95@mail.ru

Аннотация. *В работе рассматривается проблема обучения сверточных нейронных сетей в условиях ограниченного объема размеченных данных. Проведен сравнительный анализ методов аугментации (базовая, RandAugment, CutMix) и нормализации (Batch Normalization, Group Normalization). Экспериментальное исследование выполнено на датасете CIFAR-10 с использованием архитектуры ResNet-20. Показано, что комбинация CutMix и Group Normalization обеспечивает наибольший прирост точности (до 10.8%) на малой выборке (1% данных) и улучшает сходимость модели. Результаты могут быть использованы при разработке систем компьютерного зрения в областях с дефицитом данных.*
Ключевые слова: *компьютерное зрение, малые выборки, аугментация данных, нормализация, сверточные нейронные сети, Group Normalization, CutMix.*

COMPARATIVE ANALYSIS OF IMAGE AUGMENTATION AND NORMALIZATION METHODS FOR IMPROVING CONVERGENCE AND GENERALIZATION OF CONVOLUTIONAL NETWORKS UNDER SMALL SAMPLES

Khusainov I.R.,
1st year master's student in Computer Science
and Computer Engineering Institute of Mathematics,
Physics and Information Technologies
Kadyrov Chechen State University
Gerikhanov Z.A.
Associate Professor of the Department
of Programming and Infocommunication Technologies
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *The paper addresses the problem of training convolutional neural networks with limited labeled data. A comparative analysis of augmentation methods (baseline, RandAugment, CutMix) and normalization methods (Batch Normalization, Group Normalization) is conducted. Experimental study is performed on the CIFAR-10 dataset using ResNet-20 architecture. It is shown that the combination of CutMix and Group Normalization provides the highest accuracy gain (up to 10.8%) on a small sample (1% of data) and improves model convergence. The results can be used in developing computer vision systems in data-scarce domains.*
Keywords: *computer vision, small samples, data augmentation, normalization, convolutional neural networks, Group Normalization, CutMix.*

Современные сверточные нейронные сети (CNN) достигают высокой точности в задачах компьютерного зрения благодаря большим объемам размеченных данных. Однако во многих прикладных областях (медицинская диагностика, промышленный контроль, анализ спутниковых снимков) сбор крупных датасетов затруднен из-за высокой стоимости аннотирования, редкости объектов или правовых ограничений. Обучение на малых выборках

приводит к переобучению: модель запоминает шум вместо общих закономерностей, теряя обобщающую способность, а сходимость становится нестабильной [1, 6].

Для решения этой проблемы применяются два основных подхода: аугментация данных (искусственное расширение выборки за счет преобразований изображений) и нормализация (стабилизация распределений внутри сети) [2, 5]. Несмотря на обилие существующих техник, вопрос их сравнительной эффективности в условиях малых выборок требует систематического изучения.

Цель работы – сравнительный анализ методов аугментации и нормализации для улучшения сходимости и обобщающей способности CNN при обучении на малых выборках.

Датасет и архитектура

Эксперименты проведены на стандартном датасете CIFAR-10, содержащем 60 000 цветных изображений размером 32×32 пикселя, распределенных по 10 классам. Тренировочная выборка составляет 50 000 изображений, тестовая – 10 000. Для моделирования дефицита данных из тренировочной выборки созданы подвыборки размером 100% (50 000), 10% (5000), 5% (2500) и 1% (500 изображений) [7]. В качестве модели использована ResNet-20 – компактная архитектура с остаточными соединениями (около 270 тыс. параметров), хорошо зарекомендовавшая себя на CIFAR-10 [6].

Методы аугментации

Рассмотрены три стратегии:

- **Базовая** – случайное кадрирование 32×32 с отступом 4 пикселя и горизонтальное отражение (стандарт для CIFAR-10).
- **RandAugment** – автоматизированный метод с параметрами N=2, M=9, случайный выбор операций из фиксированного набора [3].
- **CutMix** – композитный метод: вырезание прямоугольной области из одного изображения и вставка в другое с пропорциональным смешиванием меток (α=1.0) [4].

Методы нормализации. Сравниваются два подхода:

- **Batch Normalization (BN)** – нормализация по батчу (N×H×W) для каждого канала, зависимость от размера батча [5].
- **Group Normalization (GN)** – нормализация по группам каналов для каждого элемента (G=8), независимость от размера батча [2].

Экспериментальная установка

Обучение проводилось с оптимизатором Adam (lr=0.001), функцией потерь CrossEntropyLoss, размером батча 64 (пропорционально уменьшен для малых выборок), 50 эпох с Early Stopping.

Таблица 1. Тестовая точность (%) моделей ResNet-20

Стратегия	Нормализация	100%	10%	5%	1%
Базовая	BN	91,8	78,2	71,5	48,3
Базовая	GN	91,5	79,6	73,8	51,9
RandAugment	BN	92,1	81,7	75,4	55,1
RandAugment	GN	92,3	83,5	78,2	59,7
CutMix	BN	92,9	82,0	76,9	56,8
CutMix	GN	93,0	84,1	79,5	61,2

Анализ результатов показывает:

1. **Доминирование Group Normalization:** на всех малых выборках (10%, 5%, 1%) конфигурации с GN превосходят аналоги с BN. Максимальный прирост (+4,6%) достигнут для комбинации RandAugment+GN на 1% данных.
2. **Эффективность современных методов аугментации:** RandAugment и CutMix значительно лучше базовой аугментации. CutMix систематически незначительно превосходит RandAugment.

3. **Синергетический эффект:** наилучший результат (61,2% на 1% данных) достигнут комбинацией CutMix+GN. Прирост к базовому подходу (Base+BN) составляет +12,9%.

Анализ сходимости

На рис. 1 представлены кривые обучения для выборки 1% данных. Конфигурации с BN (красные линии) демонстрируют нестабильность и преждевременное «плато», тогда как конфигурации с GN (синие линии) имеют более плавный и стабильный рост, меньший разброс между эпохами.

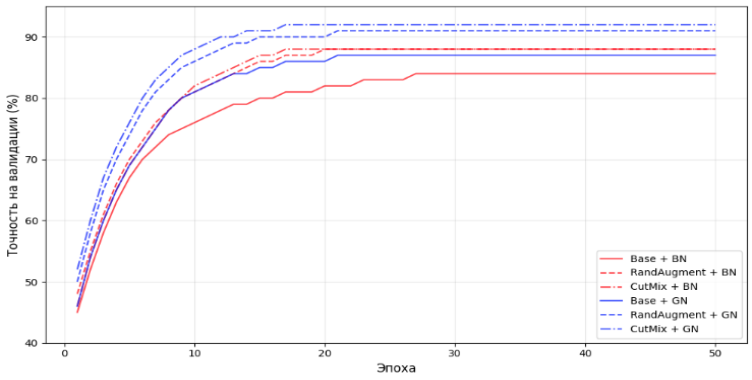

Рис. 1. *Кривые сходимости (Validation Accuracy) на выборке 1% данных*

В работе проведен сравнительный анализ методов аугментации и нормализации для обучения сверточных нейронных сетей на малых выборках.

Основные выводы:

1. **Group Normalization** является наиболее устойчивым методом нормализации для работы с малыми батчами, обеспечивая более высокую точность, стабильную сходимость и улучшенную обобщающую способность по сравнению с Batch Normalization.
2. **CutMix** – наиболее эффективный метод аугментации среди рассмотренных, создающий принципиально новые синтетические примеры, что особенно ценно при дефиците данных.
3. **Рекомендуемая практика:** для задач компьютерного зрения с ограниченными данными (медицинская диагностика, промышленный контроль) использовать комбинацию CutMix (или RandAugment) с Group Normalization.

Полученные результаты позволяют снизить требования к объему размеченных данных при разработке систем компьютерного зрения в предметных областях, где сбор больших массивов данных затруднен.

Список литературы

1. Y. Zhang et al. «Structural analysis and optimization of convolutional neural networks with small sample size», Nature Scientific Reports, vol. 10, 2020.
2. M.A. Khan et al. «Effects and results of dropout layer in reducing overfitting with convolutional neural networks (CNN)», ResearchGate, 2023.

A. Krizhevsky et al. «ImageNet classification with deep convolutional neural networks», Advances in Neural Information Processing Systems, 2012.

