Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Чеченский государственный университет
имени Ахмата Абдулхамидовича Кадырова»

Асхабов С.Н., Джабраилов А.Л., Товсултанов А.А.

Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с суммарно-разностными ядрами и начально-краевые задачи

Монография

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FEGS-2020-0001)

Рекомендовано к опубликованию Чеченским региональным отделением Научно-методического совета по математике Минобрнауки РФ

Грозный – 2022

УДК 517.91
ББК 22.161.6 А 91

Рецензенты: **Хамидова Таус Андиевна**, кандидат физ.-мат. наук, заведующий кафедрой математического анализа, алгебры и геометрии Института математики, физики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
Тарамова Хеда Сумановна, кандидат физ.-мат. наук, доцент, декан факультета физики, математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Чеченский государственный педагогический университет»

Асхабов С.Н., Джабраилов А.Л., Товсултанов А.А. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с суммарно-разностными ядрами и начально-краевые задачи. Монография. – Грозный: Издательство ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова», 2022. – 196 с.

Монография посвящена построению теории сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с монотонными нелинейностями, нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с разностными, суммарными или суммарно-разностными ядрами, краевых задач для нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядрами Гильберта и Коши, а также начально-краевых задач для нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений типа свертки.

Изучаются классы обобщенных потенциалов Бесселя и рассматривается возможность их применения к сингулярным уравнениям.

Исследуется новый класс эллиптических функционально-дифференциальных уравнений, содержащих одновременно сжатия и сдвиги, а также сжатия и повороты аргументов старших производных неизвестной функции.

Монография предназначена научным работникам и специалистам в области нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Кроме того, книга может быть использована в учебном процессе преподавателями вузов, а также студентами, магистрантами, аспирантами, обучающимися по направлению подготовки «Математика».

ISBN 978-5-91127-360-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время теория интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра, Фредгольма, Гаммерштейна и Урысона достаточно хорошо разработана. Значительно меньше работ посвящено нелинейным интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям с разностными и, особенно, суммарными и суммарно-разностными ядрами. Такие уравнения ранее изучались, как правило, либо на основе принципа Шаудера, либо на основе принципа сжимающих отображений, что приводило к жестким ограничениям на область существования решений. В связи с приложениями нелинейных уравнений указанного типа в p-адической математической физике, теории аналитических функций, гидроаэродинамике, теории упругости и других, важное значение имеет получение глобальных теорем о существовании, единственности и способах нахождения их решений. Для достижения этой цели в случае нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядрами Гильберта и Коши нами используется метод максимальных монотонных (по Браудеру-Минти) операторов, а в случае нелинейных уравнений Вольтерра с разностными, суммарными или суммарно-разностными ядрами нами используется метод весовых метрик (аналог метода А. Белицкого) или метод априорных оценок.

Известно, что исследование нелинейных краевых задач «основано по существу на теории так называемых монотонных операторов и находится в центре внимания выдающихся современных математиков (Ф. Браудера, Дж. Лионса, Й. Нечаса и др.)» (см. монографию: Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. Стр. 565).

К сожалению, как отмечено в монографии В. Хатсона и Дж. Пима «Приложения функционального анализа в теории операторов. М.: Мир, 1983. Стр. 236», термин «монотонный оператор» используется в функциональном анализе в нескольких различных смыслах. Так, в работах М.А. Красносельского, И.А. Бахтина и других развита глобальная теория нелинейных уравнений с монотонными (по Красносельскому) операторами в банаховых пространствах с конусами, состоящими из неотрицательных функций, а в работах Г. Минти, Ф. Браудера, Р.И. Качуровского, М.М. Вайнберга и других построена теория нелинейных уравнений с монотонными (по Браудеру-Минти) операторами в рефлексивных пространствах, состоящих из вещественнозначных или комплекснозначных функций (т.е. не являющимся знакоопределенными).

В главе 1 данной работы при исследовании краевых задач для нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядрами Гильберта и Коши, а также нелинейных уравнений типа свертки мы используем метод максимальных монотонных (по Браудеру-Минти) операторов и его модификации. Метод монотонных по Браудеру-Минти операторов хорошо известен применительно к уравнениям Гаммерштейна в пространствах Лебега, когда априори предполагается, что интегральный оператор с ядром общего вида является положительным по Бохнеру. Упомянем, в связи с этим работы М.М. Вайнберга, Г.И. Качуровского, Ф. Браудера, Х. Брезиса и других, в которых не приводятся условия на ядра, обеспечивающие положительность соответствующих операторов по Бохнеру.

Заметим, что в случае линейных операторов, действующих в рефлексивных пространствах, определение монотонного по Браудеру-Минти оператора совпадает с определением положительного по Бохнеру оператора.

В §1 данной главы найдены условия, при которых интегро-дифференциальные операторы с ядрами Гильберта и Коши являются максимальными монотонными по Браудеру-Минти операторами в вещественных весовых пространствах Лебега. Эти условия существенно использованы в §2 при доказательстве глобальных теорем о существовании и единственности решения краевых задач для различных классов нелинейныхуравнений, порожденных операторами с ядрами Гильберта и Коши. Доказательства этих теорем опираются на новую идею обращения нелинейных операторов суперпозиции (операторов Немыцкого) и установлении коэрцитивности обратных операторов.

В §3 доказаны критерии положительности интегральных и интегро-дифференциальных операторов свертки с суммируемыми, в отличие от §2, ядрами. Дано применение этих критериев к краевым задачам для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки.

В §4 методом монотонных по Браудеру-Минти операторов доказаны глобальные теоремы о существовании и единственности решения для различных классов нелинейных интегральных уравнений типа свертки в комплексных пространствах Лебега.

В §§1-5 главы 2 при исследовании интегральных и интегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа со степенной нелинейностью и с суммарными, разностными или суммарно-разностными ядрами, в случаях когда разыскиваются неотрицательные непрерывные решения, применяется развиваемый нами метод весовых метрик (аналог метода А. Белицкого) или метод априорных оценок, позволяющий строить решения без ограничений на область существования решений.

Применяемый нами метод весовых метрик принципиально отличается от метода А. Белицкого, в частности, тем, что на нелинейность не накладывается условие Липшица и при построении метрик используются априорные оценки решений рассматриваемых уравнений, а не коэффициенты Липшица.

Как известно (см. монографию: Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969. Стр. 218), с помощью теорем о неподвижной точке можно доказывать по крайней мере локальное существование и единственность решений нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений. Если нелинейность удовлетворяет условию Липшица с константой такой, что её произведение на длину промежутка, в котором ищется решение, достаточно мало, то получается сжимающее отображение. «Отсюда следуют теоремы локального существования и единственности. Для объединения этих локальных решений в глобальное требуются уже отдельные рассуждения» (см. упомянутую выше монографию Р. Эдвардса, стр. 218). А. Белицкий предложил более эффективный метод, при котором вводится новое определение расстояния, зависящее от постоянной Липшица, что даёт возможность доказывать непосредственно глобальные теоремы существования и единственности. Описание этого метода приведено в процитированной монографии Р. Эдвардса. Применяемый в данной работе метод весовых метрик отличается от метода Белицкого тем, что вводимая нами метрика зависит не от постоянной Липшица, а от априорных оценок решений рассматриваемых уравнений.

Отметим, что метод весовых метрик (или метод априорных оценок) к интегро-дифференциальным уравнениям со степенной нелинейностью и суммарно-разностными ядрами, а также системам таких уравнений и интегральным уравнениям с суммарными и суммарно-разностными ядрами, ранее не применялся.

Заметим, что при построении метрики в случае разностных ядер используется априорная оценка снизу, а в случае суммарных и суммарно-разностных ядер используется оценка сверху.

В главе 3 представлена форма обратного оператора, используя технику регуляризации расходящихся интегралов в терминах соответствующих отрезков ряда Тейлора-Дельсарта. Обращение можно интерпретировать как новый оператор дробного дифференцирования произвольного положительного порядка. Дальнейшие задачи в этом направлении включают подробное исследование этих операторов в различных пространствах функций, а также анализ дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка с дробными производными в виде обращений обобщенного потенциала Бесселя.

Введены нормы в пространстве обобщенных бесселевых потенциалов на основе весовых интегралов Дирихле. Обобщение достигается путем рассмотрения оператора Лапласа - Бесселя, построенного на основе сингулярного дифференциального оператора Бесселя.

Рассмотрено обобщение ядра Гаусса-Вейерштрасса, являющееся решением сингулярного уравнения теплопроводности и соответствующий ему интеграл. Изучаются их свойства. Показано, что обобщенный потенциал Бесселя функции, интегрируемой в p-й степени со степенным весом, может быть представлен интегралом очень простого вида, при помощи ядра Гаусса-Вейерштрасса.

В главе 4 проведено исследование краевых задач в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений, содержащих одновременно сжатия и сдвиги, а также сжатия и повороты аргументов старших производных неизвестной функции.

Построенная для указанного класса уравнений теория существовала в аналогичной общности лишь для дифференциально-разностных уравнений. При этом вопрос о спектральной устойчивости для функционально-дифференциальных операторов прежде вообще не рассматривался. Важной отличительной особенностью рассматриваемых задач является то, что область, где задано уравнение, содержит неподвижную точку для операторов сжатия и растяжения (начало координат). При этом под действием преобразований аргумента внутри области оказывается счетное число сдвигов границы стягивающихся к началу координат. Это создает принципиальные трудности в исследовании по сравнению со случаем дифференциально-разностных уравнений. С другой стороны, уравнения со сжатиями и растяжениями обладают рядом новых свойств. Так, ядро краевой задачи для эллиптического уравнения со сжатием аргументов может быть бесконечномерным и содержать лишь негладкие функции. Гладкость решения краевой задачи во многих случаях равносильна его единственности. Имеет место и следующий интересный эффект: свойства краевой задачи в основном определяются значениями, которые коэффициенты при нелокальных членах (т.е. членах, содержащих преобразованные аргументы) принимают лишь в начале координат.

ГЛАВА 1. МЕТОД МОНОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данной главе при исследовании краевых задач для нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядрами Гильберта и Коши, а также нелинейных уравнений типа свертки мы используем метод максимальных монотонных (по Браудеру-Минти) операторов и его модификации.

§1. Строгая положительность сингулярных и нтегро-дифференциальных операторов с ядрами Гильберта и Коши

В работах Х.М. Когана [5], [6] в связи с решением одной вариационной задачи был изучен сингулярный интегро-дифференциальный оператор с ядром Коши

$$(T\varphi)(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u'(s)}{s-x}ds$$

как оператор, действующий из вещественного пространства $L_2(-1,1)$ в $L_2(-1,1)$ с областью определения

$$D(T) = \left\{ u(x) : u(x) \in AC[-1,1],\, u(-1) = u(1) = 0,\, \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot u'^2(x)dx < \infty \right\},$$

где $AC[-1,1]$ есть множество всех абсолютно непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций. В статье [6] приведено доказательство того, что оператор T симметричен и положителен, т.е. $(Tu,v) = (u,Tv)$ и $(Tu,u) \geq 0$, $\forall u,v \in D(T)$, где $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_2(-1,1)$.

В работе М. Шлайфа [7] установлено, что

$$(Tu,u) \geq \int_{-1}^{1}\frac{u^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad \forall u(x) \in D(T),$$

т.е. оператор T является строго положительным.

В данном параграфе доказывается, что сингулярный интегро-дифференциальный оператор с ядром Гильберта

$$(Gu)(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u'(s)\cdot \operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds$$

как оператор, действующий из пространства вещественных 2π-периодических функций $L_p(-\pi,\pi)$, $1<p<\infty$, в сопряженное с ним пространство $L_q(-\pi,\pi)$, $q=p/(p-1)$, с областью определения

$$D(G)=\left\{u(x): u(x)\in AC[-\pi,\pi],\, u(-\pi)=u(\pi)=0,\ \int_{-\pi}^{\pi}|u'(x)|^q dx<\infty\right\},$$

где $AC[-\pi,\pi]$ есть множество всех абсолютно непрерывных на отрезке $[-\pi,\pi]$ функций, является потенциальным, симметричным и строго положительным, причем

$$\langle Gu,u\rangle \equiv \int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u'(s)\cdot ctg\frac{s-x}{2}\,ds\right)\cdot u(x)dx = \pi\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(a_n^2+b_n^2\right),$$

где a_n, b_n есть коэффициенты ряда Фурье функции $u(x)\in D(G)$.

Строгая положительность и потенциальность сингулярного интегро-дифференциального оператора с ядром Гильберта. Пусть $1<p<\infty$ и $q=p/(p-1)$. Обозначим через $L_p(-\pi,\pi)$ множество всех измеримых по Лебегу на отрезке $[-\pi,\pi]$ вещественных 2π-периодических функций с конечной нормой $||u||_p=\left(\int_{-\pi}^{\pi}|u(x)|^p dx\right)^{1/p}$. Норму в сопряженном с ним пространстве $L_q(-\pi,\pi)$ обозначим через $\|\cdot\|_q$.

Поставим в соответствие функции $u(x)\in L_p(-\pi,\pi)$ её тригонометрический ряд Фурье

$$u(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos nx+b_n\cdot\sin nx\right), \tag{1}$$

где

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(x)\cdot\cos nx dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(x)\cdot\sin nx dx,\quad n\in\mathbf{N}, \tag{2}$$

есть коэффициенты ряда Фурье функции $u(x)$, а $\mathbf{N}$ есть множество всех натуральных чисел.

Следуя монографии Н.К. Бари [3], определим *сопряженную* с $u(x)$ функцию $\bar{u}(x)$:

$$\bar{u}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{u(x+s)-u(x-s)}{2\operatorname{tg}\frac{s}{2}}ds. \tag{3}$$

Известно [3, с. 573], что сопряженная функция $\bar{u}(x)$ представима в виде

$$\bar{u}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{u(s)}{2\operatorname{tg}\frac{s-s}{2}}ds = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(s)\cdot\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}ds, \tag{4}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши-Лебегу, и соответствующий ей тригонометрический ряд Фурье имеет вид:

$$\bar{u}(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\cdot\cos nx - a_n\cdot\sin nx\right), \tag{5}$$

где коэффициенты a_n и b_n определяются по формулам (2).

Рассмотрим теперь сингулярный интегральный оператор H с ядром Гильберта

$$(Hu)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(s)\cdot\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}ds, \tag{6}$$

где, как и выше, интеграл понимается в смысле главного значения по Коши-Лебегу.

Сравнивая (4) и (6) замечаем, что $(Hu)(x) = -\bar{u}(x)$. Значит, в силу (5),

$$(Hu)(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\cdot\cos nx - a_n\cdot\sin nx\right), \tag{7}$$

Пусть $u(x)\in L_p(-\pi,\pi)$, $v(x)\in L_q(-\pi,\pi)$. Обозначим коэффициенты их рядов Фурье через a_n, b_n и c_n, d_n, соответственно. Тогда [3, с. 218] справедливо *равенство Парсеваля*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(x)\cdot v(x)\,dx = \frac{a_0\cdot c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot c_n + b_n\cdot d_n\right). \tag{8}$$

Используя равенство Парсеваля (8), с учетом соотношений (1) и (7), для любого $u(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(Hu\big)(x)\cdot u(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\big(b_n \cdot a_n + (-a_n)\cdot b_n\big) = 0$$

или, в терминах скалярного произведения,

$$(Hu,u) = 0\,, \quad \forall u(x) \in L_2(-\pi,\pi)\,, \tag{9}$$

т.е. сингулярный интегральный оператор H с ядром Гильберта является положительным в пространстве $L_2(-\pi,\pi)$, но не является строго положительным оператором, так как не удовлетворяет условию: $(Hu,u) > 0$, если $u \neq 0$.

Заметим, что равенство (9) установлено в [1, с. 39] для сингулярного интегрального оператора с ядром Гильберта более общего вида чем H:

$$\big(Ru\big)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r(x,s)\cdot u(s)\cdot \mathrm{ctg}\frac{s-x}{2}ds\,,$$

где 2π-периодическая функция $r(x,s) = r(s,x) \in H_\delta$, $0 < \delta \leq 1$, т.е. является симметричной и удовлетворяет условию Гельдера (подробнее см. [2, §8]).

Рассмотрим, наконец, в пространстве $L_p(-\pi,\pi)$, $1 < p < \infty$, сингулярный интегро-дифференциальный оператор G с ядром Гильберта

$$\big(Gu\big)(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u'(s)\cdot \mathrm{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds\,,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши-Лебегу, с областью определения

$$D(G) = \left\{u(x) : u(x) \in AC[-\pi,\,\pi],\, u(-\pi) = u(\pi) = 0,\, \int_{-\pi}^{\pi}\left|u'(x)\right|^q dx < \infty\right\},$$

где $AC[-\pi,\pi]$ есть множество всех абсолютно непрерывных на отрезке $[-\pi,\pi]$ функций.

При исследовании нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Гильберта и связанных с ними краевых задач важную роль будет играть следующая теорема.

Теорема. *Сингулярный интегро-дифференциальный оператор с ядром Гильберта*

$$\left(Gu\right)(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u'(s)\cdot \mathrm{ctg}\,\frac{s-x}{2}\,ds$$

является строго положительным потенциальным оператором, причем

$$\langle Gu, u\rangle \equiv \int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u'(s)\cdot ctg\,\frac{s-x}{2}\,ds\right)\cdot u(x)dx = \pi\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(a_n^2 + b_n^2\right), \tag{10}$$

где a_n *и* b_n *есть коэффициенты ряда Фурье функции* $u(x)\in D(G)$*, определяемые по формулам (2).*

Доказательство. Докажем сначала, что оператор G является строго положительным. Пусть $u(x)\in D(G)$. Так как функция $u(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, то справедливо соотношение [3, с. 87]

$$u'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(b_n\cdot\cos nx - a_n\cdot\sin nx\right), \tag{11}$$

В силу (5), имеем

$$\overline{u'}(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty}\left(-n\cdot a_n\cdot\cos nx - n\cdot b_n\cdot\sin nx\right),$$

или

$$\overline{u'}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(a_n\cdot\cos nx + b_n\cdot\sin nx\right). \tag{12}$$

Используя равенство Парсеваля (8), получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{u'}(x)\cdot u(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(n\cdot a_n\cdot a_n + n\cdot b_n\cdot b_n\right).$$

Замечая, что $\overline{u'}(x) = \left(Gu\right)(x)$, последнее равенство можно записать в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u'(s)\cdot ctg\frac{s-x}{2}ds\right)\cdot u(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(a_n^2 + b_n^2),$$

что равносильно равенству (10). Из равенства (10) непосредственно вытекает, что оператор G является положительным. Очевидно, что левая часть равенства (10) обращается в нуль при $u(x) = C$ (заметим, что $a_n = b_n = 0$, если $u(x) = C$) и постоянная $C = 0$, т.е. $u(x) = 0$, так как по условию $u(-\pi) = u(\pi) = 0$. Таким образом, из равенства (10) вытекает, что $\langle Gu, u\rangle > 0$ при $u \neq 0$, т.е. оператор G является строго положительным.

Докажем теперь, что оператор G является симметричным. Пусть $u(x)\in L_p(-\pi,\pi)$, $v(x)\in L_q(-\pi,\pi)$. Обозначим коэффициенты их рядов Фурье через a_n, b_n и c_n, d_n, соответственно. Тогда, с учетом (12) и равенства $\overline{u'}(x)=(Gu)(x)$, имеем

$$(Gu)(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot(a_n\cdot\cos nx+b_n\cdot\sin nx),\qquad (Gv)(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot(c_n\cdot\cos nx+d_n\cdot\sin nx).$$

Поэтому, в силу равенства Парсеваля (8), получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(Gu)(x)\cdot v(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot(a_n\cdot c_n+b_n\cdot d_n),\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(x)\cdot(Gv)(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot(a_n\cdot c_n+b_n\cdot d_n).$$

Значит,

$$\int_{-\pi}^{\pi}(Gu)(x)\cdot v(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}u(x)\cdot(Gv)(x)\,dx,$$

т.е.

$$\langle Gu,v\rangle=\langle u,Gv\rangle,\quad \forall u,v\in D(G). \tag{13}$$

Из равенства (13) вытекает, что оператор G является симметричным (см. [4, с. 63]), т.е. $G=G^*$.

Осталось доказать, что оператор G является потенциальным. Рассмотрим, следуя примеру 5.3 из [4, с. 63] квадратичный функционал $f(u)=\langle Gu,u\rangle$. Так как множество $D(G)$ плотно в $L_p(-\pi,\pi)$ при любом $p\in(1,\infty)$, $G=G^*$ и $D(G)=D(G^*)$, то (см. [4, с. 63])

$$\operatorname{grad} f(u)=Gu+G^*u=2\cdot Gu\quad\text{или}\quad Gu=2^{-1}\cdot\operatorname{grad} f(u),$$

т.е. линейный оператор G, действующий из $D(G)$ в $L_q(-\pi,\pi)$, $q=p/(p-1)$, является потенциальным.

Теорема полностью доказана.

Основные результаты данного параграфа были опубликованы в статьях [8]-[11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Асхабов С.Н. Применение метода монотонных операторов к решению нелинейных сингулярных интегральных уравнений и их систем: Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Махачкала: ДГУ, 1981. – 120 с.
2. Асхабов С.Н. Нелинейные сингулярные интегральные уравнения в пространстве Лебега. – Грозный: ЧГУ, 2013. – 136 с.
3. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 936 с.
4. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1972. – 416 с.
5. Коган Х.М. Об одном сингулярном интегро-дифференциальном уравнении // Успехи математических наук. 1965. Т. 20, выпуск 3(123). – С. 243–244.
6. Коган Х.М. Об одном сингулярном интегро-дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. 1967. Т. 3, №2. – С. 278–293.
7. Schleiff M. Untersuchungen einer linearen singularen integrodifferentialglei-chung der tragflugeltheorie // Wiss. Z. Univ. Halle. Math.-nat. Reihe. 1968. V. 17. – P. 981–1000.
8. Асхабов С.Н. Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения с ядром Гильберта и монотонной нелинейностью // Владикавказский математический журнал. 2017. Т.19, №3. – С. 11–20.
9. Асхабов С.Н. Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения с произвольным параметром // Математич. заметки. 2018. Т. 103, Вып. 1. – С. 20–26.
10. Askhabov S.N. Positivity conditions for operators with difference kernels in reflexive spaces // J. Math. Sci. 2020. Vol. 250, №. 5. – P. 717-727.
11. Асхабов С.Н. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с разностными ядрами // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2021. Т. 198. – С. 22–32.