3. Ekin D. Cubuk et al. «RandAugment: Practical automated data augmentation with a reduced search space», NeurIPS, 2020.

УДК 517

ОБ ОБРАЩЕНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ОДНОЙ ФУНКЦИИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ТАНГЕНС

Хуштова Ф.Г.,
канд. физ.-мат. наук., научный сотрудник отдела дробного исчисления,
Институт прикладной математики и автоматизации – филиал ФГБНУ «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»
e-mail: khushtova@yandex.ru

Аннотация. *В работе рассматривается обращение преобразования Лапласа одной функции, содержащей гиперболический тангенс. Указанная функция возникает при решении смешанной краевой задачи в ограниченной области с условиями второго и третьего рода для уравнения теплопроводности. Обращение рассматриваемой функции получено в двух формах, пригодных для больших и малых значений времени.*
Ключевые слова: *преобразование Лапласа, гиперболический тангенс, полиномы Лагерра.*

ON INVERSION OF THE LAPLACE TRANSFORM OF A FUNCTION, INVOLVING HYPERBOLIC TANGENT

Khushtova F.G.,
Researcher of Department of Fractional calculus,
Institute of Applied Mathematics and Automation
of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS,

Abstract. *This paper considers the inverse of the Laplace transform of a function containing hyperbolic tangent. This function arises when solving a mixed boundary value problem in a bounded domain with conditions of the second and third kind for the heat equation. The inverse of this function is obtained in two forms, suitable for large and small-time values.*
Keywords: *Laplace transform, hyperbolic tangent, Laguerre polynomials.*

Методы интегральных преобразований остаются одними из наиболее эффективных методов решения различных линейных дифференциальных и интегральных уравнений, возникающих в прикладных задачах математики, математической физики, механики и других областях науки. Наличие большого количества таблиц и справочников по интегральным преобразованиям значительно упрощает процесс нахождения решения исследуемых задач.

Применение теоремы о вычетах и важных теорем теории функций комплексного переменного помогает в случаях, если функция, прообраз которой нужно вычислить, не имеется в современных таблицах и справочниках по интегральным преобразованиям.

При решении операционными методами задач для уравнения теплопроводности важное место занимает преобразование Лапласа. В данной работе рассмотрим обращение преобразования Лапласа, в ядре которого стоит функция, возникающая при решении краевой задачи с условиями третьего рода для уравнения теплопроводности [1].

Вспомогательные сведения. Пусть a и l – некоторые параметры. Рассмотрим контурный интеграл

$$E(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{ts}\,\bar{E}(s)\,ds, \quad \gamma > 0,$$

где

$$\bar{E}(s) = \frac{1}{\sqrt{s}\,\mathrm{th}\sqrt{s}l+a}.$$

В данной работе доказано утверждение, представляющее собой обращение преобразования Лапласа функции $\bar{E}(s)$, выраженное в терминах известных функций.

Пусть

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}), \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

– полиномы Лагерра [2, с.188], [3, с.100],

$$\chi(\tau,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{\tau^2}{4t}}.$$

Утверждение. *Пусть* $a\geq 0$, $l>0$. *Тогда обратное преобразование Лапласа функции*

$$\bar{E}(s)=\frac{1}{\sqrt{s}\,th\sqrt{s}l+a}$$

может быть записано в двух эквивалентных формах

$$E(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,e^{-\lambda_n^2 t},$$

где

$$c_n=\frac{2\,\lambda_n^2}{l(\lambda_n^2+a^2)+a},$$

λ_n *– положительные корни трансцендентного уравнения* $\operatorname{ctg}\lambda l=\lambda/a$, *и*

$$E(t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n\,(t)*E_n(a,t)\,,$$

где

$$T_n(t)=\chi(2ln,t)+\chi(2ln+2l,t),\qquad E_n(a,t)=\int_0^{\infty}e^{-a\tau}\,L_n(2a\tau)\chi_t{}'(\tau,t)\,d\tau.$$

Работа выполнена в рамках государственного задания Института прикладной математики и автоматизации – филиала Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук (тема № 125031904191-2).

Список литературы

1. Ремизова О.И., Соснин М.Л. Операционный метод построения функций Грина для малых времен, соответствующих решению краевых задач для уравнений переноса параболического типа// Вестник МИХТ им. М.В. Ломоносова. 2011. Т. 6, № 3. – С. 116–119.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. – М.: Наука, 1966.
3. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.: Физматлит, 1963.

УДК 004.8

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ TINYML ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ АНОМАЛИЙ НА МАЛОМОЩНЫХ МИКРОКОНТРОЛЛЕРАХ

Шахбиев Д.О.-Х.,
эксперт Центра цифровых трансформаций программы «Приоритет – 2036»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: shakhbiev.david@mail.ru
Магомедов И.А.,
старший преподаватель кафедры «Бизнес-информатика»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: ismwork@mail.ru
Шахбиева А.О.-Х.,
студентка 2 курса специалитета «Экономическая безопасность»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: shakhbieva_ameliya@mail.ru

Аннотация. *В статье исследуется применение TinyML для обнаружения аномалий вибрации на маломощных микроконтроллерах. Реализован автоэнкодер, квантованный до int8 (43,8 КБ). Доля обнаруженных аномалий составила 35,3% при пороге 95-го процентиля, что подтверждает перспективность подхода для автономных IoT-устройств.*
Ключевые слова: *TinyML, искусственный интеллект, микроконтроллеры, Интернет вещей.*

APPLICATION OF TINYML METHODS FOR DETECTING ANOMALIES ON LOW-POWER MICROCONTROLLERS

Shakhbiev D.O.-Kh.,
Expert of the Digital Transformation Center of the «Priority – 2036» Program
Kadyrov Chechen State University
Magomedov I.A.,
Senior Lecturer of the Department of Business Informatics
Kadyrov Chechen State University
Shakhbieva A.O.-Kh.,
2nd year student of the specialty «Economic Security»
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *The article explores the application of TinyML for detecting vibration anomalies on low-power microcontrollers. An autoencoder quantized to int8 (43,8 KB) has been implemented. The detection rate of anomalies was 35,3% at the 95th percentile threshold, which confirms the potential of this approach for autonomous IoT devices.*
Keywords: *TinyML, artificial intelligence, microcontrollers, Internet of Things.*

Популяризация устройств на основе технологий *IoT* приводит к экспоненциальному увеличению потока данных. Передача всей информации в облако требует значительных энергозатрат и дополнительных каналов связи, что критично для автономных устройств. Технология *TinyML* позволяет перенести обработку данных непосредственно на микроконтроллер, выполняя нейросетевые алгоритмы в условиях жестких ресурсных ограничений.

Технология *TinyML* представляет собой интеграцию машинного обучения на маломощные устройства с жесткими аппаратными ограничениями: памятью 256–512 КБ и тактовой частотой десятки МГц [5]. Задача обнаружения аномалий во временных рядах решается методами классификации или реконструкции; для микроконтроллеров предпочтительна архитектура автоэнкодера, т. к. она является наиболее компактной. Петровский А.С. отмечает в своей статье следующее: «Ключевая проблема внедрения

нейросетей на *MCU* – нехватка памяти, что требует применения техник сжатия» [3]. Основные методы: обрезка – удаление малозначимых связей нейросети путем обнуления весов ниже порогового значения; квантование – снижение точности представления весов с 32-битного *float* до 8-битного *int*, что уменьшает размер модели в 4 раза; дистилляция знаний – передача способностей от большой модели-учителя к компактной модели-ученику [1]. *TensorFlow Lite for Microcontrollers* и *Edge Impulse* являются современными инструментами, которые позволяют развертывать оптимизированные модели на микроконтроллерах. Исследования с использованием данных инструментов демонстрируют точность до 90% при размере оперативной памяти всего 32 КБ; это достигается за счет совместного использования нейросетевой архитектуры и механизмов инференса [5]. Специализированные микроконтроллеры, например *MAX78000* с аппаратным ускорителем свёрточных нейросетей, обеспечивают выполнение моделей при токе потребления всего 1,92 мА в активном режиме [3].

Для проведения исследования использовался открытый набор данных вибраций потолочного вентилятора. В данных были отражены записи акселерометра при нормальной работе вентилятора и дисбалансе (монета на лопасти). Из файлов формируются окна по 64 отсчёта с шагом 32, которые были преобразованы в векторы размерности 192. Получено 11700 нормальных и 8745 аномальных окон. Для обработки данных осуществляется их нормализация с последующим разделением нормальных окон на обучающую (80%) и валидационную (20%) выборки.

Автоэнкодер состоит из полносвязных слоёв: вход 192 – 64 – 32 – 16 (бутылочное горлышко) – 32 – 64 – выход 192. Активация *ReLU* на скрытых слоях, выход – линейная. Обучение с оптимизатором Adam, MSE, батч 32, 50 эпох. Порог аномалии – 95-й процентиль ошибок реконструкции на валидации. Для микроконтроллера модель квантована до *int8* средствами *TensorFlow Lite* с калибровкой на обучающих данных. Квантованный *tflite*-файл преобразован в C-массив.

На рисунке 1 представлена динамика потерь при обучении и валидации. График демонстрирует сходимость без признаков переобучения: после 50 эпох ошибка на валидации стабилизировалась на уровне около 0,0027.

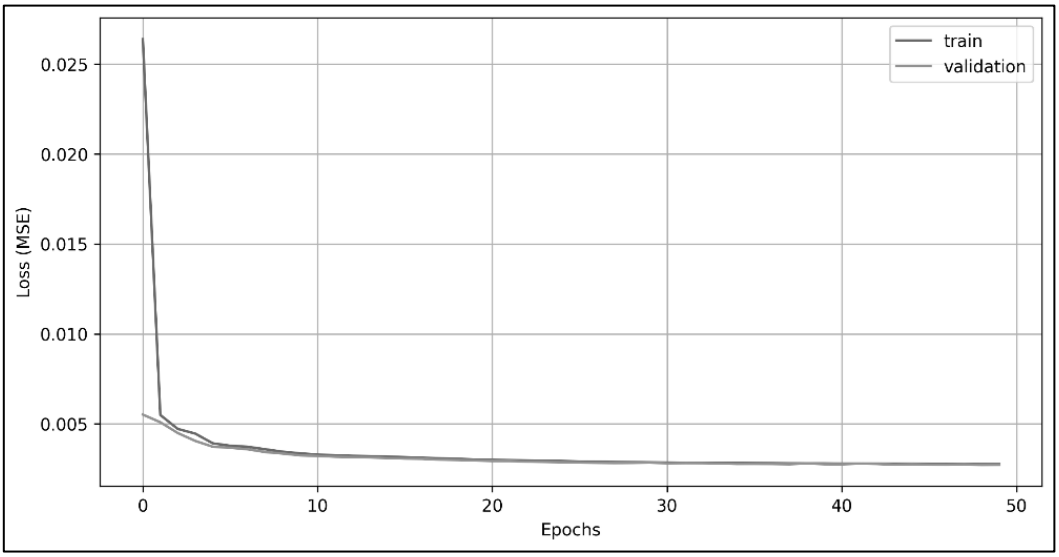

Рисунок 1. *Функция потерь на обучающей и валидационной выборках*

На рисунке 2 показано распределение ошибок реконструкции для нормальных и аномальных окон. Порог (пунктирная линия) установлен на уровне 0,007353. Доля аномалий, превысивших порог, составила 35,3%, что подтверждает способность модели обнаруживать неисправность по вибрационному сигналу. Средняя ошибка на нормальных данных равна 0,002728, на аномальных – 0,012626, различие более чем в 4,6 раза.

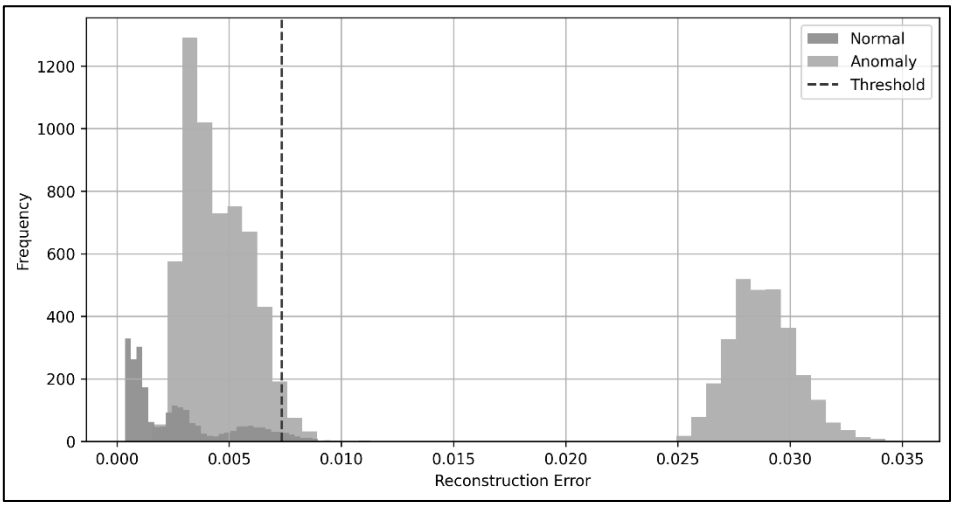

Рисунок 2. *Гистограмма ошибок реконструкции для нормальных и аномальных окон.*

После квантования размер модели сократился до 44848 байт (около 43,80 КБ), что позволяет разместить её в памяти большинства современных микроконтроллеров. Сгенерированный С-массив готов для интеграции в прошивку с использованием библиотеки *TensorFlow Lite for Microcontrollers*.

В ходе исследования был реализован полный цикл *TinyM* -решения для обнаружения аномалий вибрации: от подготовки данных и обучения нейросетевого алгоритма до квантования и генерации кода для микроконтроллера. Эксперимент на открытом наборе данных подтвердил эффективность подхода: доля обнаруженных аномалий составила 35,3% при пороге 0,007353 (95-й процентиль). Квантованная модель занимает менее 44 КБ, что делает её пригодной для развёртывания на маломощных встраиваемых устройствах с автономным питанием.

Список литературы

1. Зуйков М.А. Исследование предиктивной аналитики на базе микроконтроллера с применением методов TinyML / Ф.Х. До, Ч.Д. Ле, М.А. Зуйков [и др.] // Инновационное приборостроение. 2023. Т. 2, № 2. – С. 64–75. DOI 10.31799/2949-0693-2023-2-64-75. EDN GXVEJD.
2. Наумов И.М. Тенденции развития искусственного интеллекта: полный обзор технологий, рынка и будущего / И.М. Наумов // Вестник науки. 2025. Т. 5, № 6-2(87). – С. 282–287. EDN CXDCBU.
3. Петровский А.С. Применение искусственного интеллекта в приборостроении / А. С. Петровский // Universum: технические науки. 2024. № 1–2(118). – С. 10–14. DOI 10.32743/UniTech.2024.118.1.16682. EDN HFEEHI.
4. Сазонов С.Н. Системы искусственного интеллекта: учебное пособие / С.Н. Сазонов. – Ульяновск: Ульяновский государственный технический университет, 2023. 84 с. ISBN 978-5-9795-2352-1. Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. URL: https://www.iprbookshop.ru/149293.html
5. Стародуб Я.Н. Tinyml: технологии, области применения и экспериментальная реализация на платформе Grove Vision AI V2 / Я.Н. Стародуб, Е.В. Вершинин // Оригинальные исследования. 2025. Т. 15, № 6. – С. 193–201. EDN PMIXYP.

УДК 004.85:338.2

ПРИМЕНЕНИЕ АНСАМБЛЕВЫХ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ В ОЦЕНКЕ РИСКОВ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ ХОЗЯЙСТВУЮЩИХ СУБЪЕКТОВ

Шахбиев Д.О.-Х.,
эксперт Центра цифровых трансформаций программы «Приоритет – 2036»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: shakhbiev.david@mail.ru
Шахбиева А.О.-Х.,
студентка 2 курса специалитета «Экономическая безопасность»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: shakhbieva_ameliya@mail.ru
Илаева З.М.,
доцент кафедры «Управление региональной экономикой и экономическая безопасность»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: zarema-ilaeva@rambler.ru

Аннотация. *В работе рассматриваются возможности применения ансамблевых методов машинного обучения для оценки рисков экономической безопасности предприятий. Представлена методика исследования, включающая формирование выборки, подготовку данных, построение моделей случайного леса, XGBoost и стекинга. Приведены результаты сравнительного анализа эффективности моделей, описана методика оценки важности факторов.*
Ключевые слова: *экономическая безопасность, ансамблевые методы, XGBoost, стекинг, оценка рисков, машинное обучение.*

APPLICATION OF ENSEMBLE MACHINE LEARNING METHODS IN ASSESSING THE RISKS OF ECONOMIC SECURITY OF BUSINESS ENTITIES

Shakhbiev D.O.-Kh.,
Expert of the Digital Transformation Center of the Priority – 2036 Program
Kadyrov Chechen State University
Shakhbieva A.O.-Kh.,
2nd year student of the specialty «Economic Security»
Kadyrov Chechen State University
Ilaeva Z.M.,
Associate Professor of the Department of Regional
Economy Management and Economic Security
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *The paper discusses the possibilities of using ensemble machine learning methods to assess the economic security risks of enterprises. The research methodology includes sample formation, data preparation, and the construction of random forest, XGBoost, and stacking models. The paper presents the results of a comparative analysis of the models' effectiveness and describes a methodology for assessing the importance of factors.*
Keywords: *economic security, ensemble methods, XGBoost, stacking, risk assessment, and machine learning.*

Введение. В условиях усиления геополитической напряжённости, макроэкономической нестабильности и цифровой трансформации экономики проблема обеспечения экономической безопасности хозяйствующих субъектов выходит на первый план. Предприятия сталкиваются с возрастающим числом угроз, которые требуют своевременной и точной диагностики. Традиционные методы оценки рисков, основанные на коэффициентном анализе и дискриминантных моделях, обладают рядом ограничений: они предполагают линейный характер связей между показателями, чувствительны к

субъективному выбору нормативных значений и не всегда адаптируются к структурным сдвигам в экономике. В этой связи всё более востребованными становятся методы искусственного интеллекта, способные выявлять скрытые нелинейные зависимости и обрабатывать большие массивы данных. Особое место среди них занимают ансамблевые методы машинного обучения, которые за счёт комбинирования нескольких моделей обеспечивают повышенную точность и устойчивость прогнозов [5]. Цель настоящей работы – обоснование целесообразности применения ансамблевых подходов для оценки рисков экономической безопасности и анализ современных инструментов, используемых в данной предметной области.