§2. Краевые задачи для нелинейных сингулярных-интегро-дифференциальных уравненийс ядрами Коши и Гильберта

В работах [1], [4], [6], [8] без ограничения «малости» на параметр λ методом монотонных операторов в пространствах Лебега были исследованы различные классы нелинейных сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений (обзор этих и других связанных с ними работ приведен в [9]).

В данном параграфе сначала изучаются различные классы нелинейных уравнений, содержащих сингулярный интегро-дифференциальный оператор с ядром Коши

$$(Bu)(x) = -\frac{b(x)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\left[b(s)\cdot u(s)\right]'}{s-x}ds,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши-Лебегу.

При $b(x)=1$ оператор B представляет собой хорошо известный (см. статьи [5], [7] и приведенную в них литературу) сингулярный интегро-дифференциальный оператор

$$(Tu)(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u'(s)}{s-x}ds,$$

фигурирующий, например, в классическом уравнении Прандтля из теории крыла самолета.

Интерес к линейным и нелинейным сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям вызван их многочисленными и разнообразными приложениями в гидро и аэродинамике, теории упругости и автоматического управления, в области конформных отображений и устойчивых процессов с независимыми приращениями и других (подробнее см. [5], [8] и приведенную в них библиографию).

В работе [6] в вещественных пространствах Лебега $L_p(-a,a)$ методом монотонных операторов были рассмотрены нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения вида:

$$u(x)-\frac{2\lambda}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{F\left(s,u'(s)\right)}{s-x}ds=f(x)\,,\quad \lambda>0\,;$$

$$\sqrt{a^2-x^2}\cdot u'(x)+\frac{2\lambda}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{F\left(s,u(s)\right)}{s-x}ds=0\,,\quad u(-a)=0\,,\quad \lambda\ge 0\,;$$

$$u'(x)-\lambda\cdot F\left(x,-\frac{2}{\pi}\sqrt{a^2-x^2}\int_{-a}^{a}\frac{u(s)}{\sqrt{a^2-s^2}\,(s-x)}ds\right)=f(x)\,,\quad u(x_0)=c\,,\quad \lambda\ge 0\,.$$

В работе [8] (см., также [9]) методом максимально монотонных операторов в пространствах Лебега со степенным весом были исследованы, в частности, при любом значении параметра $\lambda\in(-\infty,\infty)$ уравнения вида

$$u'(x)+\beta(x)\cdot u(x)+\Phi\left(x,u(x)\right)+\Psi\left(x,u(x)\right)+\frac{\lambda}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{u(s)}{s-x}ds=f(x)\,,$$

$$u(-a)=\pm u(a)\ \text{ или }\ u(-a)=0\,;$$

$$\Phi\left(x,u(x)\right)+\frac{\lambda}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{u(s)}{s-x}ds-\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{u'(s)}{s-x}ds=f(x)\,,\quad u(\pm a)=0\,.$$

В данном параграфе, используя методы теории максимально монотонных операторов, в вещественном пространстве Лебега со степенным весом $L_p(\rho^{-1})$ при достаточно легко обозримых ограничениях на нелинейность доказаны теоремы о существовании и единственности решения для двух различных классов нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с произвольным положительным параметром. Полученные результаты при $p=2$ охватывают, в частности, и случай линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений.

Основные обозначения и определения. Пусть $1<p<\infty$ и $q=p/(p-1)$. Следуя работе [8], обозначим через $M_p=L_p(\rho^{-1})$ множество всех измеримых по Лебегу на отрезке $[-1,1]$ функций с конечной нормой $\|u\|_{p,\rho}=\left(\int_{-1}^{1}\frac{|u(x)|^p}{\rho(x)}dx\right)^{1/p}$ где вес $\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$. Известно (см., например, [2]), что M_p есть рефлексивное банахово пространство и сопряженным с ним является пространство $N_q=L_q(\sigma)$, т.е. $N_q=M_p^*$, где $\sigma(x)=(1-x^2)^{(q-1)/2}$. Норму в пространстве N_q обозначим через $\|\cdot\|_{q,\sigma}$, а норму в пространстве суммируемых функций $L_1(-1,1)$ – через $\|\cdot\|_1$. Очевидно (см. [8]), что имеют место непрерывные плотные вложения $M_p \subset L_2(-1,1) \subset N_q$. Множество всех неотрицательных функций из M_p обозначим через M_p^+.

Введем теперь в рассмотрение нелинейный оператор суперпозиции (так называемый оператор Немыцкого). Пусть вещественнозначная функция $F(x,u)$ определена при $x \in [-1,1]$, $u \in (-\infty,\infty)$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном $u \in (-\infty,\infty)$ и непрерывна по u почти для всех $x \in [-1,1]$. Обозначим через F оператор суперпозиции, порожденный функцией $F(x,u)$: $(Fu)(x) = F(x,u(x))$.

Далее будем придерживаться приведенных в монографии [3] обозначений и определений, касающихся теории монотонных операторов. Пусть X – вещественное банахово пространство, X^* – сопряженное с ним пространство и оператор A действует из X в X^*, т.е. $A \in (X \to X^*)$. Обозначим через $\langle y,x \rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$. В частности, если X есть гильбертово пространство H, то $\langle y,x \rangle$ совпадает со скалярным произведением (y,x), где $x,y \in H$. Оператор A с линейной областью определения $D(A) \subset X$ называется монотонным, если для любых $u,v \in D(A)$ выполняется неравенство: $\langle Au - Av, u - v \rangle \ge 0$. Монотонный оператор $A \in \big(D(A) \to X^*\big)$ называется максимально монотонным, если из выполнения неравенства $\langle f - Av, u - v \rangle \ge 0$ для любого $v \in D(A)$ следует, что $u \in D(A)$ и $Au = f$.

Обозначим, наконец, через $C^1[-1,1]$ множество всех вещественных непрерывно дифференцируемых на отрезке $[-1,1]$ функций.

Теоремы существования и единственности решения. Приступим теперь к исследованию нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $p \ge 2$, $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$, $b(x) \in C^1[-1,1]$ и $f(x) \in N_q$. Если для почти всех $x \in [-1,1]$ и всех $u \in (-\infty,\infty)$ выполняются условия:

1) $|F(x,u)| \le a(x) + d_1 \cdot \rho(x)|u|^{p-1}$, где $a(x) \in N_q^+$, $a(\pm 1) = 0$, $d_1 > 0$;

2) $F(x,u)$ не убывает по u почти при каждом фиксированном $x \in [-1,1]$;

3) $F(x,u) \cdot u \ge d_2 \cdot \rho(x)|u|^p - D(x)$, где $D(x) \in L_1^+(-1,1)$, $d_2 > 0$,

то при любых значениях параметра $\lambda > 0$ краевая задача

$$\lambda \cdot F\left(x, u(x)\right) - \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\left[b(s) \cdot u(s)\right]'}{s - x} ds = f(x), \qquad u(\pm 1) = 0, \tag{1}$$

имеет решение $u(x) \in M_p$ с $u'(x) \in N_q$. Решение единственно, если $b(x) \neq 0$ почти всюду на отрезке $[-1,1]$ или если $F(x,u)$ в условии 2) строго возрастает по u.

Доказательство. Запишем уравнение (1) в операторном виде:

$$\lambda \cdot Fu + Bu = f. \tag{2}$$

Из условий 1)–3) вытекает (см., например, [2]), что оператор Немыцкого F действует непрерывно из M_p в N_q, монотонен и коэрцитивен, причем для любого $u(x) \in M_p$ выполняются неравенства:

$$\|Fu\|_{q,\sigma} \le \|a\|_{q,\sigma} + d_1 \|u\|_{p,\rho}^{p-1} \quad \text{и} \quad \langle Fu, u \rangle \ge d_2 \|u\|_{p,\rho}^{p} - \|D\|_1 .$$

В силу неравенства Шлайфа [7] (см., также, [8], [9]):

$$\left(Tv, v\right) \ge \int_{-1}^{1} \frac{v^2(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \tag{3}$$

справедливого для любого $v(x) \in L_2(-1,1)$ (и тем более для любого $v(x) \in M_p$) такого, что $v(\pm 1) = 0$ и $v'(x) \in N_q$, сингулярный интегро-дифференциальный оператор T с областью определения

$$D(T) = \left\{ v \in M_p : \ v(x) \text{ абсолютно непрерывна}, v' \in N_q \text{ и } v(\pm 1) = 0 \right\}$$

действует из M_p в N_q и является, как показано в [8, с. 258], максимально монотонным оператором. Но тогда и оператор B, с той же областью определения $D(B) = D(T)$, действует из M_p в N_q и является максимально монотонным оператором, поскольку из того, что $u(x) \in L_p(\rho^{-1})$, $u(\pm 1) = 0$ и $u'(x) \in L_q(\rho)$ следует, что $b(x) \cdot u(x) \in L_p(\rho^{-1})$, $b(\pm 1) \cdot u(\pm 1) = 0$ и $\left[b(x) \cdot u(x)\right]' \in L_q(\rho)$, в силу вложения

$L_p(\rho^{-1}) \subset L_q(\rho)$. При этом, в силу неравенства Шлайфа (3), оператор B является положительным:

$$\left(Bu,u\right)=\int_{-1}^{1}\left(-\frac{b(x)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\left[b(s)\cdot u(s)\right]'}{s-x}ds\right)\cdot u(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\left[b(s)\cdot u(s)\right]'}{s-x}ds\right)\cdot b(x)\cdot u(x)\,dx=$$

$$=\left(T(b\cdot u),b\cdot u\right)\geq\int_{-1}^{1}\frac{\left[b(x)\cdot u(x)\right]^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\geq 0\,.$$

Так как оператор суперпозиции F также является максимально монотонным, как непрерывный (и тем более хеминепрерывный) монотонный оператор (см. Замечание 2.4 [3]), то оператор $\lambda\cdot F+B$ является коэрцитивным максимально монотонным отображением с областью определения $D\left(\lambda\cdot F+B\right)=D\left(T\right)$. Поскольку (см., например, [8, с. 257]; ср. [3, Теорема 2.3]) всякое коэрцитивное максимально монотонное отображение из рефлексивного банахова пространства M_p в сопряженное с ним пространство N_q является сюръективным, то уравнение (2), а значит и уравнение (1), имеет решение $u\in M_p$ Это решение единственно, если $b(x)\neq 0$ почти всюду на отрезке $[-1,1]$ или если $F(x,u)$ в условии 2) строго возрастает по u поскольку в каждом из этих случаев оператор $\lambda\cdot F+B$ является строго монотонным.

Теорема доказана.

Следующая теорема отличается от теоремы 1 как по характеру ограничений накладываемых на нелинейность, так и по структуре доказательства.

Теорема 2. Пусть $p\geq 2$, $\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$, функция $f(x)\in M_p$ определена в точках ± 1 и $f'(x)\in N_q$. Если для почти всех $x\in[-1,1]$ и всех $u\in(-\infty,\infty)$ выполняются условия:

4) $\left|F(x,u)\right|\leq g(x)+d_3\cdot\left(\rho(x)\left|u\right|\right)^{1/(p-1)}$, где $g(x)\in M_p^+$, $g(\pm 1)=0$, $d_3>0$;

5) $F(x,u)$ строго возрастает по u почти при каждом фиксированном $x\in[-1,1]$;

6) $F(x,u)\cdot u\geq d_4\cdot\left(\rho(x)\left|u\right|\right)^{1/(p-1)}\left|u\right|-D(x)$, где $D(x)\in L_1^+(-1,1)$, $d_4>0$,

то при любых значениях параметра $\lambda\geq 0$ краевая задача

$$u(x)+\lambda\cdot F\left(x,-\frac{b(x)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\left[b(s)\cdot u(s)\right]'}{s-x}ds\right)=f(x),\qquad u(\pm1)=f(\pm1), \tag{4}$$

имеет единственное решение $u(x)\in M_p$ с $u'(x)\in N_q$.

Доказательство. При $\lambda=0$ утверждение теоремы очевидно, поэтому считаем далее, что $\lambda>0$. Запишем уравнение (4) в операторном виде:

$$u+\lambda\cdot FBu=f. \tag{5}$$

Будем искать решение $u(x)\in M_p$ уравнения (5) такое, что $u'(x)\in N_q$ и $u(\pm1)=f(\pm1)$. Введем новую неизвестную функцию $v(x)$, обозначив $f(x)-u(x)=\lambda\cdot v(x)$. Ясно, что $v(x)\in M_p$, $v(\pm1)=0$ и $v'(x)=\lambda^{-1}\left(f'(x)-u'(x)\right)\in N_q$. Подставив $u=f-\lambda\cdot v$ в уравнение (5), получим:

$$FB\left(f-\lambda\cdot v\right)=v. \tag{6}$$

Из условий 4)–6) вытекает (см., например, [2, §2]), что оператор Немыцкого F действует непрерывно из N_q в M_p, строго монотонен и коэрцитивен, причем для любого $w(x)\in N_q$ выполняются неравенства:

$$\|Fw\|_{p,\rho}\le\|a\|_{p,\rho}+d_1\|w\|_{q,\sigma}^{1/(p-1)}\quad\text{и}\quad\langle Fw,w\rangle\ge d_2\|w\|_{q,\sigma}^{p/(p-1)}-\|D\|_1.$$

Значит, по теореме 2.2 [3] существует обратный оператор F^{-1}, действующий из M_p в N_q и являющийся строго монотонным, ограниченным и хеминепрерывным. Кроме того, в силу леммы 2.1 [2], оператор F^{-1} является коэрцитивным.

Применив оператор F^{-1} к обеим частям уравнения (6), получим $Bf-\lambda\cdot Bv=F^{-1}v$ или

$$F^{-1}v+\lambda\cdot Bv=Bf. \tag{7}$$

В силу доказанного в теореме 1 неравенства $(Bv,v)\ge\int_{-1}^{1}\frac{\left[b(x)\cdot v(x)\right]^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\ge0$, справедливого для любого $v(x)\in L_2(-1,1)$ (и тем более для любого $v(x)\in M_p$) такого, что $v(\pm1)=0$ и $v'(x)\in N_q$, сингулярный интегро-дифференциальный оператор B с областью определения

$$D(B)=\left\{v\in M_p:\ v(x)\text{ абсолютно непрерывна, }v'\in N_q\text{ и }v(\pm1)=0\right\}$$

действует из M_p в N_q и является, как показано при доказательстве теоремы 1, максимально монотонным оператором. Так как оператор F^{-1} также является максимально монотонным, как хеминепрерывный монотонный оператор (см. Замечание 2.4 [3]), то оператор $F^{-1}+\lambda\cdot B$ является коэрцитивным максимально монотонным отображением с областью определения $D\left(F^{-1}+\lambda\cdot B\right)=D(B)$. Поскольку (см., например, [8, с. 257]; ср. [3, Теорема 2.3]) всякое коэрцитивное максимально монотонное отображение из рефлексивного банахова пространства M_p в сопряженное с ним пространство N_q является сюръективным, то уравнение (7) имеет решение $v\in M_p$. Единственность этого решения вытекает из строгой монотонности оператора $F^{-1}+\lambda\cdot B$. Но тогда, в силу связи, $u=f-\lambda\cdot v$, уравнение (5), а значит и данное уравнение (4), имеет единственное решение $u\in M_p$.

Теорема 2 доказана.

В отличие от [6] и [8], доказательство теоремы 2 основано на обращении оператора суперпозиции, порождающего нелинейность рассматриваемого уравнения, и установлении коэрцитивности обратного оператора.

Замечание. Простейшим примером функции $F(x,u)$, удовлетворяющей всем требованиям теоремы 2, может служить функция $F(x,u)=\left(\rho(x)\cdot u\right)^{1/(p-1)}$, где $p\geq 2$ – любое четное число. Этот пример показывает, что при $p=2$ теоремы 1 и 2 охватывают, в частности, и случай линейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения. Важно также заметить, что из условия 4) вытекает равенство $F(\pm 1,u)=0$, которое согласуется с требованием $u(\pm 1)=f(\pm 1)$ теоремы 2 для уравнения (4).

Рассмотрим теперь в пространстве Лебега $L_p(-\pi,\pi)$, $1<p<\infty$, сингулярный интегро-дифференциальный оператор с ядром Гильберта:

$$(Gu)(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u'(s)\cdot\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}ds$$

с областью определения

$$D(G)=\left\{\{u(x):\ u(x)\in AC[-\pi,\pi]\},\quad u(\pm\pi)=0,\ \int_{-\pi}^{\pi}|u'(x)|^q dx<\infty\right\},$$

где $AC[-\pi,\pi]$ есть множество всех абсолютно непрерывных на отрезке $[-\pi,\pi]$ функций и $q=p/(p-1)$. В §1 доказано, что оператор G является строго положительным, симметричным и максимальным монотонным оператором. Используя эти свойства оператора G, аналогично теоремам 1 и 2 доказываются следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть $p\geq 2$ и $f(x)\in L_q(-\pi,\pi)$. Предположим, что для почти всех $x\in[-\pi,\pi]$ и всех $u\in\mathbb{R}$ выполняются условия:*

1) $|F(x,u)|\leq a(x)+d_1\cdot|u|^{p-1}$, *где* $a(x)\in L_q^+(-\pi,\pi)$, $d_1>0$;

2) $F(x,u)$ *не убывает по* u *почти при каждом фиксированном* $x\in[-\pi,\pi]$;

3) $F(x,u)\cdot u\geq d_2\cdot|u|^{p-1}-D(x)$, *где* $D(x)\in L_1^+(-\pi,\pi)$, $d_2>0$.

Тогда при любых значениях параметра $\lambda>0$ краевая задача

$$\lambda\cdot F\big(x,u(x)\big)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u'(s)\cdot\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}ds=f(x),\quad u(-\pi)=u(+\pi)=0,$$

имеет единственное решение $u(x)\in D(G)$.

Теорема 4. *Пусть $p\geq 2$ и $f(x)\in L_p(-\pi,\pi)$. Предположим, что для почти всех $x\in[-\pi,\pi]$ и всех $u\in\mathbb{R}$ выполняются условия:*

4) $|F(x,u)|\leq g(x)+d_3\cdot|u|^{1/(p-1)}$, *где* $g(x)\in L_p^+(-\pi,\pi)$, $d_3>0$;

5) $F(x,u)$ *не убывает по* u *почти при каждом фиксированном* $x\in[-\pi,\pi]$;

6) $F(x,u)\cdot u\geq d_4\cdot|u|^{p/(p-1)}-D(x)$, *где* $D(x)\in L_1^+(-\pi,\pi)$, $d_4>0$.

Тогда при любых значениях параметра $\lambda>0$ краевая задача

$$\lambda\cdot F(x,u'(x))+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u(s)\cdot ctg\frac{s-x}{2}ds=f(x),\quad u(-\pi)=u(+\pi)=0,$$

имеет единственное решение $u(x)\in D(G)$.

Теорема 5. *Пусть $p\geq 2$ и функция $f(x)\in D(G)$. Если выполняются условия 4), 5) и 6) теоремы 2, то при любом $\lambda>0$ краевая задача*

$$u(x)+\lambda\cdot F\left(x,-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u'(s)\cdot ctg\frac{s-x}{2}ds\right)=f(x),\ \ u(-\pi)=u(+\pi)=0,$$

имеет единственное решение $u(x)\in D(G)$.

Доказательство теоремы 3 опирается, в отличие от традиционных методов, основанных на обращении линейных интегральных операторов, на новую идею обращения нелинейного оператора суперпозиции (оператора Немыцкого) F и установлении коэрцитивности обратного оператора.

Из теорем 3-5 вытекают, соответственно, следующие следствия.

Следствие 1. *Если p четное число и $f(x) \in L_q(-\pi,\pi)$, то краевая задача:*

$$u^{p-1}(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u'(s)\cdot ctg\frac{s-x}{2}ds = f(x), \quad u(-\pi) = u(+\pi) = 0,$$

имеет единственное решение $u(x) \in D(G)$.

Следствие 2. Пусть $p \geq 2$ четное число и $f(x) \in L_p(-\pi,\pi)$. Тогда краевая задача:

$$(u'(x))^{1/(p-1)} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(s)\cdot \mathrm{ctg}\frac{s-x}{2}ds = f(x), \quad u(-\pi) = u(+\pi) = 0,$$

имеет единственное решение $u(x) \in L_p(-\pi,\pi)$ с $u'(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$.

Следствие 3. *Если p четное число и $f(x) \in D(G)$, то краевая задача:*

$$u(x) + \left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u'(s)\cdot ctg\frac{s-x}{2}ds\right)^{1/(p-1)} = f(x), \quad u(-\pi) = u(+\pi) = 0,$$

имеет единственное решение $u(x) \in D(G)$.

В случае краевой задачи для нелинейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения типа Гаммерштейна с ядром Гильберта доказана следующая теорема

Теорема 6. *Пусть $p \geq 2$ и функция $f(x) \in D(G)$. Если выполняются условия 4), 5) и 6) теоремы 2, то при любом $\lambda > 0$ краевая задача*

$$u(x) - \lambda\int_{-\pi}^{\pi} F[s,u'(s)]\cdot \mathrm{ctg}\frac{s-x}{2}ds = f(x), \quad u(-\pi) = u(+\pi) = 0,$$

имеет единственное решение $u(x) \in D(G)$.

Основные результаты данной работы были опубликованы в статьях [10]-[12] и доложены на конференциях [13]-[17].

ЛИТЕРАТУРА

1. Асхабов С.Н. Исследование нелинейных сингулярных интегральных уравнений методом монотонных операторов // Функциональный анализ, теория функций и их приложения. – Махачкала: Дагест. гос. ун-т, 1979. Вып. 4. – С. 43–50.
2. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки. – М.: Физматлит, 2009. – 304 с.
3. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1978. – С. 336.
4. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. Применение метода монотонных операторов к одному классу уравнений // Докл. АН Азерб. ССР. 1979. Т. 35, №8. С. 3–6.
5. Коган Х.М. Об одном сингулярном интегро-дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. 1967. Т. 3, №2. – С. 278–293.
6. Магомедов Г.М. Метод монотонности в теории нелинейных сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, №6. – С. 1106–1112.
7. Schleiff M. Untersuchungen einer linearen singularen integrodifferential-gleichung der tragflugeltheorie // Wiss. Z. Univ. Halle. Math.-nat. Reihe. 1968. B. 17. – P. 981–1000.
8. Wolfersdorf L.v. Monotonicity methods for nonlinear singular integral and integro-differential equations // ZAMM. 1983. V. 63, №6. – P. 249–259.
9. Wolfersdorf L.v. Some recent developments in the theory of nonlinear singular integral equations // Z. Anal. Anwend. 1987. V. 6, №1. – P. 83–92.
10. Асхабов С.Н. Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения с ядром Гильберта и монотонной нелинейностью // Владикавказский математический журнал. 2017. Т.19, №3. – С. 11–20.
11. Асхабов С.Н. Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения с произвольным параметром // Математич. заметки. 2018. Т. 103, Вып. 1. – С. 20–26.

12. Асхабов С.Н. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с разностными ядрами // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2021. Т. 198. – С. 22–32.
13. Асхабов С.Н. Краевые задачи для нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений // XXVII Междун. конф. «Математика. Экономика. Образование» (27 мая – 3 июня 2021 г. Пансионат «Моряк» Новороссийского морского пароходства). Ростов-на-Дону, 2021. – С. 29-30.
14. Асхабов С.Н. Краевые задачи для нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Коши // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2022: матер. междун. конф. Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2022. – С. 13–17.
15. Асхабов С.Н. Краевые задачи для нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Гильберта // Актуальные проблемы ма-тематики и информацион-ных технологий. Матер. III Всерос. конф. (г. Махачкала, 7-9 февраля 2022 г.). – Махачкала: Изд-во ДГУ, 2022. – С. 46–48.

§3. Критерии положительности интегральных и интегро-дифференциальных операторов свертки и их применение к краевым задачам

Хорошо известна [7, с. 176] основополагающая роль, которую играют положительно-определенные функции при построении гармонического анализа, в теории локально-компактных групп и других разделах современной математики. С понятием положительно-определенной функции тесно связано понятие положительного оператора, играющее важную роль при исследовании как линейных, так и нелинейных интегральных и дискретных уравнений в банаховых пространствах [1], [5], [6]. Поэтому представляет несомненный научный интерес изучение вопросов, связанных с нахождением необходимых и достаточных условий положительности операторов, порождающих, в частности, известные дискретные, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения.

Напомним определение положительного оператора. Пусть X есть вещественное банахово пространство, а X^* – сопряженное с ним пространство. Обозначим через $\langle y, x\rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$. Линейный оператор A, действующий из X в X^*, называется положительным, если $\forall x \in X$ выполняется неравенство $\langle Ax, x\rangle \geq 0$.

В монографии [1, §10] доказано, что для положительности в вещественном пространстве Лебега $L_p(-\infty,\infty)$, где $1 < p \leq 2$, интегрального оператора свертки $(Hu)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\cdot u(t)\,dt$ необходимо и достаточно, чтобы *косинус-преобразование* Фурье $\hat{h}_c(x)$ его ядра $h(x) \in L_1(-\infty,\infty) \bigcap L_{p/[2(p-1)]}(-\infty,\infty)$ *было* неотрицательной функцией на положительной полуоси $[0,\infty)$. Аналогичный результат установлен в [1, §28] и в случае соответствующих дискретного оператора свертки $(\Re u)_n = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-k}\cdot u_k$, где $k \in \mathbf{Z}$, и пространства ℓ_p. Эти результаты использованы в [1] при исследовании различных классов нелинейных интегральных и дискретных уравнений типа свертки в пространствах $L_p(-\infty,\infty)$ и ℓ_p, соответственно.

В данном параграфе установлено, что интегро-дифференциальный оператор свертки $(Tu)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\cdot u'(t)\,dt$ является положительным в классе вещественных функций

$$M_p(-\infty,\infty) = \{u(x):\, u(x) \in L_p(-\infty,\infty),\, u'(x) \in L_q(-\infty,\infty)\},\ 1 < p < \infty,\ q = p/(p-1),$$

тогда и только тогда, когда синус-преобразование Фурье $\hat{h}_s(x)$ его ядра $h(x) \in L_1(-\infty,\infty)$ является неотрицательной функцией на полуоси $[0,\infty)$. Приводятся примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Признак положительности интегро-дифференциального оператора свертки. Рассмотрим в классе $M_p(-\infty,\infty)$ интегро-дифференциальный оператор свертки

$$(Tu)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x-t)\cdot u'(t)\,dt=(h*u')(x), \tag{1}$$

где ядро $h(x)\in L_1(-\infty,\infty)$. Для $u(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ и $v(x)\in L_q(-\infty,\infty)$, $q=p/(p-1)$, введем обозначения:

$$\|u\|_p=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \quad \text{и} \quad \langle u,v\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\cdot v(x)\,dx.$$

Если $p=q=2$, то $\langle u,v\rangle=(u,v)$ есть обычное скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_2(-\infty,\infty)$.

Легко видеть, что интегро-дифференциальный оператор T действует из $M_p(-\infty,\infty)$ в $L_q(-\infty,\infty)$, поскольку $u'(x)\in L_q(-\infty,\infty)$ и, в силу неравенства Юнга [1, с. 30], интегральный оператор свертки H с ядром $h(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ действует непрерывно из $L_q(-\infty,\infty)$ в $L_q(-\infty,\infty)$ при любом $q\in(1,\infty)$.

Заметим, что $\lim\limits_{|x|\to\infty}u(x)=0$, если $u(x)\in M_p(-\infty,\infty)$. В самом деле, так как

$$|u(x+\Delta x)-u(x)|=\left|\int_x^{x+\Delta x}u'(t)\,dt\right|\le\left(|\Delta x|\right)^{1/p}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u'(t)|^q\,dt\right)^{1/q}\to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x\to 0,$$

то функция $u(x)$ непрерывна, т.е. $u(x)\in C(-\infty,\infty)$. Докажем, что $\lim\limits_{x\to\infty}u(x)=0$. Так как $u(x)\in C(-\infty,\infty)$ и

$$u^2(x)-u^2(0)=2\int_0^x u(t)\cdot u'(t)\,dt\le 2\int_{-\infty}^{\infty}|u(t)\cdot u'(t)|\,dt\le 2\,\|u\|_p\cdot\|u'\|_q ,$$

то существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty}|u(x)|=A$. Осталось показать, что $A=0$. Допустим противное, что $A>0$. Тогда найдется достаточно большое число $c>0$ такое, что при всех $x>c$ будет выполняться неравенство $|u(x)|>A/2$ и, значит, $\|u\|_p^p\ge\int_{-\infty}^{\infty}(A/2)^p\,dx=\infty$, что невозможно так как $u(x)\in L_p(-\infty,\infty)$. Значит, $\lim\limits_{x\to\infty}u(x)=0$.

Аналогично доказывается, что и $\lim\limits_{x\to-\infty}u(x)=0$, если $u(x)\in M_p(-\infty,\infty)$.

Обозначим через $\hat{u}(x)$ преобразование Фурье функции $u(x) \in L_2(-\infty,\infty)$ (см., например [4, с. 55]):

$$\hat{u}(x) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} u(t) \cdot e^{-ixt} dt, \tag{2}$$

где символ $\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}$ означает предел в среднем с показателем $p = 2$ (т.е. в среднем квадратичном).

Известно [4, с. 65], что $\hat{u}(x) \in L_2(-\infty,\infty)$, если $u(x) \in L_2(-\infty,\infty)$ и для любых $u(x), v(x) \in L_2(-\infty,\infty)$ справедливо обобщенное равенство Парсеваля $(u,v) = (\hat{u},\hat{v})$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot \bar{v}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(x) \cdot \overline{\hat{v}(x)}\, dx, \tag{3}$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение. Кроме того, если $h(x) \in L_1(-\infty,\infty)$, а $u(x) \in L_2(-\infty,\infty)$, то для преобразования Фурье свертки справедливо равенство [4, с. 77]:

$$\left(h \overset{\wedge}{*} u\right)(x) = \sqrt{2\pi}\, \hat{h}(x) \cdot \hat{u}(x), \tag{4}$$

где $\hat{h}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-ixt} dt$, поскольку $h(x) \in L_1(-\infty,\infty)$.

Пусть $u(x) \in C_0^{\infty}(-\infty,\infty)$, т.е. является финитной бесконечно-дифференцируемой на всей действительной оси $(-\infty,\infty)$ функцией. Тогда (ср. [4, с. 57]), интегрируя по частям, получим

$$\overset{\wedge}{u'}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u'(t) \cdot e^{-ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} du(t) = i \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{-ixt} dt,$$

т.е.

$$\overset{\wedge}{u'}(x) = i \cdot x \cdot \hat{u}(x), \qquad \forall u(x) \in C_0^{\infty}(-\infty,\infty). \tag{5}$$

Используя равенства (1)–(5), с учетом, что $u(x) \in C_0^{\infty}(-\infty,\infty)$ есть вещественная функция, имеем

$$(Tu,u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(h * u'\right)(x) \cdot \overline{u(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(h \overset{\wedge}{*} u'\right)(x) \cdot \overline{\hat{u}(x)}\, dx = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(x) \cdot \overset{\wedge}{u'}(x) \cdot \overline{\hat{u}(x)}\, dx =$$

$$= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(x) \cdot i \cdot x \cdot \hat{u}(x) \cdot \overline{\hat{u}(x)}\, dx = i\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(x) \cdot x \cdot \left|\hat{u}(x)\right|^2 dx =$$

$$= i\sqrt{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}_c(x)\cdot x\cdot|\hat{u}(x)|^2\ dx - i\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}_s(x)\cdot x\cdot|\hat{u}(x)|^2\,dx\right], \tag{6}$$

где косинус-преобразование Фурье ядра $h(x)$:

$$\hat{h}_c(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\cdot\cos\,(x\cdot t)\,dt$$

есть четная функция, а его синус-преобразование Фурье:

$$\hat{h}_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\cdot\sin\,(x\cdot t)\,dt$$

есть функция нечетная на оси $(-\infty,\infty)$.

Замечая, что

$$|\hat{u}(-x)|^2 = \hat{u}(-x)\cdot\overline{\hat{u}(-x)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\cdot e^{ixt}dt\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\cdot e^{-ixt}dt\right) = \overline{\hat{u}(x)}\cdot\hat{u}(x) = |\hat{u}(x)|^2$$

и, значит, $x\cdot|\hat{u}(x)|^2$ есть нечетная на оси $(-\infty,\infty)$ функция, из равенства (6) получаем

$$(Tu,u) = \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}_s(x)\cdot x\cdot|\hat{u}(x)|^2\,dx \tag{7}$$

или, что то же самое,

$$(Tu,u) = 2\sqrt{2\pi}\int_{0}^{\infty}\hat{h}_s(x)\cdot x\cdot|\hat{u}(x)|^2\,dx\,. \tag{8}$$

Из равенства (8) следует, что $(Tu,u)\geq 0$ для любого $u(x)\in C_0^{\infty}(-\infty,\infty)$, если $\hat{h}_s(x)\geq 0$ для почти всех $x\in[0,\infty)$. Так как, по теореме Римана-Лебега [4, с. 42], $\hat{h}_s(x)$ есть непрерывная на всей оси $(-\infty,\infty)$ функция, то условие, что $\hat{h}_s(x)\geq 0$ для почти всех $x\in[0,\infty)$ равносильно условию, что $\hat{h}_s(x)\geq 0$ для всех $x\in[0,\infty)$.

Таким образом, если $h(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ и $\hat{h}_s(x)\geq 0$ для всех $x\in[0,\infty)$, то

$$(Tu,u) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}h(x-t)\cdot u'(t)\,dt\right)\cdot u(t)\,dt\geq 0\,,\qquad \forall u(x)\in C_0^{\infty}(-\infty,\infty)\,.$$

Поскольку множество $C_0^{\infty}(-\infty,\infty)$ всюду плотно в классе $M_p(-\infty,\infty)$ и $\langle Tu,u\rangle$ есть линейный непрерывный функционал, то неравенство

$$\langle Tu,u\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\cdot u'(t)\,dt\right)\cdot u(t)\,dt \ge 0$$

будет выполняться и $\forall u(x)\in M_p(-\infty,\infty)$.

Итак мы доказали, что если выполнено условие

$$h(x)\in L_1(-\infty,\infty) \quad \text{и} \quad \hat{h}_s(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cdot \sin\,(x\cdot t)\,dt \ge 0, \quad \forall x\in[0,\infty), \tag{9}$$

то интегро-дифференциальный оператор свертки T является положительным в $M_p(-\infty,\infty)$, т.е. выполняется неравенство

$$\langle Tu,u\rangle \ge 0, \quad \forall u(x)\in M_p(-\infty,\infty). \tag{10}$$

Докажем теперь, что условие (9) так же и необходимо для положительности оператора T. Пусть неравенство (10) выполнено. Нужно доказать, что тогда $\hat{h}_s(x)\ge 0$ для всех $x\in[0,\infty)$, т.е. выполнено условие (9). Допустим противное, что условие (9) не выполняется, т.е. существует точка $x_0\in[0,\infty)$ такая, что $\hat{h}_s(x_0)<0$. Ясно, что $x_0>0$, так как очевидно, что $\hat{h}_s(0)=0$. Поскольку, по теореме Римана-Лебега, $\hat{h}_s(x)$ есть непрерывная на всей оси $(-\infty,\infty)$ функция, то найдется ε-окрестность $U_\varepsilon(x_0)=\{x: x>0, |x\text{-}x_0|<\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$, точки x_0 такая, что будет выполняться неравенство

$$\hat{h}_s(x)<0, \qquad \forall x\in U_\varepsilon(x_0).$$

Выберем функцию $u(x)\in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ такую, что $\hat{u}(x)=0$, если $x\notin U_\varepsilon(x_0)$ и $\hat{u}(x)\ne 0$, если $x\in U_\varepsilon(x_0)$, причем $\hat{u}(x)\in L_1(-\infty,\infty)$. Выбор функции $u(x)$ можно осуществить с помощью хорошо известной формулы (см., например, формулу (4.3) из [1, с. 28]), согласно которой:

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(t)\cdot e^{ixt}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{U_\varepsilon(x_0)}\hat{u}(t)\cdot e^{ixt}dt \quad \text{для почти всех } x\in(-\infty,\infty).$$

Тогда, учитывая, что $\forall x\in U_\varepsilon(x_0)$ выполняются строгие неравенства $\hat{h}_s(x)<0$, $x>0$ и $|\hat{u}(x)|>0$, по формуле (7) получим

$$\langle Tu,u\rangle=\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}_s(x)\cdot x\cdot|\hat{u}(x)|^2\,dx=\sqrt{2\pi}\int_{U_\varepsilon(x_0)}\hat{h}_s(x)\cdot x\cdot|\hat{u}(x)|^2\,dx<0,$$

что противоречит неравенству (10).

Таким образом, доказан следующий признак положительности оператора T.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и ядро* $h(x) \in L_1(-\infty, \infty)$. *Для того, чтобы интегро-дифференциальный оператор свертки*

$$(Tu)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-t) \cdot u'(t)\, dt$$

был положителен в пространстве $M_p(-\infty, \infty)$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot \sin(x \cdot t)\, dt \ge 0, \quad \forall x \in [0, \infty).$$

В связи с доказательством необходимости условия (9) для положительности интегро-дифференциального оператора свертки T отметим [4, с. 46], что не всякая непрерывная на всей оси $(-\infty, \infty)$ функция $f(x)$, удовлетворяющая условию $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 0$, является преобразованием Фурье функции из пространства $L_1(-\infty, \infty)$. Более того, пространство $L_1(-\infty, \infty)$ не является инвариантным относительно преобразования Фурье.

Используя доказанную теорему, можно, следуя работам [1], [2], исследовать различные классы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки, содержащих оператор T.

В заключение приведем простые примеры ядер $h(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, удовлетворяющих условию (9). Для этого сначала заметим, что

$$\hat{h}_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot \sin(x \cdot t)\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} h(t) \cdot \sin(x \cdot t)\, dt, \text{ если } h(x) \text{ нечетная функция.}$$

Пример 1. Пусть $h(x) = e^{-|x|}$.Тогда $\|h\|_1 = 2$ и $\hat{h}_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} \cdot \sin(x \cdot t)\, dt = 0$ для любого $x \in [0, \infty)$, так как подынтегральная функция является нечетной. Значит, $\langle Tu, u \rangle = 0$, $\forall u(x) \in M_p(-\infty, \infty)$, поскольку множество $C_0^{\infty}(-\infty, \infty)$ всюду плотно в классе $M_p(-\infty,\infty)$ и, в силу равенства (7), $(Tu,u)=0$ для любого $u(x)\in C_0^\infty(-\infty,\infty)$.

Пример 2. Пусть $h(x)=\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$. В этом случае

$$\|h\|_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx=2\int_0^{\infty}\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx=1$$

и, в силу равенства (35) из [3, с. 67]:

$$\int_0^\infty\frac{t}{(t^2+\alpha^2)^n}\sin\,(x\cdot t)dt=\frac{\pi\cdot x\cdot e^{-\alpha\cdot x}}{2^{2n-2}(n-1)!\alpha^{2n-3}}\sum_{m=0}^{n-2}\frac{(2n-m-4)!}{m!(n-m-2)!}(2\alpha\cdot x)^m\,,\quad \mathrm{Re}\,\alpha>0\,,\quad n=2,3,4,\ldots,$$

при $n=2$ и $\alpha=1$, имеем

$$\hat{h}_s(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{\left(t^2+1\right)^2}\cdot\sin\,(x\cdot t)\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{t}{\left(t^2+1\right)^2}\cdot\sin\,(x\cdot t)\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\pi\cdot x\cdot e^{-x}}{4}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{x}{2e^x}\ge 0$$

для любого $x\in[0,\infty)$.

Заметим, что если $x<0$, то $\hat{h}_s(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{\left(t^2+1\right)^2}\cdot\sin\,(-x\cdot t)\,dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{x}{2e^{-x}}$ так, что в примере 2, в соответствии с теоремой Римана-Лебега, $\hat{h}_s(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$.

Критерий положительности интегрального оператора свертки в периодическом случае. Для $u(x)\in L_p(-\pi,\pi)$, $1<p<\infty$, и $v(x)\in L_q(-\pi,\pi)$, $q=p/(p-1)$, введем обозначения:

$$\|u\|_p=\left(\int_{-\pi}^{\pi}|u(x)|^p\,dx\right)^{1/p},\qquad \langle u,v\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}u(x)\cdot v(x)\,dx\qquad\text{и}\qquad (Hu)(x)=\int_{-\pi}^{\pi}h(x-t)\cdot u(t)\,dt\,,$$

где ядро $h(x)\in L_1(-\pi,\pi)$ есть функция, 2π-периодически продолженная на отрезок $[-2\pi,2\pi]$.

Для выяснения вопроса о том, при каких условиях на ядро $h(x)$ оператор H является положительным в пространстве $L_p(-\pi,\pi)$ нам понадобятся некоторые сведения из теории дискретного преобразования Фурье.

Напомним, что дискретным преобразованием Фурье последовательности комплексных чисел $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ называется соответствующий ей ряд Фурье:

$$a(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\cdot e^{ikx}\,,\quad \text{где}\quad a_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a(x)\cdot e^{-ikx}dx\,. \qquad (1)$$

Функцию $a(x)$ называют изображением последовательности (оригинала) $a=\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$.

Нам понадобятся следующие два известных равенства (см. [5, с. 233] и [1, с. 158], соответственно):

1) формула свертки изображений:

$$\int_{-\pi}^{\pi} a(x-t)\cdot b(t)\,dt=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_k e^{ikx}\,; \qquad (2)$$

2) обобщенное равенство Парсеваля:

$$\int_{-\pi}^{\pi} a(x)\cdot\overline{b(x)}\,d\,x=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\overline{b_k}\,, \qquad (3)$$

где $b(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k\cdot e^{ikx}$, $\quad b_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b(x)\cdot e^{-ikx}dx$, а черта сверху означает комплексное сопряжение.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $1<p\le 2$ *и ядро* $h(x)\in L_{q/2}(-\pi,\pi)$, $q=p/(p-1)$. *Для того, чтобы интегральный оператор свертки*

$$\big(Hu\big)(x)=\int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\cdot u(t)\,dt$$

был положительным в вещественном пространстве $L_p(-\pi,\pi)$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*:

$$h_c(k)=\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\cdot\cos(k\cdot t)\,dt\ge 0 \qquad \text{при всех}\quad k=0,1,2,3,\dots\,. \qquad (4)$$

Доказательство. **Достаточность.** Пусть $u(x)\in L_p(-\pi,\pi)$ – произвольная функция. Так как $h(x)\in L_{q/2}(-\pi,\pi)$, то из неравенства Юнга для сверток (см. [6, теорема 1.15, с. 67]) непосредственно вытекает, что интегральный оператор свертки H действует непрерывно из $L_p(-\pi,\pi)$ в $L_q(-\pi,\pi)$ при любом $1<p\le 2$.

Следовательно, функционал $\langle Hu,u\rangle$ имеет смысл и принимает конечное значение при любом $u(x)\in L_p(-\pi,\pi)$, в силу интегрального неравенства Гельдера.