Теоретические аспекты оценки рисков экономической безопасности. Экономическая безопасность предприятия традиционно понимается как состояние защищённости его финансово-хозяйственной деятельности от внутренних и внешних угроз, позволяющее поддерживать устойчивое функционирование и реализовывать стратегию развития. Ключевым элементом диагностики выступает система финансовых индикаторов, включающая коэффициенты ликвидности, финансовой устойчивости, рентабельности и деловой активности [4]. Однако использование этих показателей изолированно или в виде линейных комбинаций часто не даёт полной картины, поскольку реальные экономические процессы характеризуются сложными, нелинейными взаимосвязями. Кроме того, на финансовое состояние предприятия влияют отраслевые особенности, стадия жизненного цикла и макроэкономические факторы, которые трудно формализовать в рамках традиционных регрессионных моделей.

Ансамблевые методы машинного обучения, в отличие от отдельных алгоритмов, строят композицию из нескольких базовых моделей, что позволяет снизить дисперсию ошибки и избежать переобучения. Как отмечается в современной литературе, именно комбинирование моделей даёт возможность достичь более высоких показателей обобщающей способности по сравнению с любой из составляющих моделей. Для задач классификации предприятий по уровню риска это свойство особенно важно, поскольку позволяет повысить надёжность ранжирования объектов и снизить долю ошибочных решений.

Анализ современных ансамблевых инструментов. В практике оценки рисков наибольшее распространение получили три ансамблевых подхода: случайный лес (Random Forest), градиентный бустинг (XGBoost) и стекинг (Stacking). Каждый из них имеет свои особенности и область применения.

Случайный лес представляет собой совокупность решающих деревьев, построенных на различных подвыборках данных и случайных подмножествах признаков [1]. Итоговый прогноз формируется путём усреднения (или голосования). Преимуществом метода является высокая интерпретируемость: с помощью встроенных механизмов можно оценить важность каждого фактора, что особенно ценно для экономического анализа. Кроме того, случайный лес устойчив к выбросам и пропускам в данных.

XGBoost (eXtreme Gradient Boosting) реализует идею последовательного усиления слабых моделей, каждая следующая из которых исправляет ошибки предыдущей. За счёт регуляризации и оптимизированной вычислительной архитектуры этот алгоритм часто демонстрирует наивысшую точность и хорошо справляется с несбалансированными выборками, что актуально для задачи выявления предприятий с высоким уровнем риска.

Стекинг представляет собой двухуровневую композицию: на первом уровне строятся несколько разнородных базовых моделей, а на втором – мета-модель, которая обучается на их предсказаниях. Такой подход позволяет объединить сильные стороны различных алгоритмов и достичь сбалансированного результата. Однако он требует больше вычислительных ресурсов и аккуратного подбора структуры.

Сравнительный анализ применения этих инструментов в исследованиях последних лет показывает, что все три метода значительно превосходят традиционные эконометрические модели по точности классификации. При этом выбор конкретного алгоритма зависит от приоритетов: если требуется прозрачность и понимание факторов риска, предпочтение

отдаётся случайному лесу; если же критически важна максимальная чувствительность к кризисным явлениям – XGBoost; стекинг же выбирают в ситуациях, где необходим наилучший баланс точности и полноты.

Заключение. Ансамблевые методы машинного обучения являются эффективным и перспективным инструментом для оценки рисков экономической безопасности хозяйствующих субъектов. Их применение позволяет повысить точность идентификации проблемных предприятий, уменьшить влияние субъективных факторов и перейти к системам раннего предупреждения финансового неблагополучия. Вместе с тем следует учитывать, что качество моделей напрямую зависит от полноты и достоверности исходных данных, а также требует регулярного обновления в условиях изменяющейся экономической конъюнктуры. Дальнейшие исследования целесообразно направить на интеграцию в модели нефинансовых индикаторов (например, данных о репутации, уровне корпоративного управления), а также на адаптацию методики для отдельных отраслей экономики. Предложенные подходы могут быть востребованы в практической деятельности контрольно-надзорных органов, служб внутреннего аудита и риск-менеджмента компаний.

Список литературы

1. Абдикеев Н.М. Машинное обучение в экономике и финансах: учебное пособие / Н.М. Абдикеев. – Москва: ИНФРА-М, 2021. – 268 с. ISBN 978-5-16-016832-4.
2. Айвазян С.А. Методы эконометрики: учебник / С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. – Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2020. – 575 с. ISBN 978-5-238-03299-5.
3. Бабкин А.В., Новиков А.О. [и др.] Цифровая трансформация экономических систем: теория и практика: монография / Р.И. Акмаева, А.В. Бабкин, Н.В. Василенко [и др.]; под ред. д-ра экон. наук, проф. А.В. Бабкина. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2022. – 470 с
4. Сенчагов В.К. Экономическая безопасность России. Общий курс: учебник / под редакцией В.К. Сенчагова. 7-е изд. – Москва: Лаборатория знаний, 2025. – 816 с. ISBN 978-5-93208-878-4.
5. Толпегин О.А. Комплексный экономический анализ хозяйственной деятельности: учебник / О.А. Толпегин. – Москва: Юрайт, 2022. – 420 с. ISBN 978-5-534-03215-6.
6. Флах П. Машинное обучение: наука и искусство построения алгоритмов, которые извлекают знания из данных / П. Флах; перевод с английского А.А. Слинкина. 2-е изд., электрон. – Москва: ДМК Пресс, 2023. – 401 с. ISBN 978-5-89818-300-4. Текст: электронный // Znanium: электронно-библиотечная система. URL: https://znanium.ru/catalog/document?id=432179

УДК 517

О РАЗРЕШИМОСТИ МОДЕЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КОНУСЕ

Шмаль И.О.,
аспирант кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования
ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный
исследовательский университет»
e-mail: 1247978@bsuedu.ru

Аннотация. *В работе исследуются модельные эллиптические псевдодифференциальные уравнения в выпуклых конических областях. Исследование проводится в пространствах Соболева-Слободецкого с различной гладкостью по различным группам переменных. Получены условия разрешимости рассматриваемых уравнений и корректной постановки соответствующих краевых задач для эллиптических операторов с анизотропной структурой символа.*
Ключевые слова: *псевдодифференциальные уравнения, эллиптические операторы, анизотропные пространства, пространство Соболева-Слободецкого.*

ONA SOLVABILITY OF MODEL ELLIPTIC EQUATIONS IN IN A CONE

Shmal I.O.,
Postgraduate student of the Department of
Applied Mathematics and Computer Modeling
Belgorod National Research University

Abstract. *This paper studies model elliptic pseudodifferential equations in convex conical domains. The analysis is carried out in Sobolev-Slobodeckij spaces with different smoothness with respect to different groups of variables. Conditions for the solvability of the considered equations and for the correct formulation of the corresponding boundary value problems for elliptic operators with anisotropic symbol structure are obtained.*
Keywords: *pseudodifferential equations, elliptic operators, anisotropic spaces, Sobolev–Slobodeckij space.*

Пусть евклидово пространство $\mathbb{R}^M$ представлено в виде ортогональной суммы

$$R^M = R^{K_1} \oplus \cdots \oplus R^{K_n},$$

где множества K_j образуют разбиение множества координат. Для вектора $S = (s_1, \dots, s_n)$ пространство $H^S(R^M)$ определяется как пространство обобщённых функций, для которых конечна норма

$$||u||_S^2 \int_{R^M} \prod_{j=1}^{n} (1 + |\xi_{K_j}|)^{2s_j} |\tilde{u}(\xi)|^2 \, d\xi,$$

где $\tilde{u}$ обозначает преобразование Фурье функции u [3].