Докажем положительность оператора H. В силу формулы свертки изображений (2), имеем

$$\big(Hu\big)(x)=\int_{-\pi}^{\pi}h(x-t)\cdot u(t)\,dt=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_k\cdot u_k\cdot e^{ikx}\,, \tag{5}$$

где $h_k=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}h(x)\cdot e^{-ikx}dx,\qquad u_k=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}u(x)\cdot e^{-ikx}dx.$

Значит, в соответствии с (2.1),

$$\big(Hu\big)(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_k\cdot e^{ikx}\,,\qquad \text{где}\quad H_k=2\pi\cdot h_k\cdot u_k\,.$$

Поэтому, используя обобщенное равенство Парсеваля (2.3), с учетом, что рассматриваются вещественные функции $u(x)$, получаем

$$\langle Hu,u\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\big(Hu\big)(x)\cdot\overline{u(x)}\,dx=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\cdot h_k\cdot u_k\cdot\overline{u_k}=$$

$$=4\pi^2\cdot\left[h_0\cdot|u_0|^2+\sum_{k=-\infty}^{-1}h_k\cdot|u_k|^2+\sum_{k=1}^{\infty}h_k\cdot|u_k|^2\right]. \tag{6}$$

Замечая, что

$$|u_{-k}|^2=u_{-k}\cdot\overline{u_{-k}}=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cdot e^{ikt}dt\right)\cdot\overline{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cdot e^{ikt}dt\right)}=$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cdot e^{ikt}dt\right)\cdot\overline{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cdot\cos(kt)dt+i\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cdot\sin(kt)dt\right)}=$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cdot e^{ikt}dt\right)\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cdot\cos(kt)dt-i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cdot\sin(kt)dt\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cdot e^{ikt}dt\right)\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cdot e^{-ikt}dt\right)=\overline{u_k}\cdot u_k=|u_k|^2$$

и

$$h_k+h_{-k}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(t)\cdot\big(e^{-ikt}+e^{ikt}\big)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(t)\cdot\cos(k\cdot t)\,dt=\frac{1}{\pi}\cdot h_c(k)\,,$$

из равенства (6) имеем

$$\left\langle Hu,u\right\rangle = 4\pi^2\cdot\left[\frac{1}{2\pi}\cdot h_c(0)\cdot\left|u_0\right|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\cdot h_c(k)\cdot\left|u_k\right|^2\right]=$$

$$=2\pi\cdot h_c(0)\cdot\left|u_0\right|^2+4\pi\sum_{k=1}^{\infty}h_c(k)\cdot\left|u_k\right|^2 .$$

Итак,

$$\left\langle Hu,u\right\rangle = 2\pi\cdot h_c(0)\cdot\left|u_0\right|^2+4\pi\sum_{k=1}^{\infty}h_c(k)\cdot\left|u_k\right|^2 ,\quad \forall u(x)\in L_p(-\pi,\pi) . \tag{7}$$

Из формулы (7) видно, что оператор H является положительным, если $h_c(k)\ge 0$, т.е. если выполнено условие (4). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть оператор H является положительным, т.е. $\left\langle Hu,u\right\rangle \ge 0$, $\forall u(x)\in L_p(-\pi,\pi)$. Нужно доказать, что тогда выполняется условие (4). Допустим противное, что существует число $k_0\in\mathbf{Z}_+$ такое, что $h_s(k_0)<0$. Выберем функцию $u(x)=\sin k_0x$. Ясно, что $u(x)\in L_p(-\pi,\pi)$. Вычислим коэффициенты Фурье этой функции. Имеем

$$u_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin k_0x\cdot e^{-ikx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin k_0x\cdot\cos kx\,dx-i\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin k_0x\cdot\sin kx\,dx=I_1-i\cdot I_2 . \tag{8}$$

Легко видеть, что $u_0=0$ при любом $k_0\in\mathbf{Z}_+$ и $u_k=0$, $\forall k\in\mathbf{Z}$, если $k_0=0$. Поэтому считаем далее, что $k_0\ne 0$, т.е. $k_0\in\mathbf{N}$. Используя элементарные формулы тригонометрии преобразования произведения в сумму, имеем

$$I_1=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k_0+k)x\,dx+\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k_0-k)x\,dx=\begin{cases}0,\ \text{если}\ k=\pm k_0;\\ 0,\ \text{если}\ k\ne\pm k_0\end{cases}=0 ,$$

$$I_2=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k_0-k)x\,dx-\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k_0+k)x\,dx=\begin{cases}-1/2,\ \text{если}\ k=-k_0;\\ 1/2,\ \text{если}\ k=k_0;\\ 0,\ \text{если}\ k\ne\pm k_0\end{cases} .$$

Подставляя в (8) получим последовательность $\{u_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, такую что

$$u_{-k_0}=\frac{i}{2},\quad u_{k_0}=-\frac{i}{2}\quad \text{и}\quad u_k=0\ \text{при}\ k\ne\pm k_0 . \tag{9}$$

Найдя изображение этой последовательности:

$$u(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u_k\cdot e^{ikx}=u_{-k_0}\cdot e^{-ik_0x}+u_0+u_{k_0}\cdot e^{ik_0x}=\frac{i}{2}\cdot e^{-ik_0x}-\frac{i}{2}\cdot e^{ik_0x}=\sin k_0x$$

убеждаемся в правильности вычислений коэффициентов (9).

По формуле (7), с учетом (9) и равенства $u_0 = 0$, получаем

$$\langle Hu, u \rangle = 4\pi \cdot h_c(k_0) \cdot \frac{1}{4} = \pi \cdot h_c(k_0) < 0\,,$$

что противоречит положительности оператора H.

Необходимость, а вместе с ней и теорема 2, полностью доказана.

Примером ядра $h(x)$, удовлетворяющего условию (4), может служить любая неотрицательная выпуклая вниз в промежутке $(-\pi, \pi)$ функция (см. [1, с. 104]).

Критерий положительности интегро-дифференциального оператора свертки в периодическом случае. Рассмотрим в классе

$$M_p(-\pi, \pi) = \left\{ u(x) : u(x) \in L_p(-\pi, \pi),\ u'(x) \in L_q(-\pi, \pi) \right\},\ 1 < p < \infty\,,$$

состоящем из 2π-периодических вещественных функций, интегро-дифференциальный оператор свертки:

$$\big(Tu\big)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t) \cdot u'(t)\, dt\,,$$

где ядро $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ есть функция, 2π-периодически продолженная на отрезок $[-2\pi, 2\pi]$.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и ядро* $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$. *Для того, чтобы интегро-дифференциальный оператор свертки*

$$\big(Tu\big)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t) \cdot u'(t)\, dt$$

был положительным в классе 2π*-периодических вещественных функций*

$$M_p(-\pi, \pi) = \left\{ u(x) : u(x) \in L_p(-\pi, \pi),\ u'(x) \in L_q(-\pi, \pi) \right\}, \quad \text{где} \quad q = p/(p-1)\,,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$h_s(k) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cdot \sin(k \cdot t)\, dt \geq 0 \qquad \text{при всех} \quad k \in \mathbf{N}. \tag{10}$$

Доказательство. **Достаточность.** Пусть $u(x) \in M_p(-\pi, \pi)$ – произвольная функция. Так как $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$, то из неравенства Юнга для сверток (см. [4, теорема 1.15, с. 67]) непосредственно вытекает, что интегральный оператор свертки H действует непрерывно из $L_q(-\pi,\pi)$ в $L_q(-\pi,\pi)$ при любом $1<q<\infty$. Значит, интегро-дифференциальный оператор свертки T действует из $M_p(-\pi,\pi)$ в $L_q(-\pi,\pi)$, поскольку $u'(x)\in L_q(-\pi,\pi)$. Поэтому функционал $\langle Tu,u\rangle$ имеет смысл и принимает конечное значение при любом $u(x)\in M_p(-\pi,\pi)$, в силу интегрального неравенства Гельдера.

Докажем положительность оператора T. Используя формулу свертки изображений (2), имеем

$$(Tu)(x)=\int_{-\pi}^{\pi}h(x-t)\cdot u'(t)\,dt=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_k\cdot u'_k\cdot e^{ikx}, \tag{11}$$

где $h_k=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}h(x)\cdot e^{-ikx}dx,\qquad u'_k=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}u'(x)\cdot e^{-ikx}dx.$

Заметим, что

$$u'_k=i\cdot k\cdot u_k. \tag{12}$$

В самом деле, так как $u(-\pi)=u(\pi)$ и $e^{-ik\pi}=\cos(-k\pi)+i\cdot\sin(-k\pi)=\cos(k\pi)=e^{ik\pi}$, то применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$u'_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u'(x)\cdot e^{-ikx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikx}du(x)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[e^{-ikx}\cdot u(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}u(x)\cdot e^{-ikx}(-i\cdot k)dx\right]=i\cdot k\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(x)\cdot e^{-ikx}dx=i\cdot k\cdot u_k.$$

Учитывая равенство (12), из (11) имеем

$$(Tu)(x)=2\pi i\sum_{k=-\infty}^{\infty}k\cdot h_k\cdot u_k\cdot e^{ikx},$$

т.е.

$$(Tu)(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}T_k\cdot e^{ikx},\qquad\text{где}\quad T_k=2\pi i\cdot k\cdot h_k\cdot u_k. \tag{13}$$

Используя сначала обобщенное равенство Парсеваля (3), а затем равенство (13), с учетом, что рассматриваются вещественные функции $u(x)$, получаем

$$\langle Tu,u\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}(Tu)(x)\cdot\overline{u(x)}\,dx=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}T_k\cdot\overline{u_k}=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi i\cdot k\cdot h_k\cdot u_k\cdot\overline{u_k}=$$

$$= 4\pi^2 i \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \cdot h_k \cdot |u_k|^2 = 4\pi^2 i \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{-1} k \cdot h_k \cdot |u_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot h_k \cdot |u_k|^2 \right]. \qquad (14)$$

Так как (см. доказательство теоремы 1) $|u_{-k}|^2 = |u_k|^2$ и

$$h_k - h_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cdot \left(e^{-ikt} - e^{ikt}\right) dt = -\frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cdot \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} dt =$$

$$= -\frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cdot \sin(k \cdot t)\, dt = -\frac{i}{\pi} \cdot h_s(k),$$

то из равенства (14) имеем

$$\langle Tu, u \rangle = 4\pi^2 i \cdot \left[-\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot h_{-k} \cdot |u_{-k}|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot h_k \cdot |u_k|^2 \right] = 4\pi^2 i \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(h_k - h_{-k}\right) \cdot |u_k|^2 =$$

$$= 4\pi^2 i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(-\frac{i}{\pi} \cdot h_s(k) \right) \cdot |u_k|^2 = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot h_s(k) \cdot |u_k|^2 .$$

Итак,

$$\langle Tu, u \rangle = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot h_s(k) \cdot |u_k|^2, \quad \forall u(x) \in M_p(-\pi, \pi). \qquad (15)$$

Из формулы (15) видно, что оператор T является положительным, если $h_s(k) \geq 0$, $\forall k \in \mathbf{N}$, т.е. если выполнено условие (10). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть оператор T является положительным, т.е. $\langle Tu, u \rangle \geq 0$, $\forall u(x) \in M_p(-\pi, \pi)$. Нужно доказать, что тогда выполняется условие (10). Допустим противное, что условие (10) не выполняется, т.е. существует число $k_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $h_s(k_0) < 0$. Выберем функцию $u(x) = \cos k_0 x$. Ясно, что $u(x) \in M_p(-\pi, \pi)$. Вычислим коэффициенты Фурье этой функции. Имеем

$$u_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos k_0 x \cdot e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos k_0 x \cdot \cos kx\, dx - i \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos k_0 x \cdot \sin kx\, dx = I_1 - i \cdot I_2 . \qquad (16)$$

Легко видеть, что

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k + k_0)x\, dx + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k - k_0)x\, dx = \begin{cases} 1/2, \text{ если } k = \pm k_0 \\ 0, \text{ если } k \neq \pm k_0 \end{cases},$$

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k + k_0)x\, dx + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k - k_0)x\, dx = \begin{cases} 0, \text{ если } k = \pm k_0 \\ 0, \text{ если } k \neq \pm k_0 \end{cases} = 0 .$$

Подставляя в (16) получим последовательность $\{u_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, такую что

$$u_{-k_0} = \frac{1}{2}, \quad u_{k_0} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad u_k = 0 \text{ при } k \neq \pm k_0. \tag{17}$$

Найдя изображение этой последовательности:

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k \cdot e^{ikx} = \frac{1}{2} \cdot e^{-ik_0 x} + \frac{1}{2} \cdot e^{ik_0 x} = \cos k_0 x$$

убеждаемся в правильности вычислений коэффициентов (17).

По формуле (15) получаем

$$\langle Tu, u \rangle = 4\pi \cdot k_0 \cdot h_s(k_0) \cdot \frac{1}{4} = \pi \cdot k_0 \cdot h_s(k_0) < 0,$$

что противоречит положительности оператора T.

Необходимость, а вместе с ней и теорема 3, полностью доказана.

Примером ядра $h(x)$, удовлетворяющего условию (10), может служить убывающая функция. А именно, если в качестве основного интервала взять $(0, 2\pi)$, то легко показать, что $h_s(k) \geq 0$ для любой невозрастающей в промежутке $(0, 2\pi)$ функции [10, с. 46].

Замечание. Легко видеть, что при $u(x) = C$ (C – постоянная) $\langle Tu, u \rangle = 0$ и в случае $h_s(k) < 0$, но это не означает, что оператор T может быть положительным и при $h_s(k) < 0$, так как положительность оператора T означает, что неравенство $\langle Tu, u \rangle \geq 0$ должно выполняться для всех $u(x) \in M_p(-\pi, \pi)$. Заметим также, что при $u(x) = C$ соответствующие коэффициенты Фурье $u_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C \cdot e^{-ikx} dx = 0, \quad \forall k \in \mathbf{N}$, так, что в этом случае обе части равенства (15) обращаются в нуль.

Интегро-дифференциальные уравнения типа свертки. Полученные выше критерии положительности интегральных и интегро-дифференциальных операторов свертки можно использовать при исследовании соответствующих уравнений типа свертки аналогично тому, как использовались условия положительности сингулярных операторов при исследовании порожденных ими нелинейных сингулярных интегральных уравнений в §2. Приведем некоторые результаты, касающиеся периодического случая.

Рассмотрим теперь в пространстве Лебега $L_p(-\pi,\pi)$, $1<p<\infty$, интегро-дифференциальный оператор свертки:

$$(Tu)(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)u'(t)dt$$

с ядром $h \in L_1(-\pi,\pi)$ и областью определения

$$M_p(-\pi,\pi) = \{u(x)\colon\ u \in L_p(-\pi,\pi),\ \ u' \in L_{p'}(-\pi,\pi)\}.$$

Используя теорему 3, аналогично теоремам 1 и 2 из §2, доказываются следующие теоремы.

Теорема 4. *Пусть* $1<p<\infty$ *и* $f(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$. *Предположим, что для почти всех* $x \in [-\pi,\pi]$ *и всех* $u \in \mathbb{R}$ *выполняются условия:*

1) $|F(x,u)| \le a(x) + d_1 \cdot |u|^{p-1}$, *где* $a(x) \in L_q^+(-\pi,\pi)$, $d_1 > 0$;

2) $F(x,u)$ *не убывает по* u *почти при каждом фиксированном* $x \in [-\pi,\pi]$;

3) $F(x,u)\cdot u \ge d_2 \cdot |u|^{p-1} - D(x)$, *где* $D(x) \in L_1^+(-\pi,\pi)$, $d_2 > 0$.

Тогда при любых значениях параметра $\lambda > 0$ *краевая задача*

$$\lambda \cdot F\big(x,u(x)\big) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)u'(t)dt = f(x), \quad u(-\pi) = u(+\pi) = 0,$$

имеет единственное решение $u(x) \in M_p(-\pi,\pi)$. Это решение единственно, если в условии 2) функция $F(x,u)$ строго возрастает по u.

Следствие 1. *Если* p *четное число и* $f(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$, *то краевая задача:*

$$u^{p-1}(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)u'(t)dt = f(x), \quad u(-\pi) = u(+\pi) = 0,$$

имеет единственное решение $u(x) \in M_p(-\pi,\pi)$.

Следующая теорема относится к случаю когда интегро-дифференциальный оператор свертки входит в уравнение нелинейно.

Теорема 5. *Пусть* $1<p<\infty$ *и функция* $f(x) \in L_p(-\pi,\pi)$. *Если для почти всех* $x \in [-\pi,\pi]$ *и всех* $u \in \mathbb{R}$ *выполняются условия:*

4) $|F(x,u)| \le g(x) + d_3 \cdot |u|^{1/(p-1)}$, *где* $g(x) \in L_p^+(-\pi,\pi)$, $d_3 > 0$;

5) $F(x,u)$ *возрастает по* u *почти при каждом фиксированном* $x \in [-\pi,\pi]$;

6) $F(x,u)\cdot u \geq d_4\cdot |u|^{p/(p-1)} - D(x)$, *где* $D(x)\in L_1^+(-\pi,\pi)$, $d_4>0$,
то при любом $\lambda>0$ *краевая задача*

$$u(x)+\lambda\cdot F\left(x,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)u'(t)dt\right)=f(x),\ \ u(-\pi)=u(+\pi)=0,$$

имеет единственное решение $u(x)\in M_p(-\pi,\pi)$.

Следствие 2. *Если* p *четное число и* $f(x)\in D(G)$, *то краевая задача:*

$$u(x)+\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)u'(t)dt\right)^{1/(p-1)}=f(x),\quad u(-\pi)=u(+\pi)=0,$$

имеет единственное решение $u(x)\in M_p(-\pi,\pi)$.

Основные результаты данного параграфа опубликованы в статьях [11]-[14] и доложены на конференциях [15], [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки. – М.: Физматлит, 2009. – 304 с.
2. Askhabov S.N. Singular integral equations with monotone nonlinearity in complex Lebesgue spaces // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. 1992. V. 11, №1. – P. 77–84.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 1. Преобразование Фурье, Лапласа, Меллина (Серия: «Справочная математическая библиотека»). – М.: Наука, 1969. – 344 с.
4. Князев П.Н. Интегральные преобразования. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 200 с.
5. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
6. Porter D., Stirling D. Integral equations. A practical treatment, from spectral theory to applications. – Cambr. Univ. Press. 1990. – 382 p.

7. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. В 2-х томах. Том 1. – М.: Мир, 1985. – 264 с.
8. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
9. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Том 1. – М.: Мир, 1965. – 616 с.
10. Харди Г.Х., Рогозинский В.В. Ряды Фурье. – М.: Физматгиз, 1959. – 156 с.
11. Асхабов С.Н. Критерии положительности интегрального и интегро-дифференциального операторов свертки в периодическом случае // Вестник АН ЧР. 2017. №3(36). – С. 5–11.
12. Асхабов С.Н. Признак положительности интегро-дифференциального оператора свертки // Известия Чеченского гос. ун-та. 2017. №1(5). – С. 7–12.
13. Асхабов С.Н. О критериях положительности интегро-дифференциальных операторов свертки // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2019. Т. 19, №1. – С. 16–21.
14. Askhabov S.N. Positivity conditions for oper-ators with difference kernels in reflexive spaces // J. Math. Sci. 2020. Vol. 250, №. 5. – P. 717-727.
15. Асхабов С.Н. Критерий положительности интегро-дифференциального оператора свертки и его приложения // Тезисы докл. XIV Междун. научн. конф. «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования». – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ АН, 2017. – С. 84–85.
16. Асхабов С.Н. Критерий положительности интегро-дифференциального оператора свертки и его применение // Современные методы теории краевых задач: матер. межд. конф., посвященной 90-летию В.А. Ильина. – М.: "МАКС Пресс", 2018. – С. 46.
17. Асхабов С.Н. Интегральное уравнение Вольтерра со степенной нелинейностью // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, №5. – С. 6-19.

§4. Нелинейные интегральные уравнения типа свертки в комплексных пространствах Лебега

В данном параграфе рассмотрены три различных класса нелинейных интегральных уравнений типа свертки в *комплексных* пространствах Лебега $L_p(-\infty,\infty)$. Исследование этих уравнений в случае *комплексных* пространств вызывает дополнительные трудности, связанные, в частности, с нахождением условий положительности оператора свертки и условий монотонности и коэрцитивности оператора суперпозиции. Оказалось, что эти условия существенно отличаются от известных в случае *вещественных* пространств.

Всюду далее будем придерживаться терминологии и обозначений, приведенных в монографии [1].

Критерий положительности интегрального оператора свертки. В монографии [1, §10] доказано, что для положительности в *вещественном* пространстве Лебега $L_p(-\infty,\infty)$, где $1<p\le 2$, интегрального оператора свертки $(Hu)(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\cdot u(t)\,dt$ необходимо и достаточно, чтобы *косинус-преобразование* Фурье $\hat{h}_c(x)$ его ядра $h(x)\in L_1(-\infty,\infty)\bigcap L_{p/[2(p-1)]}(-\infty,\infty)$ *было* неотрицательной функцией на положительной полуоси $[0,\infty)$. Аналогичный результат установлен в [1, §28] и в случае соответствующих дискретного оператора свертки $(\Re u)_n=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-k}\cdot u_k$, где $k\in\mathbf{Z}$, и вещественного пространства ℓ_p. Эти результаты использованы в [1] при исследовании различных классов нелинейных интегральных и дискретных уравнений типа свертки в соответствующих вещественных пространствах.

В данном пункте установлено, что интегральный оператор свертки H является положительным в *комплексном* пространстве Лебега $L_p(-\infty,\infty)$ тогда и только тогда, когда реальная часть преобразования Фурье его ядра является неотрицательной функцией на всей числовой оси $(-\infty,\infty)$.

Рассмотрим в комплексном пространстве Лебега $L_p(-\infty,\infty)$, $1<p<\infty$, интегральный оператор свертки

$$(Hu)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x-t)\cdot u(t)\,dt=(h*u)(x),$$

где ядро $h(x)\in L_1(-\infty,\infty)$. Для $u(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ и $v(x)\in L_q(-\infty,\infty)$, $q=p/(p-1)$, введем обозначения:

$$\|u\|_p=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \qquad \text{и} \qquad \langle u,v\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\cdot\overline{v(x)}\,dx.$$

Если $p=q=2$, то $\langle u,v\rangle=(u,v)$ есть обычное скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_2(-\infty,\infty)$.

Обозначим через $\hat{u}(x)$ преобразование Фурье функции $u(x)\in L_2(-\infty,\infty)$ (см. [6, с. 55]):

$$\hat{u}(x)=\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}u(t)\cdot e^{-ixt}dt, \tag{1}$$

где символ $\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}$ означает предел в среднем с показателем $p=2$ (т.е. в среднем квадратичном).

Известно [6, с. 65], что $\hat{u}(x)\in L_2(-\infty,\infty)$, если $u(x)\in L_2(-\infty,\infty)$ и для любых $u(x),v(x)\in L_2(-\infty,\infty)$ справедливо обобщенное равенство Парсеваля $(u,v)=(\hat{u},\hat{v})$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\cdot\bar{v}(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(x)\cdot\overline{\hat{v}(x)}\,dx, \tag{2}$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение. Кроме того, если $h(x)\in L_1(-\infty,\infty)$, а $u(x)\in L_2(-\infty,\infty)$, то для преобразования Фурье свертки справедливо равенство [6, с. 77]:

$$\left(h\overset{\wedge}{*}u\right)(x)=\sqrt{2\pi}\,\hat{h}(x)\cdot\hat{u}(x), \tag{3}$$

где $\hat{h}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\cdot e^{-ixt}dt$, поскольку $h(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ и тогда выражение (1) упрощается.

Лемма 1. *Пусть* $1 < p \le 2$ *и ядро* $h(x) \in L_1(-\infty,\infty) \cap L_{q/2}(-\infty,\infty)$, *где* $q = p/(p-1)$. *Для того, чтобы оператор свертки* $\big(Hu\big)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\cdot u(t)\,dt$ *(действующий непрерывно из* $L_p(-\infty,\infty)$ *в* $L_q(-\infty,\infty)$*) был положительным, т.е. выполнялось неравенство*:

$$\operatorname{Re}\langle Hu,u\rangle = \operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\cdot u(t)dt\right)\cdot\overline{u(x)}\,dx \ge 0\,, \qquad \forall u(x)\in L_p(-\infty,\infty)\,. \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\operatorname{Re}\hat{h}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t)\cdot e^{-ixt}dt \ge 0\,, \qquad \forall x\in(-\infty,\infty)\,. \tag{5}$$

Доказательство. Достаточность. Так как $h(x)\in L_{q/2}(-\infty,\infty)$, то из неравенства Юнга (см., например, [1, с. 30]) непосредственно вытекает оценка

$$\|Hu\|_q \le \|h\|_{q/2}\cdot\|u\|_p\,, \qquad \forall u(x)\in L_p(-\infty,\infty)\,. \tag{6}$$

Значит, оператор свертки H действует непрерывно из $L_p(-\infty,\infty)$ в $L_q(-\infty,\infty)$ и непрерывен.

Докажем положительность оператора свертки H. Для этого рассмотрим отдельно два случая: $p=2$ и $1<p<2$.

1). Пусть $p=2$. Тогда $q=2$ и, по условию леммы 1, $h(x)\in L_1(-\infty,\infty)$. Значит, в силу неравенства (6), оператор свертки H действует непрерывно из $L_2(-\infty,\infty)$ в $L_2(-\infty,\infty)$ и непрерывен. Используя равенства (2) и (3), имеем

$$(Hu,u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\cdot u(t)\,dt\right)\cdot\overline{u(x)}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(h*u)(x)\cdot\overline{u(x)}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(h\,\widehat{*}\,u)(x)\cdot\overline{\hat{u}(x)}\,dx =$$

$$= \sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(x)\cdot\hat{u}(x)\cdot\overline{\hat{u}(x)}\,dx = \sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(x)\cdot|\hat{u}(x)|^2\,dx\,.$$

Значит,

$$\operatorname{Re}(Hu,u) = \sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Re}\hat{h}(x)\cdot|\hat{u}(x)|^2\,dx\,. \tag{7}$$

Из равенства (7) следует, что $\operatorname{Re}\big(Hu,u\big)\ge 0$ для любого $u(x)\in L_2(-\infty,\infty)$, если $\operatorname{Re}\hat{h}(x)\ge 0$ для почти всех $x\in(-\infty,\infty)$. Так как, по теореме Римана-Лебега [6, с. 42],

$\hat{h}(x)$ есть непрерывная на всей оси $(-\infty,\infty)$ функция, то условие, что $\operatorname{Re}\hat{h}(x)\ge 0$ для почти всех $x\in(-\infty,\infty)$ равносильно условию, что $\operatorname{Re}\hat{h}(x)\ge 0$ для всех $x\in(-\infty,\infty)$.

Таким образом, если $h(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ и $\operatorname{Re}\hat{h}(x)\ge 0$ для всех $x\in(-\infty,\infty)$, то

$$\operatorname{Re}\left(Hu,u\right)=\operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(x-t)\cdot u(t)dt\right)\cdot\overline{u(x)}\,dx\ge 0\,,\qquad \forall u(x)\in L_2(-\infty,\infty)\,. \tag{8}$$

2). Пусть теперь $1<p<2$, $h(x)\in L_1(-\infty,\infty)\bigcap L_{q/2}(-\infty,\infty)$ и выполняется условие (5). Так как $h(x)\in L_1(-\infty,\infty)$, то на основании неравенства (8), имеем

$$\operatorname{Re}\left\langle Hu,u\right\rangle=\operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(x-t)\cdot u(t)dt\right)\cdot\overline{u(x)}\,dx\ge 0\,,\qquad \forall u(x)\in L_2(-\infty,\infty)\bigcap L_p(-\infty,\infty)\,. \tag{9}$$

Поскольку множество $L_2(-\infty,\infty)\bigcap L_p(-\infty,\infty)$ всюду плотно в классе $L_p(-\infty,\infty)$ и, в силу неравенства Гельдера, $\left\langle Hu,u\right\rangle$ есть линейный непрерывный функционал, то неравенство $\operatorname{Re}\left\langle Hu,u\right\rangle\ge 0$, т.е. неравенство (9), будет выполняться и $\forall u(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ – что и требовалось доказать.

Необходимость. Докажем теперь, что условие (5) так же и необходимо для положительности оператора H. Пусть неравенство (4) выполнено. Нужно доказать, что тогда $\operatorname{Re}\hat{h}(x)\ge 0$ для всех $x\in(-\infty,\infty)$, т.е. выполнено условие (5). Допустим противное, что условие (5) не выполняется, т.е. существует точка $x_0\in(-\infty,\infty)$ такая, что $\operatorname{Re}\hat{h}(x_0)<0$. Поскольку, по теореме Римана-Лебега, $\operatorname{Re}\hat{h}(x)$ есть непрерывная на всей оси $(-\infty,\infty)$ функция, то найдется ε-окрестность $U_\varepsilon(x_0)=\{x:\ |x\text{-}x_0|<\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$, точки x_0 такая, что будет выполняться неравенство

$$\operatorname{Re}\hat{h}(x)<0\,,\qquad \forall x\in U_\varepsilon(x_0)\,.$$

Выберем функцию $u(x)\in L_2(-\infty,\infty)$ такую, что $\hat{u}(x)=0$, если $x\notin U_\varepsilon(x_0)$ и $\hat{u}(x)\ne 0$, если $x\in U_\varepsilon(x_0)$. Тогда, учитывая, что $\forall x\in U_\varepsilon(x_0)$ выполняются строгие неравенства $\operatorname{Re}\hat{h}(x)<0$, и $|\hat{u}(x)|>0$, по формуле (7) получим

$$\operatorname{Re}\left\langle Tu,u\right\rangle=\sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Re}\hat{h}(x)\cdot|\hat{u}(x)|^2\,dx=\sqrt{2\pi}\int\limits_{U_\varepsilon(x_0)}\operatorname{Re}\hat{h}(x)\cdot|\hat{u}(x)|^2\,dx<0\,,$$

что противоречит неравенству (4). Лемма 1 полностью доказана.

При исследовании нелинейных интегральных уравнений типа свертки, соответствующих случаю когда нелинейность находится под знаком интеграла (такие уравнения называют нелинейными интегральными уравнениями типа Гаммерштейна), нам понадобится также следующая лемма, двойственная лемме 1.

Лемма 2. *Пусть* $p \geq 2$ *и ядро* $h(x) \in L_1(-\infty,\infty) \bigcap L_{p/2}(-\infty,\infty)$. *Для того, чтобы оператор свертки* H *(действующий непрерывно из* $L_q(-\infty,\infty)$ *в* $L_p(-\infty,\infty)$*) был положительным необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (5).*

Доказательство леммы 2 проводится точно так же, как и доказательство леммы 1.

Теоремы существования и единственности решения в $L_p(-\infty,\infty)$. Обозначим через $\mathbf{C}$ множество всех комплексных чисел, а через $L_p^+(-\infty,\infty)$ – множество всех неотрицательных функций из $L_p(-\infty,\infty)$. Введем в рассмотрение нелинейный оператор суперпозиции (так называемый оператор Немыцкого) $(Fu)(x) = F[x,u(x)]$, порожденный комплекснозначной функцией $F(x,z):(-\infty,\infty)\times\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, удовлетворяющей известным условиям Каратеодори: она измерима по $x\in(-\infty,\infty)$ при каждом фиксированном $z\in\mathbf{C}$ и непрерывна по z почти для всех $x\in(-\infty,\infty)$.

Выпишем для удобства ссылок все ограничения на функцию $F(x,z)$, определяющую нелинейность исследуемых в этом пункте уравнений. Именно, в зависимости от рассматриваемого класса нелинейных интегральных уравнений типа свертки, будем накладывать на нелинейность $F(x,z)$ либо условия **1)–3)**, либо условия **4)–6)**:

1) *существуют* $c(x)\in L_q^+(-\infty,\infty)$ *и* $d_1>0$ *такие,что для почти всех* $x\in(-\infty,\infty)$ *и любого* $z\in\mathbf{C}$ *выполняется неравенство*:

$$|F(x,z)| \leq c(x) + d_1 \cdot |z|^{p-1}.$$

2) *для почти всех* $x\in(-\infty,\infty)$ *и всех* $z_1,z_2\in\mathbf{C}$ *выполняется неравенство*:

$$\mathrm{Re}\left\{[F(x,z_1)-F(x,z_2)]\cdot\overline{(z_1-z_2)}\right\}\geq 0.$$

3) *существуют* $D(x) \in L_1^+(-\infty,\infty)$ *и* $d_2 > 0$ *такие, что для почти всех* $x \in (-\infty,\infty)$ *и всех* $z \in \mathbf{C}$ *выполняется неравенство*:

$$\operatorname{Re}\left\{ F(x,z) \cdot \bar{z} \right\} \ge d_2 \cdot |z|^p - D(x) .$$

4) *существуют* $g(x) \in L_p^+(-\infty,\infty)$ *и* $d_3 > 0$ *такие,что для почти всех* $x \in (-\infty,\infty)$ *и любого* $z \in \mathbf{C}$ *выполняется неравенство*:

$$|F(x,z)| \le g(x) + d_3 \cdot |z|^{1/(p-1)} .$$

5) *для почти всех* $x \in (-\infty,\infty)$ *и всех* $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ *выполняется неравенство*:

$$\operatorname{Re}\left\{ [F(x,z_1) - F(x,z_2)] \cdot \overline{(z_1 - z_2)} \right\} > 0 .$$

6) *существуют* $D(x) \in L_1^+(-\infty,\infty)$ *и* $d_4 > 0$ *такие, что для почти всех* $x \in (-\infty,\infty)$ *и всех* $z \in \mathbf{C}$ *выполняется неравенство*:

$$\operatorname{Re}\left\{ F(x,z) \cdot \bar{z} \right\} \ge d_4 \cdot |z|^{p/(p-1)} - D(x) .$$

Заметим, что если выполнены условия 1)–3), то оператор F, порожденный функцией $F(x,z)$, действует из $L_p(-\infty,\infty)$ в $L_q(-\infty,\infty)$ и является непрерывным, монотонным и коэрцитивным оператором. Если же выполнены условия 4)–6), то оператор F действует наоборот из $L_q(-\infty,\infty)$ в $L_p(-\infty,\infty)$ и является непрерывным, строго монотонным и коэрцитивным оператором (см., например, [1, §2]).

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \le 2$, *ядро* $h(x) \in L_1(-\infty,\infty) \cap L_{q/2}(-\infty,\infty)$ *и удовлетворяет условию (5). Если нелинейность* $F(x,z)$ *удовлетворяет условиям 1)–3), то уравнение*

$$F[x,u(x)] + \int_{-\infty}^{\infty} h(x-t) \cdot u(t)dt = f(x) \tag{10}$$

имеет решение $u^*(x) \in L_p(-\infty,\infty)$ *при любом* $f(x) \in L_q(-\infty,\infty)$. *Это решение единственно, если вместо условия 2) выполнено условие 5). Если условие 3) выполнено при* $D(x) = 0$, *то справедлива оценка*:

$$\|u^*\|_p \le \left(d_2^{-1} \cdot \|f\|_q \right)^{1/(p-1)} .$$

Доказательство. Запишем уравнение (10) в операторном виде: $Au = f$, где $A = F + H$. Из условий 1)–3) вытекает, что оператор суперпозиции F, порожденный функцией $F(x,z)$, действует из $L_p(-\infty,\infty)$ в $L_q(-\infty,\infty)$ и является непрерывным, монотонным и коэрцитивным оператором, причем он является строго монотонным оператором, если выполнено условие 5). Из леммы 1 вытекает, что оператор свертки H также действует из $L_p(-\infty,\infty)$ в $L_q(-\infty,\infty)$ и является непрерывным и положительным (или, что то же самое, монотонным, в силу его линейности) оператором. Значит, оператор A действует непрерывно (тем более хеминепрерывно) из $L_p(-\infty,\infty)$ в $L_q(-\infty,\infty)$ и является монотонным и коэрцитивным оператором, причем он является строго монотонным оператором, если выполнено условие 5). Следовательно, в силу основной теоремы теории монотонных операторов (теоремы Браудера-Минти), уравнение $Au = f$, а значит и уравнение (10), имеет решение $u^*(x) \in L_p(-\infty,\infty)$ и это решение единственно, если выполнено условие 5).

Осталось доказать оценку нормы решения. Пусть $u^*(x) \in L_p(-\infty,\infty)$ есть решение уравнения (10), т.е. $Au^* = f$. Используя сначала условие 3) при $D(x) = 0$, а затем положительность оператора свертки H, равенство $Au^* = f$ и неравенство Гельдера, имеем

$$d_2 \cdot \|u^*\|_p^p \le \operatorname{Re}\left\langle Fu^*, u^*\right\rangle \le \operatorname{Re}\left\langle Fu^*, u^*\right\rangle + \operatorname{Re}\left\langle Hu^*, u^*\right\rangle = \operatorname{Re}\left\langle Au^*, u^*\right\rangle = \operatorname{Re}\left\langle f, u^*\right\rangle \le \|f\|_q \cdot \|u^*\|_p,$$

откуда непосредственно вытекает доказываемая оценка.

Теорема 1 доказана.

Следующая теорема относится к уравнениям типа Гаммерштейна.

Теорема 2. *Пусть* $p \ge 2$, *ядро* $h(x) \in L_1(-\infty,\infty) \cap L_{p/2}(-\infty,\infty)$ *и удовлетворяет условию (5). Если нелинейность* $F(x,z)$ *удовлетворяет условиям 1), 3) и 5), то уравнение*

$$u(x) + \int_{-\infty}^{\infty} h(x-t) \cdot F[t, u(t)]\, dt = f(x) \tag{11}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(-\infty,\infty)$ *при любом* $f(x) \in L_p(-\infty,\infty)$. *Кроме того, если условия 1) и 3) выполняются при* $c(x) = 0$ *и* $D(x) = 0$, *то справедлива оценка*:

$$\left\|u^*\right\|_p \le \frac{d_1}{d_2} \cdot \| f \|_p .$$

Доказательство. Из условий 1), 3) и 5) вытекает, что оператор суперпозиции F отображает пространство $L_p(-\infty,\infty)$ на всё пространство $L_q(-\infty,\infty)$, непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. В силу леммы 2.1 из [1], существует обратный оператор F^{-1}, отображающий $L_q(-\infty,\infty)$ на $L_p(-\infty,\infty)$, хеминепрерывный, строго монотонный и коэрцитивный. С учетом леммы 2 имеем, что оператор $A = F^{-1} + H$ действует из $L_q(-\infty,\infty)$ в $L_p(-\infty,\infty)$, хеминепрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит, на основании теоремы Браудера-Минити, уравнение $Av = f$ имеет единственное решение $v^* \in L_q(-\infty,\infty)$ при любом $f \in L_p(-\infty,\infty)$. Но тогда $u^* = F^{-1}v^* \in L_p(-\infty,\infty)$ является решением уравнения $u + HFu = f$, т.е. данного уравнения (11) и оно единственно, в силу условия 5).

Осталось доказать оценку нормы решения. Пусть $u^*(x) \in L_p(-\infty,\infty)$ есть решение уравнения (11), т.е. $u^* + HFu^* = f$. Используя сначала условие 3) при $D(x) = 0$, а затем положительность оператора свертки H, равенство $u^* + HFu^* = f$, неравенство Гельдера и условие 1) при $c(x) = 0$, имеем

$$d_2 \cdot \left\|u^*\right\|_p^p \le \operatorname{Re}\left\langle u^*, Fu^* \right\rangle \le \operatorname{Re}\left\langle u^*, Fu^* \right\rangle + \operatorname{Re}\left\langle HFu^*, Fu^* \right\rangle = \operatorname{Re}\left\langle f, Fu^* \right\rangle \le d_1 \cdot \| f \|_p \cdot \left\|u^*\right\|_p^{p-1},$$

откуда непосредственно вытекает доказываемая оценка.

Теорема 2 доказана.

Следующая теорема отличается от теорем 1 и 2 как по характеру ограничений на нелинейность $F(x,z)$, так и по структуре доказательства.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p \le 2$, *ядро* $h(x) \in L_1(-\infty,\infty) \cap L_{q/2}(-\infty,\infty)$ *и удовлетворяет условию (5). Если нелинейность* $F(x,z)$ *удовлетворяет условиям 4)–6), то уравнение*

$$u(x) + F\left[x, \int_{-\infty}^{\infty} h(x-t) \cdot u(t)dt\right] = f(x) \qquad (12)$$

имеет единственное решение $u^*(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ *при любом* $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$. *Кроме того, если условия 4) и 6) выполняются при* $g(x)=0$ *и* $D(x)=0$, *то справедлива оценка*:

$$\left\|u^*\right\|_p \le \left(\frac{d_3}{d_4}+1\right)\cdot\|f\|_p .$$

Доказательство. Из условий 4)–6) вытекает, что оператор суперпозиции F отображает сопряженное пространство $L_q(-\infty,\infty)$ на исходное пространство $L_p(-\infty,\infty)$, в котором ищется решение уравнения (12), и является непрерывным, строго монотонным и коэрцитивным оператором. В силу леммы 2.1 из [1], существует обратный оператор F^{-1}, отображающий $L_p(-\infty,\infty)$ на $L_q(-\infty,\infty)$, хеминепрерывный, строго монотонный и коэрцитивный. С учетом доказанной выше леммы 1 имеем, что оператор $A=F^{-1}+H$ действует из $L_p(-\infty,\infty)$ в $L_q(-\infty,\infty)$, хеминепрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит, на основании теоремы Браудера-Минити, уравнение $Av=Hf$, где $Hf\in L_q(-\infty,\infty)$, согласно лемме 1, имеет единственное решение $v^*\in L_p(-\infty,\infty)$ при любом $f\in L_p(-\infty,\infty)$. Но тогда $u^*=f-v^*\in L_p(-\infty,\infty)$ является решением уравнения $u+FHu=f$, т.е. данного уравнения (12) и оно единственно, в силу условия 5).

Осталось доказать оценку нормы решения. Пусть $u^*(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ есть решение уравнения (12), т.е. $u^*+FHu^*=f$. Используя условие 4) при $g(x)=0$, имеем

$$\left\|u^*-f\right\|_p=\left\|FHu^*\right\|_p\le d_3\cdot\left\|Hu^*\right\|_q^{q-1}. \tag{13}$$

Далее, так как $\left\langle u^*+FHu^*,Hu^*\right\rangle=\left\langle f,Hu^*\right\rangle$, то в силу положительности оператора свертки H получаем

$$\operatorname{Re}\left\langle FHu^*,Hu^*\right\rangle\le\operatorname{Re}\left\langle u^*+FHu^*,Hu^*\right\rangle=\operatorname{Re}\left\langle f,Hu^*\right\rangle\le\|f\|_p\cdot\left\|Hu^*\right\|_q. \tag{14}$$

С другой стороны, используя условие 6) при $D(x)=0$, имеем

$$\operatorname{Re}\left\langle FHu^*,Hu^*\right\rangle\ge d_4\cdot\left\|Hu^*\right\|_q^q. \tag{15}$$

Сравнивая неравенства (14) и (15), получаем оценку $\|Hu^*\|_q^{q-1} \le d_4^{-1} \cdot \|f\|_p$. Но тогда из неравенства (13) следует, что $\|u^* - f\|_p \le d_3 \cdot d_4^{-1} \cdot \|f\|_p$. Поскольку $\|u^*\|_p - \|f\|_p \le \|u^* - f\|_p$, то из последнего неравенства непосредственно вытекает доказываемая оценка.

Теорема 3 доказана.

В заключение отметим, что при $p = 2$ теоремы 1–3 охватывают, в частности, и случай линейных интегральных уравнений типа свертки. Кроме того, комбинируя метод монотонных операторов и принцип сжимающих отображений, следуя [1, §9] можно показать, что решения соответствующих линейных и нелинейных интегральных уравнений типа свертки могут быть найдены методом последовательных приближений пикаровского типа в комплексных пространствах $L_2(-\infty,\infty)$. Например, справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть ядро* $h(x) \in L_1(-\infty,\infty)$ *и удовлетворяет условию (5). Если нелинейность* $F(x,z)$ *удовлетворяет условиям*:

7) *существует число* $M > 0$ *такое, что для почти всех* $x \in (-\infty,\infty)$ *и всех* $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ *выполняется неравенство*:

$$|F(x,z_1) - F(x,z_2)| \le M \cdot |z_1 - z_2|;$$

8) *существует число* $m > 0$ *такое, что для почти всех* $x \in (-\infty,\infty)$ *и всех* $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ *выполняется неравенство*:

$$\operatorname{Re}\left\{[F(x,z_1) - F(x,z_2)] \cdot \overline{(z_1 - z_2)}\right\} \ge m \cdot |z_1 - z_2|^2,$$

то уравнение (10) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(-\infty,\infty)$ *при любом* $f(x) \in L_2(-\infty,\infty)$. *Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле*:

$$u_n = u_{n-1} - \mu \cdot \left(Fu_{n-1} + Hu_{n-1} - f\right), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{16}$$

причем справедлива оценка скорости их сходимости:

$$\|u_n - u^*\|_2 \le \mu \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|Fu_0 + Hu_0 - f\|_2, \tag{17}$$

где $\mu = \dfrac{m}{\left(M + \|h\|_1\right)^2}$, $\alpha = 1 - \dfrac{m}{\mu} < 1$, $u_0(x) \in L_2(-\infty,\infty)$ *– произвольная функция.*

Доказательство. Запишем уравнение (10) в операторном виде: $Au = f$, где $A = F + H$. Из условий 7)–8) вытекает, что оператор суперпозиции F, порожденный функцией $F(x,z)$, действует из $L_2(-\infty,\infty)$ в $L_2(-\infty,\infty)$ и является липшиц-непрерывным и сильно монотонным оператором, причем $\forall u(x), v(x) \in L_2(-\infty,\infty)$ выполняются неравенства:

$$\|Au - Av\|_2 \le \left(M + \|h\|_1\right) \cdot \|u - v\|_2, \qquad \mathrm{Re}\,(Au - Av, u - v) \ge m \cdot \|u - v\|_2^2. \tag{18}$$

Поскольку сильная монотонность оператора влечёт за собой его строгую монотонность и коэрцитивность, то по теореме Браудера-Минти уравнение $Au = f$, т.е. данное уравнение (10), имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(-\infty,\infty)$.