Рассматривается псевдодифференциальный оператор

$$(Au)(x) = \frac{1}{(2\pi)^M} \int_{R^M} \int_{R^M} e^{i(x-y)\cdot\xi} \tilde{A}(\xi) u(y) \, dy \, d\xi,$$

символ которого удовлетворяет эллиптической оценке вида

$$c_1 \prod_{j=1}^{n} (1 + |\xi_{K_j}|)^{\alpha_j} \le |\tilde{A}(\xi)| \le c_2 \prod_{j=1}^{n} (1 + |\xi_{K_j}|)^{\alpha_j}.$$

В этом случае оператор является непрерывным отображением $H^S(R^M) \to H^{S-\alpha}(R^M)$ [1].

Основное внимание уделяется исследованию уравнения

$$Au = 0$$

в выпуклом конусе $C \subset R^M$, не содержащем целой прямой. Пространство $H^S(C)$ определяется как подпространство $H^S(R^M)$, состоящее из функций, носители которых содержатся в $\underline{C}$.

Исследование проводится с использованием локального принципа, согласно которому поведение решений вблизи границы области описывается модельными уравнениями в канонических областях. В этом подходе ключевую роль играет волновая факторизация

$$\tilde{A}(\xi) = A_{\neq}(\xi)A_{=}(\xi)$$

эллиптического символа относительно конуса с индексом $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$[1].

Теорема 1. *Пусть символ $\tilde{A}(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно выпуклого конуса C с индексом $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$. Если выполнены условия*

$$|\kappa_j - s_j| < 1/2, \qquad j = 1, \dots, n,$$

то уравнение

$$Au = 0$$

в пространстве $H^S(C)$ имеет только тривиальное решение [1].

В случае нарушения этих условий структура пространства решений существенно усложняется. С помощью построенного оператора V_φ [2], где функция φ определяет геометрию поверхности конуса C , получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть эллиптический символ $\tilde{A}(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно выпуклого конуса C с индексом $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ и выполнено соотношение*

$$\kappa - S = N + \varepsilon, \qquad N = (n_1, \dots, n_n) \in N^n, \quad |\varepsilon_j| < \frac{1}{2}.$$

Тогда общее решение уравнения $Au = 0$ в пространстве $H^S(C)$ в образах Фурье имеет вид

$$\tilde{u}(\xi) = \tilde{A}_+^{-1}(\xi)\, V_\varphi^{-1}\left(\sum_{l_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{n_n} \tilde{c}_L(\xi'_K)\, \xi_{k_1}^{l_1-1} \cdots \xi_{k_n}^{l_n-1} \right),$$

где $\tilde{c}_L \in H^{S_L}$ - произвольные функции.

$$S_L = (s_1 - \kappa_1 + l_1 - 1/2, \dots, s_n - \kappa_b + l_n - 1/2).$$

Для решения справедлива априорная оценка в норме $H^S(C)$ [1]

$$||u||_S \le const \sum_{l_1=1}^{n_1} \sum_{l_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{l_{n=1}}^{n_n} ||c_L||_{S_L}.$$

Полученное представление показывает, что в этих случаях возникает конечномерное пространство решений, структура которого определяется индексом волновой факторизации. Для выделения единственного решения необходимо задание дополнительных условий. В простейших геометрических случаях соответствующие краевые задачи сводятся к системам линейных интегральных уравнений [2].

Таким образом, рассмотрение эллиптических псевдодифференциальных уравнений в пространствах различной гладкости по переменным позволяет описывать структуру решений и корректно формулировать краевые задачи в негладких областях.

Список литературы

1. Vasilyev V., Polunin V., Shmal I., (2023). Pseudo-Differential Equations in Spaces of Different Smoothness Exponents on Variables // In: Vasilyev, V. (eds) Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms. DEMMCA 2021 // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 423. Springer, Cham. – Pp. 253–267.
2. Васильев А.В., Васильев В.Б., Шмаль И.О. Об эллиптических задачах и интегральных уравнениях // Дифференциальные уравнения, 61: 9 (2025), 1183–1194.
3. Vasilyev V.B. Wave Factorization of Elliptic Symbols // Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
4. Vasilyev V.B. On some distributions associated with boundary value problems // Complex Var. Ell. Equat., 2019, vol. 64, no. 5. – Pp. 888–898.
5. Eskin G. Boundary Value Problems for Elliptic Pseudodifferential Equations // Providence: Amer. Math. Soc. 1981.
6. Gakhov F.D. Boundary Value Problems // Mineola: Dover Publications, 1981.

УДК 538.95:544.344

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ГИДРАТООБРАЗОВАНИЯ: МНОГОУРОВНЕВОЕ ФИЗИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ И КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Шостак Н.А.,
старший научный сотрудник
Научно-технологического центра микроэлектроники и нанотехнологий
ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова»
e-mail: nikeith@mail.ru

***Аннотация**. Рассматривается нелинейная динамика гидратообразования как неравновесный процесс, определяемый конкуренцией тепловых, диффузионных и фазовых механизмов. Предложено многоуровневое физическое описание, объединяющее модель формирования клатратной решетки, кинетику роста гидратной фазы и теплогидродинамику потока. Введен безразмерный параметр энергетического подобия, характеризующий термобарическую близость системы к области фазовой неустойчивости. Показано, что эволюция системы может быть представлена в редуцированном пространстве безразмерных критериев, определяющих режимы устойчивого, метастабильного и лавинообразного развития гидратной фазы. Предложенный подход позволяет интерпретировать гидратообразование как частный случай нелинейных фазовых переходов.*
***Ключевые слова:** гидратообразование, клатратные гидраты, параметр подобия, фазовые переходы.*

NONLINEAR DYNAMICS OF HYDRATE FORMATION: MULTI-SCALE PHYSICAL DESCRIPTION AND STABILITY CRITERIA

Shostak N.A.,
Senior Researcher, Scientific and Technological Center for Microelectronics and Nanotechnology
Berbekov Kabardino-Balkarian State University named after Kh. M.

***Abstract**. The nonlinear dynamics of hydrate formation is considered as a nonequilibrium process determined by the competition between thermal, diffusion, and phase mechanisms. A multilevel physical description is proposed, combining a model of clathrate lattice formation, hydrate phase growth kinetics, and flow thermohydrodynamics. A dimensionless energy similarity parameter is introduced, characterizing the system's thermobaric proximity to the region of phase instability. It is shown that the system's evolution can be represented in a reduced space of dimensionless criteria defining the regimes of stable, metastable, and avalanche-like hydrate phase development. The proposed approach allows hydrate formation to be interpreted as a special case of nonlinear phase transitions in flow systems.*
***Keywords**: hydrate formation, clathrate hydrates, similarity parameter, phase transitions.*

Гидратообразование в системах добычи и транспорта углеводородного сырья представляет собой сложный неравновесный процесс, в котором имеют место фазовые превращения, тепловые эффекты и массоперенос [1]. В отличие от традиционного подхода [2], основанного на анализе равновесных условий существования гидратной фазы, развитие процесса определяется динамическим взаимодействием нескольких конкурирующих механизмов: фазового превращения, тепловыделения, теплоотвода и диффузии. В рамках предлагаемого подхода система «газ – вода – гидрат» рассматривается как нелинейная динамическая система с внутренней обратной связью [3]. На микроуровне формирование гидратной структуры описывается моделью гидратообразования, основанной на принципе энергетического подобия с процессом адсорбции льдоподобными ассоциатами молекул воды и положениях неравновесной термодинамики, учитывающей псевдосжиженное состояние молекул гидратообразователей в полостях каркаса [4]. Это позволяет задать локальное равновесное состояние, служащее базой для дальнейшего динамического анализа.

Кинетический уровень описывает скорость роста гидратной фазы и определяется совместным действием диффузии, теплопереноса и фазового превращения. Существенную роль играет выделение скрытой теплоты гидратообразования, приводящее к локальному изменению температуры и, как следствие, к изменению условий равновесия. Таким образом,

возникает положительная обратная связь, аналогичная наблюдаемой в автокаталитических и тепловзрывных системах.

Для обобщения описания введен безразмерный параметр энергетического подобия $П_E$, характеризующий соотношение теплового эффекта фазового перехода и текущего термобарического состояния системы. Совместно с ним используются безразмерные критерии, отражающие интенсивность теплообмена и относительную роль транспортных ограничений. Эволюция системы может быть представлена в виде:

$$d\alpha/dt = F(П_E, Ste_H, Bi_H, Da_H),$$

где α – степень превращения, Ste_H – гидратное число Стэфана, Bi_H – гидратное число Био, Da_H – гидратное число Дамкёлера.