Осталось доказать, что это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле (16) с оценкой скорости их сходимости (17). Для этого заменим уравнение $Au = f$ на эквивалентное уравнение $u = \Phi u$, где $\Phi u = u - \mu \cdot (Au - f)$, $\mu > 0$ любое (пока) число. Очевидно, что оператор Φ действует из $L_2(-\infty,\infty)$ в $L_2(-\infty,\infty)$ и, в силу неравенств (18),

$$\|\Phi u - \Phi v\|_2^2 = \left(u - v - \mu \cdot (Au - Av), u - v - \mu \cdot (Au - Av)\right) =$$

$$= \|u - v\|_2^2 - 2\mu \cdot \mathrm{Re}\,(Au - Av, u - v) + \mu^2 \cdot \|Au - Av\|_2^2 \le \left(1 - 2\mu \cdot m + \mu^2 M^2\right) \cdot \|u - v\|_2^2 = \sqrt{\alpha} \cdot \|u - v\|_2^2,$$

где μ и α определены в формулировке доказываемой теоремы.

Следовательно, оператор Φ является сжимающим и поэтому формула (16) и оценка (18) непосредственно вытекают из принципа сжимающих отображений Банаха.

Теорема 4 доказана.

Теоремы, подобные теореме 4, можно доказать и для нелинейных интегральных уравнений типа свертки (11) и (12), при этом последовательные приближения и оценки скорости их сходимости к точному решению будут содержать оператор F^{-1}, обратный оператору F.

В заключение отметим, что аналогичные результаты можно получить для соответствующих нелинейных дискретных уравнений типа свертки как в вещественных, так и комплексных пространствах числовых последовательностей ℓ_p (см., соответственно, [7] и [8]). При этом важную роль играют условия положительности операторов свертки (подробнее см. [9]).

Основные результаты данного параграфа были опубликованы в [9]-[12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки. – М.: Физматлит, 2009. – 304 с.
2. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
3. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Том 1. – М.: Мир, 1985. – 264 с.
4. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
5. Porter D., Stirling D. Integral equations. A practical treatment, from spectral theory to applications. – Cambr. Univ. Press. 1990. – 382 p.
6. Князев П.Н. Интегральные преобразования. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 200 с.
7. Асхабов С.Н., Карапетянц Н.К. Дискретные уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 10. – С. 1777–1784.
8. Askhabov S.N., Karapetian N.K. Convolution Type Discrete Equations with Monotonous Nonlinearity in Complex Spaces // Journal of Integral Equations and Appl. 1992. Vol. 1, № 1. – С. 44–66.
9. Асхабов С.Н. Нелинейные интегральные уравнения типа свертки в комплексных пространствах // Уфимский математический журнал. 2021. Т. 11, №1. С. 17-30.

10. Askhabov S.N. Positivity Conditions for Operators with Difference Kernels in Reflexive Spaces // Journal of Math. Sciences. 2020. Vol. 250, № 5. – P. 717–727.
11. Askhabov S.N. Method of maximal monotonic operators in the theory of non-linear integro-differential equations of convolution type // Journal of Mathematical Sciences. 2022. Vol. 260, № 3. – P. 275-285.
12. Асхабов С.Н. Нелинейные интегральные уравнения типа свертки в комплексных пространствах // Уфимская осенняя математическая школа (11-14 ноября 2020 г.). Сб. тезисов докладов междун. конф. Часть 2. – Уфа: «Аэтерна», 2020. – С. 17-19.

ГЛАВА 2. МЕТОД ВЕСОВЫХ МЕТРИК В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СУММАРНО-РАЗНОСТНЫМИ ЯДРАМИ

В данной главе при исследовании интегральных и интегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа со степенной нелинейностью и суммарными, разностными или суммарно-разностными ядрами применяется развиваемый нами метод весовых метрик (аналог метода А. Белицкого), позволяющий доказывать глобальные теоремы о существовании, единственности, оценках и способах нахождения решения без ограничений на область существования решений.

§1. Приближенное решение краевой задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа свертки

Введение. Как известно [4], [5], в настоящее время теория линейных уравнений типа свертки достаточно хорошо разработана. В ряде прикладных задач теории переноса излучения, следящих систем (сервомеханизмов), электрических сетей, содержащих нелинейные элементы, в моделях популяционной генетики и других возникают нелинейные уравнения типа свертки (подробнее см. [1], [8]). Особенностью исследования нелинейных уравнений типа свертки является, в частности, то, что в отличие от линейного случая, где основные результаты имеют место сразу для целой серии пространств (L_p, C, C_0, M и других) [5, гл. III, п. 3.2], здесь картина существенно зависит как от выбора рассматриваемого пространства, в котором разыскиваются решения, так и от характера допускаемой нелинейности.

В ряде работ [6, 9, 10] (подробнее см. [1], [8]) было изучено уравнение вида

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x k(x-t)u(t)dt, \;\; x > 0, \;\; \alpha > 1, \tag{1}$$

возникающее при исследовании инфильтрации жидкости из цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду, при описании процесса распространения ударных волн в трубах, наполненных газом и других (подробнее см. в монографии [1]).

Важно отметить, что, в связи с указанными приложениями, особый интерес представляют именно непрерывные положительные при $x > 0$ решения уравнения (1).

В данном параграфе в конусе пространства непрерывных на положительной полуоси $[0, \infty)$ функций, исчезающих в нуле и неограниченных на бесконечности, изучается краевая задача для уравнения вида

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x k(x-t)u'(t)dt, \ \ x > 0, \ \ \alpha > 1, \tag{2}$$

тесно связанного, как будет показано ниже, с уравнением вида (1).

Исследование основано на сведении данного интегро-дифференциального уравнения (2) к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению вида (1). На основе полученных точных априорных оценок решений уравнений вида (1) мы строим полное весовое метрическое пространство P_b и доказываем глобальную теорему о существовании, единственности и способе нахождения решения краевой задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения (2) как в пространстве P_b, так и во всем классе непрерывных положительных при $x > 0$ функций.

Свойства неотрицательных решений. Обозначим через Q конус, состоящий из неотрицательных непрерывных на полуоси $[0, \infty)$ функций. Рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа свертки (2) в котором ядро $k(x)$ удовлетворяет условию

$$k(x) \in C^1[0, \infty), \ \ k'(x) \ \text{не убывает на} \ [0, \infty), \ \ k(0) = 0 \ \text{ и } \ k'(0) > 0. \tag{3}$$

В связи с указанными во введении приложениями, мы будем разыскивать решения уравнения (2) в классе:

$$Q_0^1 = \{u(x): u(x) \in C[0, \infty) \cap C^1(0, \infty), \ \ u(0) = 0 \ \text{ и } \ u(x) > 0 \ \text{ при } \ x > 0\}.$$

Наряду с уравнением (2) мы будем рассматривать интегральное уравнение

$$u^{\alpha}(x) = \int_{0}^{x} k'(x-t)u(t)dt, \ \ x > 0, \ \ \alpha > 1, \tag{4}$$

в конусе $Q_0 = \{u(x): u(x) \in C[0,\infty), \ \ u(0) = 0$ и $u(x) > 0$ при $x > 0\}$.

Лемма 1. *Пусть ядро $k(x)$ удовлетворяет условию (3). Если $u(x) \in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (4), то функция $u(x)$ не убывает и непрерывно дифференцируема на положительной полуоси* $(0,\infty)$.

Доказательство совпадает с доказательством леммы 1 из [2] при $f \equiv 0$.

Очевидно, что уравнения (2) и (4) имеют в классе Q тривиальное решение $u(x) \equiv 0$. В связи с тем, что с теоретической и прикладной точек зрения интерес представляют нетривиальные решения уравнений (2) и (4) докажем следующие две леммы.

Лемма 2. *Для того, чтобы интегро-дифференциальное уравнение (2) с неотрицательным непрерывным ядром $k(x)$ при любом $\alpha > 0$ имело в классе Q нетривиальное решение необходимо, чтобы выполнялось условие*

$$\int_{0}^{\delta} k(t)dt > 0 \quad \text{для всех} \quad \delta > 0. \tag{5}$$

Доказательство. Допустим противное, т.е. что существует число $a > 0$ такое, что $\int_0^a k(t)dt = 0$ и тем не менее уравнение (2) имеет нетривиальное решение $u(x) \neq 0$. Так как ядро $k(x)$ неотрицательно и непрерывно, то из последнего равенства следует, что $k(t) = 0$ при $0 \leq t \leq a$. Но тогда из тождества (2), в силу коммутативности свертки, имеем

$$u^{\alpha}(x) = \int_{0}^{x} k(t)u'(x-t)dt = 0 \ \ \text{при} \ \ 0 \leq x \leq a. \tag{6}$$

Значит, $u(x) = 0$ при $x \in [0,a]$ и, тем более, $u'(x) = 0$ при $x \in [0,a]$.

Пусть теперь $x \in [a,2a]$. Тогда $0 \leq x - a \leq a$ и из тождества (2), поскольку $u'(t) = k(t) = 0$ при $0 \leq t \leq a$, вытекает, что

$$u^{\alpha}(x)=\int_{0}^{x}k(x-t)u'(t)dt=\int_{a}^{x}k(x-t)u'(t)dt=\int_{0}^{x-a}k(t)u'^{(x-t)}dt=0$$

так как $k(t)=0$ при $0\le t\le x-a\le a$. Значит, $u(x)=0$ и при $x\in[a,2a]$.

Итак, мы показали, что $u(x)=0$ при $x\in[0{,}2a]$. Продолжая этот процесс, получим, что $u(x)=0$ при $x\in[0,na]$ и любом $n\in\mathbb{N}$, т.е. $u(x)\equiv 0$ на $[0,\infty)$, а это противоречит тому, что $u(x)\neq 0$.

Заметим, что условие (5) выполняется, если ядро $k(x)$ удовлетворяет условию (2).

Лемма 3. *Если ядро* $k(x)$ *удовлетворяет условию (3), то интегральное уравнение (4) при* $0<\alpha\le 1$ *имеет в классе* Q *неотрицательных непрерывных на* $[0,\infty)$ *функций лишь тривиальное решение* $u(x)\equiv 0$.

Доказательство. При $\alpha=1$ утверждение леммы 3 известно, поэтому считаем далее, что $0<\alpha<1$. Допустим противное, т.е. что уравнение (4) имеет нетривиальное решение $u(x)\in Q$. Тогда найдется число $x_0>0$ такое, что $u(x_0)>0$. Очевидно, что $u(0)=0$. Положим

$$x_n=\inf\left\{x\colon 0\le x\le x_0\ \text{ и }\ u(x)=\frac{u(x_0)}{2^n}\right\}.$$

Тогда $u(x_n)=u(x_0)\cdot 2^{-n}$ и, в силу леммы 1, $u(t)\le u(x_n)$ при $t<x_n$.

Положим $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Тогда возможны два случая: $a=0$ и $a>0$.

1). Пусть $a=0$. В этом случае из тождества (4), имеем

$$u^{\alpha}(x_n)=\int_{0}^{x_n}k'(x_n-t)u(t)dt\le u(x_n)\int_{a}^{x}k'(x_n-t)dt=u(x_n)\cdot k(x_n)$$

или $[u(x_n)]^{\alpha-1}\le k(x_n)$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n\to\infty$, с учетом, что $u(0)=0$ и $\alpha-1<0$, приходим к противоречию: $\infty\le 0$.

2). Пусть, наконец, $a>0$. Из определения x_n следует, что $a\le x_n$ при любом $n\in\mathbb{N}$ и $u(t)\equiv 0$ при $t\le a$. В самом деле, переходя к пределу при $n\to\infty$ в равенстве $u(x_n)=u(x_0)\cdot 2^{-n}$ получаем $u(0)=0$. Так как $u(x)$ не убывает на $[0,\infty)$ и $u(0)=u(a)=0$, то $u(t)\equiv 0$ для всех $t\le a$. Поэтому из тождества (4) имеем

$$u^{\alpha}(x_n) = \int_0^a k'(x_n - t)u(t)dt + \int_a^{x_n} k'(x_n - t)u(t)dt = \int_a^{x_n} k'(x_n - t)u(t)dt \leq$$

$$\leq u(x_n) \int_a^{x_n} k'(x_n - t)dt = u(x_n) \int_0^{x_n - a} k'(t)dt = u(x_n) \cdot k(x_n - a).$$

Следовательно, $[u(x_n)]^{\alpha-1} \leq k(x_n - a)$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, с учетом, что $u(x_n) = u(x_0) \cdot 2^{-n} \to 0$, $k(0) = 0$ и $\alpha - 1 < 0$, снова получаем противоречие: $\infty \leq 0$.

Прежде чем продолжить исследование уравнений (2) и (4) заметим, что если $u(x) \in Q$ является нетривиальным решением уравнения (4), то при любом $\delta > 0$ его сдвиги:

$$u_\delta(x) = u(x - \delta) \text{ при } x > \delta; \;\; u_\delta(x) = 0 \text{ при } x \leq \delta;$$

$$u_{-\delta}(x) = u(x + \delta) \text{ при } x > 0,$$

также являются решениями уравнения (4), что проверяется непосредственной подстановкой в это уравнение. Следовательно, уравнение (4) может иметь в конусе Q континуум нетривиальных решений. Поэтому, для того, чтобы задачу отыскания нетривиальных решений уравнения (4) сделать корректной и в связи с тем, что с прикладной точки зрения интерес представляют непрерывные положительные при $x > 0$ решения, будем разыскивать решения уравнения (4) в классе Q_0.

Справедливы следующие две основные леммы, непосредственно вытекающие из подробно доказанных в [2] лемм 2 и 3 в частном случае, когда в них $f(x) \equiv 0$.

Лемма 4. *Пусть ядро $k(x)$ удовлетворяет условию (3). Если $u(x) \in Q_0^1$ и является решением интегро-дифференциального уравнения (2), то $u(x) \in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (4). Обратно, если уравнение (4) имеет решение $u(x) \in Q_0$, то $u(x) \in Q_0^1$ и является решением интегро-дифференциального уравнения (2).*

Лемма 5. *Пусть ядро* $k(x)$ *удовлетворяет условию (3) и* $\alpha > 1$. *Если* $u(x) \in Q_0$ *и является решением интегрального уравнения (4), то* $u(x)$ *удовлетворяет неравенствам*:

$$F(x) \equiv \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha} k'(0)x\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \le u(x) \le \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha} k(x)\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \equiv G(x). \qquad (7)$$

В силу леммы 4, утверждения леммы 5 справедливы и для уравнения (2).

Пример ядра $k(x) = p \cdot x$, $p > 0$, удовлетворяющего условию (3), показывает, что априорные оценки (7) не улучшаемы, так как в этом случае они совпадают между собой и
являются решением как уравнения (4), так и уравнения (2).

Существование и единственность решения краевой задачи при показателе $\boldsymbol{\alpha > 1}$**.** Из лемм 4 и 5 следует, что исследование интегро-дифференциального уравнения (2) сводится к решению ***краевой задачи***: найти решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям

$$u(0) = 0 \quad \text{и} \quad u(+\infty) \equiv \lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty. \qquad (8)$$

Решение краевой задачи (2), (8) естественно разыскивать в классе

$$P = \{u(x):\ u(x) \in C[0, \infty) \ \text{ и } \ F(x) \le u(x) \le G(x)\}.$$

Рассмотрим нелинейный интегральный оператор свертки T:

$$(Tu)(x) = \left(\int_0^x k'(x-t)u(t)dt\right)^{1/\alpha}.$$

Следующая теорема является следствием теоремы 1, доказанной в работе [2].

Теорема 1. *Пусть ядро* $k(x)$ *удовлетворяет условию (3). Тогда класс* P *инвариантен относительно нелинейного оператора* T.

Исследование интегрального уравнения (4) будет основано на принципе сжимающих отображений и для его применения нам нужно будет построить полное метрическое пространство. Введем в связи с этим следующий класс функций:

$$P_b = \{u(x):\ u(x) \in C[0, b] \ \text{ и } \ F(x) \le u(x) \le G(x)\},$$

где $b > 0$ - произвольное число, и определим расстояние в P_b по формуле:

$$\rho(u,v) = \sup_{0<x\le b} \frac{|u(x) - v(x)|}{x^{1/(\alpha-1)} e^{\beta x}}, \quad \beta \ge 0. \tag{9}$$

Из леммы 4, доказанной в [2], вытекает, что пара (P_b, ρ) образует полное метрическое пространство.

Выберем теперь достаточно малое число $c \in (0, b)$ такое, что выполняется неравенство

$$k'(c) < \alpha \cdot k'(0) \tag{10}$$

и положим

$$\beta = \frac{1}{k'(0)} \sup_{c\le x\le b} \frac{k'(x) - k'(0)}{x}. \tag{11}$$

Лемма 7. *Пусть функция* $k(x)$ *удовлетворяет условию (3). Тогда для любого* $x \in [0, b]$ *справедливо неравенство*:

$$k'(x)e^{-\beta x} \le k'(c), \tag{12}$$

где числа c *и* β *определяются из условия (10) и формулы (11), соответственно.*

Доказательство. Если $k'(x) \equiv \text{const}$, то $\beta = 0$ и неравенство (12) обращается в тождество. Если же $k'(x) \ne \text{const}$, то $\beta > 0$ и для доказательства неравенства (12) в этом случае остается повторить дословно доказательство леммы 5 из [2] (ср. [9]).

Следующая теорема является прямым следствием теоремы 2 из [2] при $f(x) \equiv 0$.

Теорема 2. *Пусть ядро* $k(x)$ *удовлетворяет условию (3). Тогда оператор* T *является сжимающим в* P_b*, причем для любых* $u(x), v(x) \in P_b$ *выполняется неравенство:*

$$\rho(u,v) \le \frac{k'(c)}{\alpha \cdot k'(0)} \rho(u,v), \tag{13}$$

где число $c \in (0, b)$ *определяется из условия (10).*

Докажем теперь основную теорему данной работы.

Теорема 3. *Если ядро* $k(x)$ *удовлетворяет условтю (3), то краевая задача (2), (8) имеет в* Q_0^1 *(и в* P_b *при любом* $b > 0$*) единственное решение* $u^*(x)$*. Это* *решение можно найти в* P_b *методом последовательных приближений по формуле* $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, *со сходимостью по метрике (9), где число* β *определяется равенством (11), а число* $c \in (0, b)$ *определяется из условия (10). При этом справедлива оценка скорости этой сходимости*:

$$\rho(u_n, u^*) \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot \rho(Tu_0, u_0), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

где $q = \frac{k'(c)}{\alpha \cdot k'(0)} < 1$, *а* $u_0(x) \in P_b$ *есть начальное приближение (произвольная функция).*

Доказательство. В силу леммы 4, краевая задача (2), (8) эквивалентна краевой задаче (4), (8). Поэтому утверждения теоремы достаточно доказать для интегрального уравнения (4). Запишем его в операторном виде: $u = Tu$. Из теоремы 2 следует, что выполнены все требования принципа сжимающих отображений, из которого непосредственно вытекает, что уравнение (4) имеет единственное решение $u^*(x)$ в пространстве P_b при любом $b > 0$ и оно может быть найдено методом последовательных приближений, которые сходятся к нему по метрике (9) при любом $b < \infty$ с оценкой скорости сходимости (14). Осталось показать, что это решение единственное и во всем классе Q_0. Из единственности и непрерывности решения уравнения (4) в каждом классе P_b вытекает, что для любых b_1 и b_2 таких, что $b_2 > b_1$ решение $u_{b_2} \in P_{b_2}$ является непрерывным продолжением решения $u_{b_1} \in P_{b_1}$. Следовательно, если обозначить через $u_n(x)$ решение уравнения (4) в классе P_n, то функция $u(x) = u_n(x))$$ при $x \in [n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$, будет решением уравнения (4) в конусе Q_0. Таким образом, существование в конусе Q_0 решения уравнения (4) установлено. Докажем его единственность. Предположим, что в конусе Q_0 существует два решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ уравнения (4). Поскольку для этих решений справедливы двусторонние априорные оценки $F(x) \leq u_i(x) \leq G(x)$, где $x \in [0, \infty)$, $i = 1, 2$, то сужение каждого из этих решений на любой отрезок $[0, b]$ является решением уравнения (4) в классе P_b. Поэтому, если бы эти решения были различны, т.е.

$u_1(x) \neq u_2(x)$, то нашлось бы $b > 0$, при котором в классе P_b уравнение (4) имело бы два решения, что невозможно.

Теорема полностью доказана.

Приведем теперь несколько простых примеров, иллюстрирующих полученные результаты:

1). Если $k(x) = p \cdot x,\ p > 0$, то уравнение (2) имеет в классе Q_0^1 единственное решение $u(x) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot p \cdot x\right)^{1/(\alpha-1)}$. В данном случае $k'(x) = p$ и поэтому $\beta = 0$ (см. доказательство леммы 7) так, что коэффициент сжатия в неравенстве (13) равен $1/\alpha$ и меньше единицы.

2). Если $k(x) = e^x - 1$, то уравнение (2) имеет в классе Q_0^1 единственное решение $u(x) = \left(e^{\frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot x} - 1\right)^{1/(\alpha-1)}$. Заметим, что в этих примерах при $\alpha > 2$ решения в нуле не дифференцируемы.

Основные результаты данного параграфа опубликованы в работах [11]-[15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки. – М.: Физматлит, 2009. – 304 с.
2. Асхабов С.Н. Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, №6. – С. 786–795.
3. Асхабов С.Н., Карапетянц Н.К. Дискретные уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, №10. – С. 1777–1784.
4. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
5. Прёсдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 496 с.

6. Askhabov S.N., Betilgiriev M.A. Nonlinear convolution type equations // Seminar Analysis Oper. Eq. Numer. Anal. 1989/90. Karl-Weierstrass-Institut fur Mathematik. Berlin. 1990. – P. 1-30.
7. Askhabov S.N., Karapetian N.K. Convolution Type Discrete Equations with Monotonous Nonlinearity in Complex Spaces // Journal of Integral Equations and Applications. 1992. Vol. 1, №1. – P. 44-66.
8. Brunner H. Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. – 387 p.
9. Okrasinski W. On the existence and uniqueness of nonnegative solutions of a certain nonlinear convolution equation // Annal. Polon. Math. 1979. Vol. 36, №1. – P. 61–72.
10. Okrasinski W. Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math. 1989. Vol. 4, №2. – P. 51-74.
11. Асхабов С.Н. Приближенное решение краевой задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа свертки // Известия Чеченского гос. ун-та. 2020. № 4 (20). – С. 7-12.
12. Асхабов С.Н. Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, №6. – С. 786–795.
13. Асхабов С.Н. Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа свертки с переменным коэффициентом и неоднородностью в линейной части // Владикавказский математический журнал. 2020. Т. 22, №4. – С. 14-25.
14. Асхабов С.Н. Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и переменным коэффициентом // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, №3. – С. 387-398.
15. Askhabov S.N. Nonlinear convolution integro-differential equation with vari-able coefficient // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2021. Vol. 24, №3. – P. 848-864.