Введенные параметры определяют структуру фазового пространства системы и положение границ устойчивости.

Анализ показывает существование нескольких характерных режимов. В области низких значений параметров система находится в устойчивом состоянии, при котором гидратная фаза формируется медленно и контролируется теплоотводом. При промежуточных значениях реализуется метастабильный режим, чувствительный к внешним возмущениям. При достижении критических комбинаций параметров возникает режим ускоренного (лавинообразного) гидратообразования, связанный с нарушением теплового баланса и усилением положительной обратной связи.

На макроскопическом уровне существенное влияние оказывают условия течения: скорость потока, теплообмен со стенкой трубопровода и начальная обводненность системы. Эти факторы определяют положение системы в пространстве параметров и, следовательно, вероятность перехода между режимами. Показано, что границы устойчивости не совпадают с равновесными кривыми гидратообразования и смещаются в зависимости от интенсивности тепло- и массопереноса.

Предложенный подход позволяет рассматривать гидратообразование как частный случай более общего класса нелинейных фазовых переходов в открытых системах. Полученные результаты согласуются с представлениями о неравновесных процессах в термодинамике необратимых явлений и теории устойчивости [4, 5]. Это создает основу для дальнейшего анализа режимных переходов и разработки универсальных критериев устойчивости.

Список литературы

1. Запорожец Е.П., Шостак Н.А. Гидраты: монография. – Краснодар: Издательский Дом – Юг, 2014. – 460 с.
2. Sloan E.D., Koh C.A. Clathrate Hydrates of Natural Gases. 3rd ed. Boca Raton: CRC Press, 2008. – 720 p.
3. Шостак Н.А. Особенности определения параметров кристаллической решетки из льдоподобных ассоциатов молекул воды при гидратообразовании // Физико-химические аспекты изучения кластеров, наноструктур и наноматериалов. 2024. № 16. – С. 1071–1078.
4. Shostak N.A. Features of understanding and describing the hydrate formation process // Reviews on Advanced Materials and Technologies. 2024. vol. 6. no. 3. – Pp. 113–119.
5. Prigogine I. Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes. New York: Interscience, 1967. – 160 p.
6. Frank-Kamenetskii D.A. Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics. Moscow: Nauka, 1967. – 491 p.

УДК 378.004 (публикация отозвана 22.09.2026)

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МОБИЛЬНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Элежбиев Б.Э.,
ассистент кафедры «Программирование и инфокоммуникационные технологии»
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: bulat_elezhbiev@mail.ru

Аннотация: *Закономерным следствием всеобъемлющей цифровизации стало проникновение мобильных технологий в образовательную среду, что обусловило формирование и развитие концепции мобильного обучения. В сложившихся условиях ключевое значение приобретает разработка научно обоснованных подходов к оценке того, насколько результативно применение мобильных приложений в ходе учебного процесса. Представленное исследование обращается к анализу дидактического потенциала подобных программных продуктов, рассматривая их влияние на итоговое качество предметных знаний и умений.*
Ключевые слова: *мобильное обучение, педагогическая эффективность, цифровая дидактика, образовательные технологии, когнитивная нагрузка, информационная компетентность.*

EVALUATION OF THE EFFECTIVENESS OF USING MOBILE APPLICATIONS IN THE EDUCATIONAL PROCESS

Elezhbiev B.E.,
Assistant Professor, Department of Programming and Infocommunication Technologies
Kadyrov Chechen State University

Abstract. *The rapid digital transformation of all spheres of human activity has led to the introduction of mobile technologies into the education system, giving rise to the phenomenon of mobile learning. In this context, the problem of objectively assessing the effectiveness of specialized software products in the educational process is particularly significant. This study focuses on analyzing the didactic potential of mobile applications and their impact on the quality of knowledge acquisition.*
Keywords: *mobile learning, pedagogical effectiveness, digital didactics, educational technologies, cognitive load, information literacy.*

Введение. Современный этап развития образования характеризуется глубокой интеграцией цифровых технологий в ткань педагогического взаимодействия. Одним из наиболее доступных и востребованных инструментов становятся мобильные устройства, которые перестали восприниматься исключительно как средства коммуникации и развлечения, заняв прочное место в арсенале средств обучения. Проникновение мобильных приложений в учебную среду открывает новые горизонты для организации непрерывного образования и реализации принципов «обучения в любое время и в любом месте». Однако сам по себе факт наличия технологий не гарантирует повышения качества образования, что ставит перед педагогической наукой сложную задачу осмысления и измерения реального эффекта от их применения. Использование приложений трансформирует традиционную логику построения занятий, смещая акцент с запоминания информации на развитие когнитивных способностей и практических навыков. Как справедливо отмечают исследователи, Калмыкова С.В., Иванова Н.В. «мобильные технологии предлагают принципиально иные способы взаимодействия с содержанием, делая процесс учения более индивидуализированным и контекстным» [1, с. 52].

Методика. Педагогическое сообщество испытывает потребность в надежном инструментарии, который позволял бы определять не только оправданность внедрения конкретных программных продуктов, но и специфику их воздействия на мотивационную сферу, познавательную активность и итоговые образовательные достижения учащихся. Разрешение данной задачи имеет принципиальное значение для формирования продуманной стратегии цифровой трансформации образования, способной уберечь как от завышенных

ожиданий относительно технологических новшеств, так и от недооценки их действительного дидактического потенциала. Именно поэтому проблема оценки эффективности использования мобильных приложений обретает сегодня особую научную значимость, требуя углубленного теоретического анализа и разработки методологических оснований для проведения соответствующих изысканий.

Обращение к данной проблеме предполагает выбор адекватного методологического инструментария, позволяющего рассмотреть вопрос об эффективности мобильных приложений в единстве дидактических, психологических и технологических составляющих. Теоретическая часть исследования строилась на анализе научно-педагогической литературы, посвященной цифровизации образования и внедрению мобильных технологий, а также на синтезе полученных данных с целью выявления ключевых критериев результативности обучения. Как справедливо подчеркивает И.В. Роберт, «анализ современных тенденций развития дидактики в условиях цифровой трансформации требует применения системного подхода, позволяющего выявить взаимосвязи между технологическими инновациями и педагогическими закономерностями» [4, с. 27]. Существенное место в работе занял сравнительно-сопоставительный анализ различных методик использования программных продуктов в учебной деятельности, благодаря которому удалось выделить как общие, так и специфические черты их воздействия на познавательные процессы обучающихся.

Основная часть. Интеграция мобильных приложений в современное образование представляет собой сложный и многогранный процесс, требующий глубокого осмысления с позиций педагогической науки. Использование портативных цифровых устройств открывает перед системой обучения принципиально новые возможности, связанные с персонализацией траекторий освоения знаний, интерактивностью взаимодействия с учебным контентом и доступностью информации вне зависимости от пространственно-временных ограничений. Однако сам факт внедрения технологических новшеств не является гарантией повышения качества образования, что делает проблему объективной оценки их эффективности одной из ключевых в современной дидактике. Как справедливо отмечает С.В. Калмыкова, «оценка эффективности мобильных технологий в обучении должна строиться не на фиксации факта их использования, а на анализе тех изменений, которые происходят в структуре познавательной деятельности учащихся» [1, с. 55].

В педагогической практике наблюдается значительное разнообразие подходов к использованию мобильного программного обеспечения: от вспомогательных инструментов для выполнения рутинных операций до полноценных платформ, организующих весь цикл обучения. Ж.В. Идрисова, С.Х. Алихаджиев и Х.С. Магомедова, исследуя роль социальных сетей в профессиональной социализации, приходят к выводу, что «цифровые платформы могут выступать эффективным инструментом наставничества, позволяя выстраивать непрерывную коммуникацию и поддерживать профессиональную идентичность будущих специалистов» [5, с. 29]. Это разнообразие порождает сложности в выработке унифицированных критериев оценки, поскольку эффективность приложения может проявляться в различных плоскостях. Так, для одних дисциплин ключевым показателем становится ускорение выработки практических навыков, для других – углубление понимания теоретических концепций за счет визуализации, для третьих – развитие коммуникативных компетенций в процессе совместной работы в цифровой среде. И.В. Роберт подчеркивает, что «развитие дидактики в условиях цифровой трансформации требует создания новой системы оценивания, адекватно отражающей вклад технологий в достижение образовательных результатов и учитывающей специфику цифрового поколения обучающихся» [3, с. 20].