§2. Интегральное уравнение вольтерровского типа с суммарно-разностным ядром и степенной нелинейностью

Введение. Многие задачи современной математики, физики, механики и биологии приводят к нелинейным интегральным уравнениям с суммарными и разностными ядрами [1], [2]. Например, описание процесса распространения ударных волн в трубах, наполненных газом или процесса инфильтрации жидкости из цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду приводит к нелинейным уравнениям с разностными ядрами [3], [4], [5], а нелинейные уравнения с суммарными ядрами возникают в теории лучистого равновесия и в теории переноса тепла излучением [6], [7]. В данном параграфе изучается тесно связанное с ними нелинейное интегральное уравнение с суммарно-разностным ядром

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x [h(x+t) + k(x-t)]u(t)dt, \quad x > 0, \quad \alpha > 1, \tag{1}$$

где заданные функции $h(x)$ и $k(x)$ удовлетворяют следующим основным условиям:

$$h(x) \text{ не убывает на полуоси } [0,\infty) \text{ и } h(0) \geq 0, \tag{2}$$

$$k(x) \text{ не убывает на полуоси } [0,\infty) \text{ и } k(0) > 0. \tag{3}$$

Очевидно, что уравнение (1) имеет тривиальное решение $u(x) \equiv 0$ в конусе

$$Q = \{u(x)\colon\ u(x) \in C[0,\infty) \ \text{ и } \ u(x) \geq 0 \ \text{ при } \ x \geq 0\},$$

состоящем из неотрицательных непрерывных на полуоси $[0,\infty)$ функций, и, вообще, любое решение этого уравнения в конусе Q удовлетворяет условию $u(0) = 0$. Кроме того, если интегральное уравнение (1) имеет нетривиальное решение $u(x) \in Q$, то его сдвиги

$$u(x) = \begin{cases} u(x-\delta), & \text{если } x > \delta, \\ 0, & \text{если } x \leq \delta, \end{cases}$$

также являются решениями этого уравнения при любом $\delta > 0$, т.е. уравнение (1) может иметь континуум решений. Поэтому, для того, чтобы задачу нахождения нетривиальных решений уравнения (1) сделать корректной и в связи с тем, что с прикладной и теоретической точек зрения особый интерес представляют непрерывные положительные при $x > 0$ решения уравнения (1), будем искать его решения в классе

$$Q_0 = \{u(x):\ u(x) \in C[0, \infty),\ \ u(0) = 0\ \text{ и } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}.$$

Очевидно, что тривиальное решение $u(x) \equiv 0$ интегрального уравнения (1) не принадлежит классу Q_0.

Следует отметить, что теория линейных интегральных уравнений типа свертки, т.е. уравнений с разностными ядрами, в настоящее время достаточно хорошо разработана и ее основные результаты приведены, например, в монографии [8]. Что касается соответствующих линейных интегральных уравнений с суммарными ядрами, то, как отмечено в работе [9], они изучены, в отличие от уравнений с разностными ядрами, сравнительно мало.

В настоящее время теория нелинейных интегральных уравнений с суммарно-разностными ядрами находится в стадии становления и отличается от соответствующей линейной теории не только по методам исследования, но и по характеру получаемых результатов. Например, нелинейное интегральное уравнение (1) кроме тривиального решения $u(x) \equiv 0$ может иметь, как будет доказано ниже, также нетривиальное решение и в этом состоит принципиальное отличие от линейного случая, когда $\alpha = 1$ (в этом случае уравнение (1) имеет лишь тривиальное решение).

Свойства неотрицательных решений. Прежде чем доказать теорему о существовании, единственности и способе нахождения решения уравнения (1), выясним сначала какими свойствами должны обладать эти решения, если они существуют. Для этого нам понадобятся следующие два неравенства

$$\int_0^x a(x+t)b(t)dt \le \int_0^x [2a(2t) - a(t)]b(t)dt\,, \qquad x > 0, \tag{4}$$

$$\int_0^x a(x-t)b(t)dt \le \int_0^x a(t)b(t)dt, \qquad x > 0, \tag{5}$$

справедливые для любых неотрицательных неубывающих на полуоси $[0,\infty)$ функций $a(x)$ и $b(x)$.

Неравенство (4) подробно доказано в [10, Лемма 1], а неравенство (5) известно как интегральное неравенство Чебышева [11, с. 120] (см., также, [1, с. 121], где приведены два различных его доказательства).

Справедлива следующая лемма

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (2) и (3). Если* $u(x) \in Q_0$ *является решением уравнения (1), то* $u(x)$ *не убывает на полуоси* $[0,\infty)$ *и для любого* $x \in [0,\infty)$ *выполняются неравенства:*

$$\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x [h(2t)+k(0)]\,dt\right)^{1/(\alpha-1)} \le u(x) \le$$

$$\le \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x [2h(2t)-h(t)+k(t)]\,dt\right)^{1/(\alpha-1)}. \qquad (6)$$

Доказательство. Пусть $u(x) \in Q_0$ является решением уравнения (1.1). Докажем сначала, что тогда $u(x)$ не убывает на полуоси $[0,\infty)$. Для любых $x_1, x_2 \in [0,\infty)$ таких, что $x_2 > x_1$ имеем

$$u^\alpha(x_2) - u^\alpha(x_1) = \int_0^{x_1} [h(x_2+t)+k(x_2-t)-h(x_1+t)-k(x_1-t)]u(t)dt +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} [h(x_2+t)+k(x_2-t)]\,u(t)dt \ge 0,$$

т.е. $u(x_2) \ge u(x_1)$ – что и требовалось.

Докажем теперь первое неравенство из (6). Используя условия на ядра (2) и (3), из тождества (1) получаем

$$u^\alpha(x) \ge \int_0^x [h(2t)+k(0)]u(t)dt$$

или

$$u(x) \geq \left(\int_0^x [h(2t)+k(0)]u(t)dt\right)^{1/\alpha} \quad \text{для любого } x>0 \qquad (7)$$

или

$$u(t) \geq \left(\int_0^t [h(2s)+k(0)]u(s)ds\right)^{1/\alpha} \quad \text{для любого } t>0,$$

откуда

$$\left(\int_0^t [h(2s)+k(0)]u(s)ds\right)^{-1/\alpha} [h(2t)+k(0)]u(t) \geq [h(2t)+k(0)].$$

Интегрируя обе части последнего неравенства в пределах от 0 до x, имеем

$$\left(\int_0^x [h(2s)+k(0)]u(s)ds\right)^{(\alpha-1)/\alpha} \geq \frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x [h(2t)+k(0)]\,dt$$

или

$$\left(\int_0^x [h(2t)+k(0)]u(t)dt\right)^{1/\alpha} \geq \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x [h(2t)+k(0)]\,dt\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Используя эту оценку, из (7) непосредственно получаем первое неравенство из (6).

Докажем, наконец, второе неравенство из (6). Используя неравенства (4) и (5), имеем

$$u^\alpha(x) = \int_0^x h(x+t)u(t)dt + \int_0^x k(x-t)u(t)dt \leq$$

$$\leq \int_0^x [2h(2t)-h(t)]u(t)dt + \int_0^x k(t)u(t)dt = \int_0^x [2h(2t)-h(t)+k(t)]u(t)dt,$$

откуда, обозначив, $H(t) = 2h(2t) - h(t) + k(t)$, имеем

$$u(x) \leq \left(\int_0^x [2h(2t)-h(t)+k(t)]u(t)dt\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\int_0^x H(t)u(t)dt\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \qquad (8)$$

Из неравенства (8) непосредственно получаем

$$\left(\int_0^t H(s)u(s)ds\right)^{-1/\alpha} H(t)u(t) \le H(t) \qquad \text{для любого} \quad t > 0.$$

Интегрируя обе части последнего неравенства в пределах от 0 до x, имеем

$$\left(\int_0^x H(s)u(s)ds\right)^{(\alpha-1)/\alpha} \le \frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x H(t)\,dt$$

или, что то же самое,

$$\left(\int_0^x H(t)u(t)dt\right)^{1/\alpha} \le \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x H(t)\,dt\right)^{1/(\alpha-1)}$$

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x [2h(2t) - h(t) + k(t)]\,dt\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Используя эту оценку, из (8) непосредственно получаем второе доказываемое неравенство из (6).

Лемма 1 полностью доказана.

Отметим, что при $h(x) = C_1 \ge 0$ и $k(x) = C_2 > 0$ неравенства в (6) обращаются в равенства и дают решение уравнения (1), что свидетельствует о точности полученных в лемме 1 априорных оценок решения интегрального уравнения (1).

Заметим также, что неравенство Чебышева (5) справедливо как в случае неубывающих, так и в случае невозрастающих на полуоси $[0,\infty)$ функций $a(x)$ и $b(x)$, причем требование неотрицательности этих функций излишне в обоих случаях (подробнее, см. [1]).

Теорема существования и единственности решения. Из леммы 1 вытекает, что решения уравнения (1) естественно разыскивать в классе

$$P = \{u(x)\colon\ u(x) \in C[0,\infty) \ \text{ и } \ F(x) \le u(x) \le G(x) \ \text{ для любого } \ x \in [0,\infty)\},$$

где

$$F(x) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x [h(2t) + k(0)]\, dt \right)^{1/(\alpha-1)},$$

$$G(x) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x [2h(2t) - h(t) + k(t)]\, dt \right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Запишем уравнение (1) в операторном виде: $u = Tu$, где

$$(Tu)(x) = \left(\int_0^x [h(x+t) + k(x-t)]u(t)dt \right)^{1/\alpha}.$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (2) и (3). Тогда класс P инвариантен относительно оператора T, т.е. $T: P \to P$.*

Доказательство. Пусть $u(x) \in P$, т.е. $u(x) \in C[0, \infty)$ и $F(x) \le u(x) \le G(x)$. Нужно доказать, что тогда $(Tu)(x) \in C[0, \infty)$ и $F(x) \le (Tu)(x) \le G(x)$, т.е. $(Tu)(x) \in P$.

1). То, что $(Tu)(x) \in C[0, \infty)$ вытекает из монотонности функций $h(x)$, $k(x)$ и непрерывности функции $u(x)$ (см., например, [12, с. 288] и [1, с. 120]).

2). Докажем, что $(Tu)(x) \ge F(x)$. Так как $u(x) \ge F(x)$, то

$$[(Tu)(x)]^\alpha = \int_0^x [h(x+t) + k(x-t)]u(t)dt \ge \int_0^x [h(2t) + k(0)]F(t)dt =$$

$$= \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \int_0^x [h(2t) + k(0)] \left(\int_0^t [h(2s) + k(0)]\, ds \right)^{1/(\alpha-1)} dt =$$

$$= \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \int_0^x \left(\int_0^t [h(2s) + k(0)]\, ds \right)^{1/(\alpha-1)} d\left(\int_0^t [h(2s) + k(0)]ds \right) =$$

$$= \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \frac{\alpha - 1}{\alpha} \left(\int_0^t [h(2s) + k(0)]ds \right)^{\alpha/(\alpha-1)} \Bigg|_0^x =$$

$$= \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^{\alpha/(\alpha-1)} \left(\int_0^x [h(2s) + k(0)]ds\right)^{\alpha/(\alpha-1)} \equiv [F(x)]^\alpha,$$

т.е. $(Tu)(x) \geq F(x)$.

Докажем, наконец, что $(Tu)(x) \leq G(x)$. Так как $u(x) \leq G(x)$, то используя интегральные неравенства (4) и (5), имеем

$$[(Tu)(x)]^\alpha = \int_0^x h(x+t)u(t)dt + \int_0^x k(x-t)u(t)dt \leq$$

$$\leq \int_0^x h(x+t)G(t)dt + \int_0^x k(x-t)G(t)dt \leq \int_0^x [2h(2t) - h(t)]G(t)dt$$

$$+ \int_0^x k(t)G(t)dt =$$

$$= \int_0^x [2h(2t) - h(t) + k(t)] \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^t [2h(2s) - h(s) + k(s)]\, ds\right)^{1/(\alpha-1)} dt =$$

$$= \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \int_0^x \left(\int_0^t [2h(2s) - h(s) + k(s)]\, ds\right)^{1/(\alpha-1)} \times$$

$$\times d\left(\int_0^t [2h(2s) - h(s) + k(s)]\, ds\right) =$$

$$= \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \frac{\alpha - 1}{\alpha} \left(\int_0^t [2h(2s) - h(s) + k(s)]ds\right)^{\alpha/(\alpha-1)} \Bigg|_0^x = [G(x)]^\alpha,$$

т.е. $(Tu)(x) \leq G(x)$.

Лемма 2 полностью доказана.

Рассмотрим теперь класс

$P_b = \{u(x)\colon\ u(x) \in C[0, b]$ и $F(x) \leq u(x) \leq G(x)$ для любого $x \in [0, b]\}$,

где $b > 0$ есть любое число, и определим в нем расстояние следующим образом

$$\rho(u,v) = \sup_{0<x\le b} \frac{|u(x)-v(x)|}{G(x)}.$$

Лемма 3. *Пара* (P_b, ρ) *образует полное метрическое пространство.*

Лемма 3 доказывается аналогично лемме 4 из [12].

Из леммы 2 непосредственно вытекает, что оператор T действует из P_b в P_b. Докажем, что при следующем дополнительном предположении

$$q = \sup_{0<x<\infty} \frac{\int_0^x [2h(2t) - h(t) + k(t)]dt}{\alpha \cdot \int_0^x [h(2t) + k(0)]dt} < 1\,, \tag{9}$$

оператор T является сжимающим в метрическом пространстве P_b.

Воспользуемся теоремой Лагранжа (формулой конечных приращений), согласно которой при любых $z_1 > 0$ и $z_2 > 0$ справедливо равенство

$$z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha}\theta^{(1-\alpha)/\alpha}(z_1 - z_2),$$

где $\theta > 0$ некоторое число, лежащее между z_1 и z_2. Из этого равенства следует, что если $z_1 \ge z_0$ и $z_2 \ge z_0$, где $z_0 > 0$, то $\theta > z_0$ и, значит, справедливо неравенство

$$\left|z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha}\right| \le \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{|z_1 - z_2|}{z_0^{(\alpha-1)/\alpha}}\,. \tag{10}$$

Пусть $u, v \in P_b$ и $x \in (0, b]$. Тогда, в силу неравенства (10), в котором роль z_0 играет $F^\alpha(x)$, с учетом неравенства (4), последовательно получаем

$$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| \le \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\int_0^x [h(x+t) + k(x-t)] \cdot |u(t) - v(t)|dt}{\frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot \int_0^x [h(2t) + k(0)]dt} \le$$

$$\le \frac{\rho(u,v)}{(\alpha-1)\int_0^x [h(2t) + k(0)]dt} \int_0^x [h(x+t) + k(x-t)] \cdot G(t)dt \le$$

$$\le \frac{\rho(u,v)}{(\alpha-1)\int_0^x [h(2t) + k(0)]dt} \int_0^x [2h(2t) - h(t) + k(t)] \cdot G(t)dt \le$$

$$\le \frac{\rho(u,v)}{(\alpha-1)\int_0^x [h(2t) + k(0)]dt} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \times$$

$$\times \int_0^x [2h(2t) - h(t) + k(t)] \left(\int_0^t [2h(2s) - h(s) + k(s)]\, ds \right)^{1/(\alpha-1)} dt =$$

$$= \frac{\rho(u,v)}{(\alpha-1)\int_0^x [h(2t) + k(0)]dt} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)} \times$$

$$\times \frac{\alpha-1}{\alpha} \left(\int_0^x [2h(2s) - h(s) + k(s)]\, ds \right)^{\alpha/(\alpha-1)} =$$

$$= \frac{\rho(u,v)}{(\alpha-1)\int_0^x [h(2t) + k(0)]dt} G^{\alpha}(x).$$

Следовательно,

$$\frac{|(Tu)(x) - (Tv)(x)|}{G(x)} \leq \frac{\rho(u,v)}{(\alpha-1)\int_0^x [h(2t) + k(0)]dt} G^{\alpha-1}(x) =$$

$$= \frac{\rho(u,v)}{(\alpha-1)\int_0^x [h(2t) + k(0)]dt} \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x [2h(2t) - h(t) + k(t)]\, dt\,,$$

откуда

$$\rho(Tu, Tv) \leq q \cdot \rho(u,v), \tag{11}$$

где положительное число $q < 1$ определено равенством (9). Следовательно, оператор T является сжимающим – что и требовалось доказать.

Полученные результаты позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 1$ и выполнены условия (2), (3) и (9). Тогда интегральное уравнение (1) имеет в конусе Q_0 (и в P_b при любом $b > 0$) единственное решение $u^*(x)$. Это решение можно найти в пространстве P_b методом последовательных приближений пикаровского типа по формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, со сходимостью по метрике ρ. При этом справедлива оценка скорости сходимости:*

$$\rho(u_n, u^*) \leq \frac{q^n}{1-q} \rho(Tu_0, u_0), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

где число $q < 1$ определено в условии (9), а $u_0(x) \in P_b$ есть начальное приближение (произвольная функция).

Доказательство. Запишем уравнение (1) в операторном виде: $u = Tu$. Из леммы 3 и оценки (11) вытекает, что для уравнения (1) выполнены все требования принципа сжимающих отображений. Следовательно, уравнение (1) имеет единственное решение $u^*(x) \in P_b$ и это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, для которых справедлива оценка скорости сходимости (12).

Утверждение теоремы о единственности этого решения в конусе Q_0 доказывается точно так же как и в теореме 3 [13].

Замечание 1. *В линейном случае (при* $\alpha = 1$*) как и в случае* $0 < \alpha < 1$ *, интегральное уравнение (1) имеет в конусе* Q *лишь тривиальное решение* $u(x) \equiv 0$. *Из теоремы 1 следует, что при* $\alpha > 1$ *уравнение (1) может иметь также и нетривиальное решение.*

Например, если $h(x) = C_1 \geq 0$ *и* $k(x) = C_2 > 0$*, то кроме тривиального решения уравнение (1) имеет в конусе* Q *и нетривиальное решение:*

$$u(x) = C \cdot x^{1/(\alpha-1)}, \quad \text{где} \quad C = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}[C_1 + C_2]\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

В случае $\alpha = 2$, $h(x) = k(x) = e^x$ *уравнение (1) имеет в конусе* Q *кроме тривиального решения и нетривиальное решение:*

$$u(x) = \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{2}{3}e^{x/2} - 1.$$

В этом состоит принципиальное отличие нелинейных интегральных уравнений вольтерровского типа от соответствующих линейных однородных уравнений, которые могут иметь лишь тривиальное решение.

В силу равенств (см. [10, Лемма 2] и [1, с. 120], соответственно)

$$\int_0^x h(x+t)dt = \int_0^x [2h(2t) - h(t)]dt \quad \text{и} \quad \int_0^x k(x-t)dt = \int_0^x k(t)dt$$

функцию $G(x)$, являющуюся оценкой сверху решения уравнения (1), можно записать в виде:

$$G(x) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x [h(x+t) + k(x-t)]\, dt \right)^{1/(\alpha-1)} .$$

Следовательно, по лемме 1, любое решение уравнения (1) в конусе Q_0 (если оно существует) удовлетворяет неравенствам:

$$\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x [h(2t) + k(0)]\, dt \right)^{1/(\alpha-1)} \le u(x) \le$$

$$\le \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x [h(x+t) + k(x-t)]\, dt \right)^{1/(\alpha-1)} .$$

В связи с условием (9) заметим, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x [2h(2t) - h(t) + k(t)]dt}{\alpha \cdot \int_0^x [h(2t) + k(0)]dt} = \lim_{x\to 0} \frac{2h(2x) - h(x) + k(x)}{\alpha \cdot [h(2x) + k(0)]} = \frac{1}{\alpha} < 1 .$$

Значение этого предела подтверждает корректность условия (9). Более того, в случае ядер $h(x) = C_1 \ge 0$ и $k(x) = C_2 > 0$, удовлетворяющих, очевидно, основным условиям (2) и (3), дополнительное условие (9) также выполняется и при этом значение $q = 1/\alpha$.

В приведенном выше случае $\alpha = 2$ и ядер $h(x) = k(x) = e^x$ (см. замечании 1) условие (9) принимает вид:

$$q = \sup_{0<x\le b} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} - 1 + 2x} < 1$$

и, очевидно, тоже выполняется.

В заключение отметим, что следуя работам [10] и [13] теорему 1 можно обобщить на случай уравнения вида (1) с неоднородностью в правой части, а в случае показателя α специального вида такое уравнение можно исследовать в пространстве Лебега $L_{1+\alpha}(0,\infty)$ методом монотонных по Браудеру-Минти операторов (см., например, [14], [15]).

Основные результаты данного параграфа были доложены на конференциях и опубликованы в работах [16]-[20].

ЛИТЕРАТУРА

1. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки. – М.: Физматлит, 2009. – 304 с.
2. Brunner H. Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications. – Cambridge: Univ. Press, 2017. – 387 p.
3. Keller J.J. Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction // Z. Angew. Math. Phys. 1981. Vol. 32, №2. P. 170-181.
4. Schneider W.R. The general solution of a nonlinear integral equation of the convolution type // Z. Angew. Math. Phys. 1982. Vol. 33, №1. P. 140-142.
5. Okrasinski W. Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math. 1989. Vol. 4, №2. P. 51-74.
6. Какичев В.А., Рогожин В.С. Об одном обобщении уравнения Чандрасекхара // Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 2, №9. С. 1264-1270.
7. Измаилов А.Ф. 2-регулярность и теоремы о разветвлении // Итоги науки и техники. Сер. Совр. математика и ее прил. Темат. обз. 1999. Т. 65. С. 90-117.
8. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
9. Антипов В.Г. Особое интегральное уравнение с суммарным ядром // Известия вузов. Математика. 1959, №6. С. 9-13.
10. Асхабов С.Н. Об одном интегральном уравнении с суммарным ядром и неоднородностью в линейной части // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, №9. С. 1210-1219.
11. Садовничий В.А., Григорьян А.А., Конягин С.В. Задачи студенческих математических олимпиад. – М.: МГУ, 1987. – 310 с.
12. Лузин Н.Н. Интеграл и тригонометрический ряд. – М: ГИТТЛ, 1951. – 552 с.
13. Асхабов С.Н. Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, №6. С. 786-795.