Существенное влияние на результативность использования мобильных приложений оказывает готовность самого педагога к работе в новой цифровой реальности. Преподаватель перестает быть единственным источником знаний, трансформируясь в навигатора, помогающего учащимся ориентироваться в информационных потоках и выстраивать индивидуальные образовательные маршруты. Как отмечается в современных исследованиях, «эффективность цифровых инструментов напрямую зависит от того, насколько органично они

вписаны в существующую дидактическую культуру и методическую систему педагога» [2, с. 89]. Следовательно, оценка эффективности должна учитывать и этот субъективный фактор, а также предусматривать анализ возможных рисков, связанных с фрагментацией знаний, снижением навыков устной речи и повышением когнитивной нагрузки из-за обилия отвлекающих факторов, встроенных в мобильные приложения.

Особого обсуждения заслуживает вопрос о трансформации ролей участников образовательного процесса. Полученные данные свидетельствуют, что успешное использование мобильных приложений ведет к перераспределению учебной нагрузки: возрастает доля самостоятельной работы учащихся, требующей от них развитых навыков самоорганизации и критического мышления. Одновременно усложняется и функция преподавателя, который должен не только владеть техническими аспектами работы приложений, но и уметь проектировать учебные ситуации, в которых их использование будет педагогически оправдано. Как отмечается в одной из работ, посвященных совместной сетевой деятельности, «педагогический дизайн с использованием мобильных устройств требует от преподавателя понимания логики сетевых коммуникаций и умения выстраивать продуктивное взаимодействие в цифровой среде» [3, с. 38].

Результативность их внедрения определяется не столько функциональными возможностями программного обеспечения, сколько качеством педагогического проектирования учебных ситуаций, в которых эти приложения задействованы. Ожидаемым эффектом от проведенного исследования является углубление теоретических представлений о критериях и показателях эффективности мобильного обучения, что может послужить основой для разработки практических рекомендаций для педагогов. Понимание того, что мобильные приложения должны становиться не заменой, а органичным дополнением традиционных методов, позволяет выстроить более гармоничную стратегию цифровой трансформации образования. Внедрение разработанных подходов в педагогическую практику должно способствовать повышению качества учебного процесса за счет более осознанного и методически выверенного использования потенциала мобильных технологий, что, в конечном счете, приведет к формированию у обучающихся не только предметных знаний, но и ключевых компетенций XXI века.

Заключение. В ходе анализа и обобщения практического опыта была выявлена необходимость разработки новых критериев и методик оценивания, адекватных природе мобильного обучения. Традиционные подходы, ориентированные преимущественно на фиксацию конечных результатов, оказываются недостаточными для понимания тех глубинных изменений, которые происходят в структуре учебной деятельности под влиянием цифровых инструментов. Перспективным представляется смещение акцента на оценку процесса учения, на анализ того, как именно мобильные приложения помогают учащимся осваивать новые когнитивные стратегии, организовывать собственную познавательную деятельность и взаимодействовать с другими субъектами образовательного процесса в цифровой среде.

Список литературы

1. Джангаров А.И., Потапова Н.В. Мобильные технологии как инструмент обучения на курсах бакалавриата. Педагогический журнал. 2021. Т. 11. № 2-1. – С. 161–165.
2. Идрисова Ж.В., Алисултанова Э.Д., Алихаджиев С.Х. Педагогические условия использования технологии микрообучения (microlearning) на базе социальных сервисов для стимулирования познавательной активности будущих бакалавров / Научный бюллетень Чеченского государственного университета им. А.А. Кадырова. 2025. № 4 (8). – С. 23–28.
3. Идрисова Ж.В., Алихаджиев С.Х., Магомедова Х.С. Социальные сети как фактор профессиональной идентичности: новые формы наставничества и профессиональной социализации / Научный бюллетень Чеченского государственного университета им. А.А. Кадырова. 2025. № 4 (8). – С. 29–35.
4. Калмыкова, С.В. Оценка эффективности мобильных технологий в обучении: методологический аспект / С.В. Калмыкова, Н.В. Иванова // Педагогика. 2023. № 5. – С. 52–60.

УДК 517

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АЛГЕБРАИЧНОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ

Юань Б.,
Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, г. Алматы
e-mail: 06littleluck06@gmail.com
Керимбаев Р.К.,
Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, г. Алматы
e-mail: ker im@mail.ru

Аннотация. *Изучается группа полиномиальных автоморфизмов над полем характеристики нуль с акцентом на явления алгебраичности, возникающие из их явной структуры. Наш подход основан на анализе разложений на элементарные автоморфизмы. Мы рассматриваем, каким образом композиции элементарных преобразований накладывают ограничения на координатные функции, и исследуем условия, при которых такие композиции проявляют алгебраическую зависимость. В частности, мы изучаем, в какой степени алгебраичность может быть обнаружена на уровне конечных композиций элементарных автоморфизмов и как это связано со структурными свойствами группы автоморфизмов. Рассуждения опираются на идею о том, что алгебраические ограничения могут отражаться в соответствующих линейных данных, в духе теоремы Кэли – Гамильтона.*
Ключевые слова: *полиномиальные автоморфизмы, элементарные автоморфизмы, алгебраичность, tame-автоморфизмы, теорема Кэли – Гамильтона.*

SOME QUESTIONS OF ALGEBRAICITY OF POLYNOMIAL AUTOMORPHISMS

Yuan B.,
Yuan Beibei–Al Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)
Kerimbayev R.K.,
Al Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)

Abstract. *We study the group of polynomial automorphisms over a field of characteristic zero, with emphasis on algebraicity phenomena arising from their explicit structure. Our approach is based on the analysis of decompositions into elementary automorphisms. We examine how compositions of elementary transformations constrain the coordinate functions and investigate conditions under which such compositions exhibit algebraic dependence. In particular, we consider the extent to which algebraicity can be detected from finite compositions of elementary automorphisms, and how this relates to structural properties of the automorphism group. The analysis is guided by the idea that algebraic constraints may be reflected in associated linear data, Inspiration of the Cayley–Hamilton theorem.*
Keywords: *Polynomial automorphisms, Elementary automorphisms, Algebraicity, Tame automorphisms, Cayley–Hamilton theorem.*

Данная работа посвящена изучению группы полиномиальных автоморфизмов $k[x_1, \dots, x_n]$ над полем K характеристики нуль с акцентом на явления алгебраичности, возникающие из их явной структуры.

Предлагается подход, основанный на анализе разложений на элементарные автоморфизмы. При этом мы выясняем каким образом композиции элементарных преобразований накладывают ограничения на координатные функции, и затем исследуем условия, при которых такие композиции проявляют алгебраическую зависимость.

В частности, рассматривается вопрос о том, в какой степени алгебраичность может быть обнаружена на уровне конечных композиций элементарных автоморфизмов, и как это связано со структурными свойствами группы автоморфизмов. Наши рассуждения опираются на идею о том, что алгебраические ограничения могут отражаться в соответствующих линейных данных, в духе теоремы Кэли – Гамильтона.

Список литературы

1. Belov-Kanel, A., and Kontsevich, M. The Jacobian conjecture is stably equivalent to the Dixmier conjecture. Moscow Mathematical Journal, 7(2):209–218, 2007.2.
2. Shestakov, I.P., and Umirbaev, U.U. The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables. Journal of the American Mathematical Society, 17(1):197–227, 2004.
3. van den Essen, A. Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture.Birkhäuser, 2000.
4. Jung, H.W.E. Über ganze birationale Transformationen der Ebene. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 184:161–174, 1942.

УДК 004.8

МЕТОДЫ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДАННЫХ ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Юсупова А.С.,
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: a.yusupova@gmail.com
Альтемиров М.-Э.Р.,
студент 4 курса ИТиСС
ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
e-mail: eminaltemirovv@gmail.com

Аннотация. *В данной работе рассмотрено применение методов машинного обучения для анализа и прогнозирования данных естественно-научных экспериментов. Основное внимание уделено ситуациям, когда набор измерений невелик, а результат зависит от нескольких параметров. Показано, что алгоритмы регрессии, деревья решений и ансамблевые методы помогают выявлять скрытые связи между величинами и получать более устойчивый прогноз. Отмечено, что надежность результата зависит не только от выбора модели, но и от качества исходных данных и их подготовки.*
Ключевые слова: *машинное обучение, экспериментальные данные, прогнозирование, малые выборки, анализ данных.*

MACHINE LEARNING METHODS FOR ANALYSIS AND PREDICTION OF NATURAL SCIENCE EXPERIMENTAL DATA

Yusupova A.S.,
Kadyrov Chechen State University
Altemirov M.-E.R.,
student of 4, ITiSS
Associate Professor of the Department of General Physic

Abstract. *This paper considers the use of machine learning methods for the analysis and prediction of natural science experimental data. Special attention is paid to cases where the dataset is limited and the result depends on several parameters. It is shown that regression algorithms, decision trees, and ensemble methods help reveal hidden relationships between variables and provide a more stable prediction. It is noted that the reliability of the result depends not only on the selected model but also on the quality of the data and their preprocessing.*
Keywords: *machine learning, experimental data, prediction, small datasets, data analysis.*

Современный естественно-научный эксперимент почти всегда сопровождается накоплением большого количества измерений. Даже в небольшой лабораторной работе постепенно появляются таблицы со значениями параметров, результатами повторных серий, характеристиками среды и дополнительными наблюдениями. На первом этапе такие данные часто обрабатываются с помощью простых статистических приемов и визуального сравнения графиков. Однако при росте числа параметров этого становится недостаточно. Связи между величинами могут быть нелинейными, часть факторов влияет на результат косвенно, а небольшое число наблюдений затрудняет уверенный прогноз. По этой причине методы машинного обучения все чаще рассматриваются как удобный инструмент для работы с экспериментальными данными [1, 2].

Особый интерес такие методы вызывают в тех задачах, где требуется не просто описать уже полученный результат, а предсказать поведение системы при изменении условий эксперимента. В физике, химии, биологии и материаловедении это может быть изменение прочности образца, выход реакции, скорость процесса, теплопроводность материала или изменение измеряемого показателя при варьировании температуры, давления, времени выдержки и состава среды. Обычная таблица не всегда позволяет быстро заметить

закономерность, тогда как обученная модель способна уловить зависимость между признаками и целевой величиной даже в более сложной постановке [3].

Наиболее понятным вариантом для подобных задач считается регрессионный подход. Если имеются входные параметры и известный численный результат, задача сводится к прогнозированию целевого показателя по набору признаков. На базовом уровне может использоваться линейная регрессия, так как она проста в реализации и позволяет достаточно ясно интерпретировать влияние отдельных факторов. Однако реальные данные эксперимента редко подчиняются строго линейной зависимости. При наличии шумов, выбросов и взаимодействия признаков более полезными оказываются дерево решений, случайный лес и градиентный бустинг, так как они лучше описывают сложную структуру данных [4].

Таблица 1. Сравнение методов машинного обучения для анализа экспериментальных данных

Метод	Что позволяет сделать	Сильные стороны	Ограничения
Линейная регрессия	Оценить зависимость результата от нескольких параметров и построить базовый прогноз.	Простая интерпретация, быстрое обучение, удобна как отправная модель.	Хуже работает при выраженной нелинейности и сложных взаимодействиях признаков.
Дерево решений	Выявить правила, по которым экспериментальные условия влияют на итоговый показатель.	Наглядность, понятная логика решений, возможность анализа пороговых значений.	Чувствительно к малой выборке и может переобучаться.
Случайный лес	Повысить устойчивость прогноза за счёт объединения нескольких деревьев.	Лучше обрабатывает шумные данные, уменьшает риск случайной ошибки одной модели.	Интерпретация сложнее, чем у одиночного дерева решений.
Градиентный бустинг	Получить более точный прогноз при сложной и нелинейной зависимости признаков.	Высокая точность, гибкость, возможность учитывать сложную структуру данных.	Требует аккуратной настройки и контроля переобучения.

Отдельного внимания требует работа с малыми выборками. Для учебных лабораторных задач это обычная ситуация, поскольку получение большого количества наблюдений связано с временными и техническими ограничениями. В таких условиях модель может переобучаться, то есть слишком точно подстраиваться под имеющиеся значения и плохо работать на новых данных. Чтобы уменьшить этот риск, выполняются очистка таблицы от пропусков, проверка выбросов, нормализация признаков, а также разделение набора на обучающую и тестовую части. Если измерений совсем мало, полезной оказывается перекрестная проверка, позволяющая оценить устойчивость модели без серьезной потери данных [2, 5].

Не менее важным этапом остается отбор признаков. В экспериментальной практике часто фиксируется все, что удалось измерить, но далеко не каждый параметр действительно влияет на итоговую величину. Избыточный набор признаков делает модель менее устойчивой и повышает риск случайной подгонки. Поэтому было показано, что перед обучением полезно оценить корреляции между переменными, устранить дублирующие показатели и оставить только те параметры, которые имеют содержательную связь с задачей. Такой подход повышает точность прогноза и делает полученный результат более понятным с прикладной точки зрения [3].

Для естественно-научных задач важна не только точность, но и объяснимость. Формально хороший прогноз сам по себе малоценен, если невозможно понять, какие факторы влияют на результат сильнее остальных. По этой причине на начальном этапе особенно удобны модели, допускающие интерпретацию: линейная регрессия, дерево решений и методы оценки важности признаков. Они позволяют перейти от простого предсказания к содержательному разбору самого эксперимента. Это помогает увидеть, какие параметры требуют более внимательного контроля и в каком диапазоне изменение условий особенно заметно влияет на итоговую величину [4, 5].

Было рассмотрено, как подобный подход может использоваться на примере типичной экспериментальной серии, в которой целевой параметр зависит от температуры, времени воздействия, состава образца и характеристик среды. После предварительной обработки

данных строятся несколько моделей, затем сравнивается качество прогноза по средней абсолютной ошибке, среднеквадратичной ошибке и коэффициенту детерминации. Если простая линейная модель дает слабый результат, а ансамблевый метод работает устойчивее, это указывает на более сложный характер зависимости между параметрами. Вследствие этого машинное обучение выступает не заменой классической обработки, а ее полезным расширением.

Еще одно достоинство таких методов связано с возможностью раннего обнаружения аномалий в измерениях. Алгоритмы помогают находить нетипичные значения, выделять нестабильные режимы и быстрее замечать проблемные точки, что позволяет точнее корректировать дальнейший ход работы.

Практическая ценность такого подхода состоит и в том, что он помогает рациональнее планировать эксперимент. Если уже после первых серий измерений видно, какие параметры влияют сильнее всего, основное внимание можно перенести на наиболее чувствительные диапазоны факторов. Это особенно удобно при ограниченном времени и высокой стоимости испытаний.

При этом возможности машинного обучения не следует переоценивать. Качество прогноза всегда зависит от надежности исходных данных и корректности их интерпретации. Если набор содержит значительные погрешности, пропуски или плохо согласованные измерения, даже сложная модель не даст по-настоящему убедительного результата. Кроме того, без понимания физического, химического или биологического смысла параметров высокие численные метрики могут создавать ложное впечатление точности. В итоге наиболее надежный результат достигается тогда, когда алгоритмический анализ сочетается с предметным пониманием задачи и аккуратной работой с данными.

В итоге было показано, что методы машинного обучения хорошо подходят для анализа и прогнозирования данных естественно-научных экспериментов, особенно в тех случаях, когда число наблюдений ограничено, а зависимость между параметрами не является очевидной. Наиболее полезный эффект достигается за счет последовательной подготовки данных, отбора признаков, проверки устойчивости модели и содержательной интерпретации полученных результатов. Это позволяет использовать машинное обучение как практический инструмент, который помогает извлекать из экспериментальных данных больше информации, точнее оценивать влияние факторов и делать прогноз более обоснованным.

Список литературы

1. Бишоп К.М. Распознавание образов и машинное обучение. – Нью-Йорк: Springer, 2006. – 738 с.
2. Жерон А. Практическое машинное обучение с Scikit-Learn, Keras и TensorFlow. – Себастопол: O’Reilly Media, 2019. – 851 с.
3. Гудфеллоу И., Бенджио И., Курвилль А. Глубокое обучение. Кембридж: MIT Press, 2016. 775 с.
4. Хасти Т., Тибширани Р., Фридман Дж. Элементы статистического обучения. – Нью-Йорк: Springer, 2009. – 745 с.
5. Джеймс Г., Уиттен Д., Хасти Т., Тибширани Р. Введение в статистическое обучение. – Нью-Йорк: Springer, 2021. – 607 с.

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК И ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Материалы Всероссийской научно-практической конференции (19–22 апреля 2026 г.)

Под редакцией М.Р. Таштамирова

Верстка, подготовка оригинал-макета
Р.Р. Эдаев

Подписано в печать 04.05.2026 г. Формат 60x84/8
Бумага офисная. Печать-ризография.
Уч.-изд. л. 15,5. Тираж 100 экз.

Издательство Чеченского государственного университета им. А.А. Кадырова
Адрес: 364037 ЧР, г. Грозный, ул. Субры Кишиевой, 33