14. Асхабов С.Н., Карапетянц Н.К., Якубов А.Я. Интегральные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью и их системы // Доклады Академии наук СССР. 1990. Т. 311, №5. С. 1035-1039.
15. Асхабов С.Н., Мухтаров Х.Ш. Об одном классе нелинейных интегральных уравнений типа свертки // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, №3. С. 512-514.
16. Асхабов С.Н. Интегральное уравнение с суммарным ядром и неоднородностью в линейной части // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. трудов Международной научной конференции, Воронеж, 7-9 декабря 2020 г. — Воронеж, 2021. С. 31-34.
17. Асхабов С.Н. Интегральное уравнение с суммарным ядром и степен-ной нелинейностью // «Современные методы теории краевых задач». Материалы Междун. конференции «Воронежская весенняя матем. школа, Понтрягинские чтения XXXII», посв. памяти А.Д. Баева. Воронеж, 3 мая - 9 мая 2021 г. Воронеж: изд. дом ВГУ, 2021. С. 17-19.
18. Асхабов С.Н. Интегральное уравнение с суммарным ядром и неоднородностью в линейной части // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, №9. С. 1210-1219.
19. Асхабов С.Н. Интегральное уравнение с суммарно-разностным ядром и степенной нелинейностью // Уравнения в частных производных и смежные проблемы (PDERT’22): сборник матер. Междун. конф. (Белгород, 15–19 июля 2022 г.). Белгород: ИД «БелГУ» НИУ «БелГУ», 2022. С. 20–21.
20. Асхабов С.Н. Интегральное уравнение вольтерровского типа с суммарно-разностным ядром и степенной нелинейностью // Вестник АН ЧР. 2022, №3(58). С. 5-13.

§3. Неоднородное интегро-дифференциальное уравнение с суммарно-разностным ядром и степенной нелинейностью

В данной параграфе изучается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение с суммарно-разностным ядром и неоднородностью в линейной части

$$u^{\alpha}(x)=\int_{0}^{x}H(x+t)u(t)dt+\int_{0}^{x}K(x-t)u'(t)dt+f(x)\,,\quad \alpha>1,\qquad(1)$$

где заданные функции $H(x)$, $K(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют следующим основным условиям:

$$H\in C^{1}[0,\infty),\ \ H(x)\text{ не убывает на полуоси }[0,\infty)\ \text{ и }\ H(0)\geq 0,\qquad(2)$$

$$K\in C^{1}[0,\infty),\ \ K'(x)\text{ не убывает на }[0,\infty),\ \ K(0)=0\ \text{ и }\ K'(0)>0,\qquad(3)$$

$$f\in C^{1}[0,\infty),\ \ f(x)\text{ не убывает на полуоси }[0,\infty)\ \text{ и }\ f(0)=0.\qquad(4)$$

Решения интегро-дифференциального уравнения (1) разыскиваются в классе

$$Q_{0}^{1}=\{u(x)\colon\ u\in C[0,\infty)\cap C^{1}(0,\infty),\ \ u(0)=0\ \text{ и }\ u(x)>0\ \text{ при }\ x>0\}.$$

Наряду с уравнением (1) рассматривается, тесно связанное с ним, интегральное уравнение

$$u^{\alpha}(x)=\int_{0}^{x}[H(x+t)+K'(x-t)]u(t)dt+f(x),\quad \alpha>1.\qquad(5)$$

Уравнение вида (5) в частном случае, при $f(x)\equiv 0$, подробно изучено в [10]. Такие уравнения возникают в теории инфильтрации жидкости из цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду [1], при описании процесса распространения ударных волн в трубах, наполненных газом [5], [6], в теории лучистого равновесия и переноса тепла излучением [7], [8], в моделях популяционной генетики и других (подробнее см. в [3], [4], [9]). В частности, к уравнению вида (5) при $\alpha=2$ сводится известное (в теории инфильтрации жидкости) уравнение Буссинеска $(hh_r)_r+\frac{1}{r}\,hh_r=h_t$, где функция $h=h(r,t)$ означает свободную поверхность увлажненной области, описывающее процесс просачивания жидкости в радиальном случае [11].

Важно отметить, что, в связи с указанными и другими приложениями, особый интерес представляют непрерывные положительные при $x > 0$ решения интегрального уравнения (5), т.е. решения принадлежащие классу

$$Q_0 = \{u(x):\ u(x) \in C[0,\infty),\ \ u(0) = 0\ \text{ и }\ u(x) > 0\ \text{ при }\ x > 0\}.$$

В данной работе на основе полученных точных нижней и верхней априорных оценок решения уравнения (5) мы строим весовое полное метрическое пространство P_b и, применяя метод весовых метрик, доказываем глобальную теорему о существовании и единственности решения уравнения (5) как в пространстве P_b, так и во всем классе Q_0. Устанавливаем, что решение уравнения (5) можно найти в пространстве P_b методом последовательных приближений пикаровского типа. Для последовательных приближений получаем оценку скорости их сходимости к точному решению в терминах весовой метрики пространства P_b. Поскольку при условиях (2)-(4), как доказано в данной статье, любое решение интегрального уравнения (5) из конуса Q_0 является решением интегро-дифференциального уравнения (1) в конусе Q_0^1 и, обратно, любое решение интегро-дифференциального уравнения (1) является решением интегрального уравнения (5), то полученные результаты позволили сформулировать и доказать глобальную теорему о существовании, единственности и способе нахождения решения интегро-дифференциального уравнения (1) как в пространстве P_b, так и во всем классе непрерывно-дифференцируемых положительных при $x > 0$ функций. В конце работы приведен простой пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Свойства неотрицательных решений. Выясним сначала какими свойствами должны обладать решения интегрального уравнения (5), если они существуют.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (2)-(4). Если* $u \in Q_0$ *является решением уравнения (5), то* $u(x)$ *не убывает на* $[0,\infty)$ *и непрерывно дифференцируема на* $(0,\infty)$*, т.е.* $u \in C^1(0,\infty)$.

Доказательство. Пусть $u \in Q_0$ является решением уравнения (5) и $x_1, x_2 \in [0,\infty)$ любые числа такие, что $x_2 > x_1$. Так как функции $H(x)$, $K'(x)$ и $f(x)$ не убывают на $[0,\infty)$, то

$$u^\alpha(x_2) - u^\alpha(x_1) =$$

$$= \int_0^{x_1} [H(x_2+t) + K'(x_2-t) - H(x_1+t) - K'(x_1-t)]u(t)dt +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} [H(x_2+t) + K'(x_2-t)]\, u(t)dt + f(x_2) - f(x_1) \geq 0.$$

Значит, $u(x_2) \geq u(x_1)$ при $x_2 > x_1$, т.е. решение $u(x)$ не убывает на $[0,\infty)$.

Докажем, наконец, что решение $u(x)$ уравнения (5) непрерывно дифференцируемо на $(0,\infty)$, т.е. $u \in C^1(0,\infty)$. Так как по условию (3) производная $K'(x)$ не убывает на $[0,\infty)$, то по теореме Лебега почти всюду на $[0,\infty)$ существует вторая производная $K''(x)$ которая локально суммируема. Следовательно, правая часть тождества (5) дифференцируема и в силу известной формулы производной интеграла зависящего от параметра в случае когда и пределы интеграла зависят от параметра, имеем

$$\left(\int_0^x [H(x+t) + K'(x-t)]u(t)dt + f(x)\right)' =$$

$$= \int_0^x H'(x+t)u(t)dt + H(2x)u(x) +$$

$$+ \int_0^x K''(x-t)u(t)dt + K'(0)u(x) + f'(x) = \int_0^x H'(x+t)u(t)dt +$$

$$+ \int_0^x K''(t)u(x-t)dt + [H(2x) + K'(0)]u(x) + f'(x). \qquad (6)$$

Так как $u(x)$ не убывает, а $K''(x)$ локально суммируема, то по лемме 1 [12] свертка

$$\int_0^x K''(t)u(x-t)dt = \int_0^x K''(x-t)u(t)dt$$

непрерывна на $[0,\infty)$.

Таким образом, производная правой части тождества (5), в силу равенства (6), существует и непрерывна на всей полуоси $[0,\infty)$. Но тогда существует и непрерывна производная левой части тождества (5), причем для любого $x > 0$ справедливо равенство:

$$u'(x) = \frac{1}{\alpha} u^{1-\alpha}(x) \times$$

$$\times \left(\int_0^x [H'(x+t) + K''(x-t)]u(t)dt + [H(2x) + K'(0)]u(x) + f'(x) \right). \quad (7)$$

Из равенства (7) вытекает, что функция $u(x)$ непрерывно дифференцируема на всей положительной полуоси $(0,\infty)$, исключая точку $x = 0$, т.к. $1 - \alpha < 0$ и $u(0) = 0$.

Следующая лемма устанавливает связь между интегро-дифференциальным уравнением (1) и интегральным уравнением (5).

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (2)-(4). Если $u \in Q_0^1$ и является решением интегро-дифференциального уравнения (1), то $u \in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (5), Обратно, если уравнение (5) имеет решение $u \in Q_0$, то $u \in Q_0^1$ и является решением уравнения (1).*

Доказательство. Докажем сначала первую часть леммы. Пусть $u \in Q_0^1$ и является решением уравнения (1). Так как $Q_0^1 \subset Q_0$, то $u \in Q_0$. Интегрируя по частям и используя равенства $K(0) = 0$, $u(0) = 0$, из тождества (1) получаем

$$u^\alpha(x) = \int_0^x H(x+t)u(t)dt + \int_0^x K(x-t)du(t) + f(x) =$$

$$= \int_0^x H(x+t)u(t)dt + \int_0^x K'(x-t)u(t)dt + f(x),$$

т.е. $u(x)$ является решением интегрального уравнения (5).

Обратно, пусть $u \in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (5). Тогда, согласно лемме 1, $u \in C^1(0,\infty)$ и, значит, $u \in Q_0^1$. Используя дважды свойство коммутативности свертки, формулу интегрирования по частям и равенства $K(0) = 0, u(0) = 0$, из тождества (5) имеем

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x H(x+t)u(t)dt + \int_0^x K'(t)u(x-t)dt + f(x) =$$

$$= \int_0^x H(x+t)u(t)dt + \int_0^x K(t)u'(x-t)dt + f(x) =$$

$$= \int_0^x H(x+t)u(t)dt + \int_0^x K(x-t)u'(t)dt + f(x),$$

т.е. $u(x)$ является решением интегро-дифференциального уравнения (1).

Из леммы 2 вытекает, что для доказательства существования и единственности в классе Q_0^1 решения интегро-дифференциального уравнения (1) достаточно доказать существование и единственность в классе Q_0 решения интегрального уравнения (5).

Далее нам понадобятся следующие два неравенства

$$\int_0^x a(x+t)b(t)dt \leq \int_0^x [2a(2t) - a(t)]b(t)dt, \quad x > 0, \tag{8}$$

$$\int_0^x a(x-t)b(t)dt \leq \int_0^x a(t)b(t)dt, \quad x > 0, \tag{9}$$

справедливые для любых неотрицательных неубывающих на полуоси $[0,\infty)$ функций $a(x)$ и $b(x)$.

Неравенство (8) подробно доказано в [9, Лемма 1], а неравенство (9) известно как интегральное неравенство Чебышева (см., например, [2, с. 17]).

Далее важную роль будут играть двусторонние априорные оценки решения уравнения (5), содержащиеся в следующей лемме.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия (2)-(4). Если* $u \in Q_0$ *и является решением интегрального уравнения (5), то для любого* $x \in [0,\infty)$ *выполняются неравенства:*

$$L(x) \equiv \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x [H(2t)+K'(0)]\,dt\right)^{1/(\alpha-1)} \le u(x) \le$$

$$\le \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x [2H(2t)-H(t)+K'(t)]\,dt + f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \equiv R(x). \quad (10)$$

Доказательство. Пусть $u \in Q_0$ и является решением уравнения (5). Докажем сначала первое неравенство из (10). Используя условия (2)-(4), из тождества (5) получаем

$$u^\alpha(x) \ge \int_0^x [H(2t)+K'(0)]u(t)dt + f(x) \ge \int_0^x [H(2t)+K'(0)]u(t)dt$$

или

$$u(x) \ge \left(\int_0^x [H(2t)+K'(0)]u(t)dt\right)^{1/\alpha} \quad \text{для любого } x>0 \quad (11)$$

или, что то же самое,

$$u(t) \ge \left(\int_0^t [H(2s)+K'(0)]u(s)ds\right)^{1/\alpha} \quad \text{для любого } t>0,$$

откуда

$$\left(\int_0^t [H(2s)+K'(0)]u(s)ds\right)^{-1/\alpha} [H(2t)+K'(0)]u(t) \ge H(2t)+K'(0).$$

Интегрируя обе части последнего неравенства в пределах от 0 до x, имеем

$$\left(\int_0^x [H(2s)+K'(0)]u(s)ds\right)^{(\alpha-1)/\alpha} \ge \frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x [H(2t)+K'(0)]\,dt$$

или

$$\left(\int_0^x [H(2t)+K'(0)]u(t)dt\right)^{1/\alpha} \geq \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x \left[H(2t)+K'^{(0)}\right]dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \equiv L(x).$$

Используя эту оценку, из (11) непосредственно получаем первое неравенство из (10).

Докажем, наконец, второе неравенство из (10). Используя неравенства (8) и (9), имеем

$$u^\alpha(x) = \int_0^x H(x+t)u(t)dt + \int_0^x K'(x-t)u(t)dt + f(x) \leq$$

$$\leq \int_0^x [2H(2t)-H(t)]u(t)dt + \int_0^x K'(t)u(t)dt + f(x) =$$

$$= \int_0^x [2H(2t)-H(t)+K'(t)]u(t)dt + f(x),$$

откуда, обозначив, $A(t) = 2H(2t) - H(t) + K'(t)$, имеем

$$u(x) \leq \left(\int_0^x A(t)u(t)dt + f(x)\right)^{1/\alpha} \quad \text{для любого} \quad x > 0 \tag{12}$$

или

$$A(t)u(t) + f'(t) \leq A(t)\left(\int_0^t A(s)u(s)ds + f(t)\right)^{1/\alpha} + f'(t) \quad \forall t > 0,$$

откуда

$$\left(\int_0^t A(s)u(s)ds + f(t)\right)^{-1/\alpha} (A(t)u(t) + f'(t)) \leq$$

$$\leq A(t) + f'(t)\left(\int_0^t A(s)u(s)ds + f(t)\right)^{-1/\alpha} = A(t) + I(t) \quad \forall t > 0, \tag{13}$$

где

$$I(t) \equiv f'(t)\left(\int_0^t A(s)u(s)ds + f(t)\right)^{-1/\alpha}.$$

Докажем, что

$$\int_0^x I(t)dt \le \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x) \quad \text{для любого} \quad x > 0. \qquad (14)$$

В силу условия (4) возможны только три случая: 1) $f(x) \equiv 0$ при $x \in [0,\infty)$; 2) существует число $x_0 > 0$ такое, что $f(x) = 0$ при $x \in [0, x_0]$ и $f(x) > 0$ при $x > x_0$; 3) $f(x) > 0$ при всех $x > 0$.

1). Если $f(x) \equiv 0$ при $x \in [0,\infty)$, то неравенство (14) очевидно и обращается в тождество, так как при $x > 0$ выполняются соотношения $A(x) > 0$, $u(x) > 0$ и $f'(x) \equiv 0$.

2). Если существует число $x_0 > 0$ такое, что $f(x) = 0$ при $x \in [0, x_0]$ и $f(x) > 0$ при $x > x_0$, то

$$\int_0^x I(t)dt = 0 \quad \text{при любом} \quad x \in [0, x_0]$$

и, значит, неравенство (14) выполняется при $x \in [0, x_0]$, обращаясь в тождество, а при $x > x_0$ с учетом того, что $f(x_0) = f(0) = 0$ и что $f \in C^1[0,\infty)$, имеем

$$\int_0^x I(t)dt = \int_{x_0}^x I(t)dt \le \int_{x_0}^x f'(t) f^{-\frac{1}{\alpha}}(t)dt = \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x),$$

т.е. неравенство (14) выполняется и при любом $x > x_0$.

3). Если $f(x) > 0$ при всех $x > 0$, то аналогично получаем

$$\int_0^x I(t)dt \le \int_0^x f'(t) f^{-\frac{1}{\alpha}}(t)dt = \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x).$$

Итак, неравенство (14) доказано во всех трёх случаях.

Интегрируя неравенство (13) в пределах от 0 до x, с учётом неравенства (14), имеем

$$\left(\int_0^x A(s)u(s)ds + f(x)\right)^{(\alpha-1)/\alpha} \leq$$

$$\frac{\alpha-1}{\alpha}\left(\int_0^x A(t)\,dt + \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x)\right) \text{ для любого } \; x > 0,$$

откуда

$$\left(\int_0^x A(t)u(t)dt + f(x)\right)^{1/\alpha} \leq \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x A(t)\,dt + f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \quad (15)$$

Таким образом, второе неравенство из (10) есть непосредственное следствие неравенств (12) и (15).

Лемма 3 полностью доказана.

Заметим, что при $H(x) = C_1 \geq 0$, $K(x) = C_2 x$, $C_2 > 0$, и $f(x) \equiv 0$ априорные оценки совпадают $L(x) = R(x) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}[C_1 + C_2]x\right)^{1/(\alpha-1)}$ и являются решением уравнения (5), что свидетельствует о точности этих оценок в определенном смысле.

Глобальные теоремы существования и единственности решения. Докажем глобальные теоремы о существовании, единственности и способах нахождения решений уравнений (1) и (5). Для этого запишем уравнение (5) в операторном виде: $u = Tu$, где

$$(Tu)(x) = \left(\int_0^x [H(x+t) + K'(x-t)]u(t)dt + f(x)\right)^{1/\alpha}.$$

Из леммы 3 следует, что решения уравнения (5) естественно разыскивать в классе

$$P = \{u(x)\colon \; u \in C[0,\infty) \;\text{ и }\; L(x) \leq u(x) \leq R(x) \;\text{ для любого }\; x \in [0,\infty)\}.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (2)-(4). Тогда класс P инвариантен относительно оператора T, т.е. $T\colon P \to P$.*

Доказательство. Пусть $u \in P$, т.е. $u \in C[0,\infty)$ и $L(x) \leq u(x) \leq R(x)$. Нужно доказать, что тогда $Tu \in C[0,\infty)$ и $L(x) \leq (Tu)(x) \leq R(x)$, т.е. $Tu \in P$.

То, что $Tu \in C[0,\infty)$ вытекает из монотонности функций $H(x)$, $K'(x)$ и непрерывности функций $u(x)$, $f(x)$ (см., напр., [13, с. 288] и [12, лемма 1]).

Докажем теперь, что $(Tu)(x) \geq L(x)$. Так как $u(x) \geq L(x)$ и $f(x) \geq 0$, то

$$[(Tu)(x)]^\alpha = \int_0^x [H(x+t) + K'(x-t)]u(t)dt + f(x) \geq \int_0^x [H(2t) + K'(0)]L(t)dt =$$

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \int_0^x [H(2t) + K'(0)] \left(\int_0^t [H(2s) + K'(0)]\, ds\right)^{1/(\alpha-1)} dt =$$

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \int_0^x \left(\int_0^t [H(2s) + K'(0)]\, ds\right)^{1/(\alpha-1)} d\left(\int_0^t [H(2s) + K'(0)] ds\right) =$$

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \frac{\alpha-1}{\alpha} \left(\int_0^t [H(2s) + K'(0)] ds\right)^{\alpha/(\alpha-1)} \Bigg|_0^x =$$

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\alpha/(\alpha-1)} \left(\int_0^x [H(2s) + K'(0)] ds\right)^{\alpha/(\alpha-1)} \equiv [L(x)]^\alpha,$$

т.е. $(Tu)(x) \geq L(x)$.

Докажем, наконец, что $(Tu)(x) \leq R(x)$. Так как $u(x) \leq R(x)$ и функции $H(x)$, $K'(x)$ не убывают на $[0,\infty)$, то используя интегральные неравенства (8) и (9), имеем

$$[(Tu)(x)]^\alpha = \int_0^x H(x+t)u(t)dt + \int_0^x K'(x-t)u(t)dt + f(x) \leq$$

$$\leq \int_0^x H(x+t)R(t)dt + \int_0^x K'(x-t)R(t)dt + f(x) \leq$$

$$\leq \int_0^x [2H(2t) - H(t)]R(t)dt + \int_0^x K'(t)R(t)dt + \int_0^x f'(t)dt =$$

$$= \int_0^x R(t)\left(2H(2t) - H(t) + K'(t) + \frac{f'(t)}{R(t)}\right)dt \leq$$

$$\leq \int_0^x R(t)\left(2H(2t) - H(t) + K'(t) + f^{-\frac{1}{\alpha}}(t)f'(t)\right)dt =$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha - 1}\int_0^x \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\int_0^t [2H(2s) - H(s) + K'(s)]\,ds + f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(t)\right)^{1/(\alpha-1)} \times$$

$$\times\, d\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\int_0^t [2H(2s) - H(s) + K'(s)]\,ds + f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(t)\right) =$$

$$= \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\int_0^x [2H(2s) - H(s) + K'(s)]ds + f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(t)\right)^{\alpha/(\alpha-1)} = [R(x)]^{\alpha},$$

т.е. $(Tu)(x) \leq R(x)$.

Теорема 1 доказана.

Исследование интегрального уравнения (5) будет основано на методе весовых метрик и для его применения нам нужно будет построить полное метрическое пространство. Введем в связи с этим следующий класс функций:

$$P_b = \{u(x)\colon\ u(x) \in C[0, b] \text{ и } L(x) \leq u(x) \leq R(x) \text{ для любого } x \in [0, b]\},$$

где $b > 0$ есть любое число.

В силу вольтерровости оператора T из теоремы 1 непосредственно вытекает следующее

Следствие 1. *Пусть выполнены условия (2)-(4). Тогда класс P_b инвариантен относительно интегрального оператора T.*

Далее будем предполагать, что наряду с основными условиями (2)-(4) выполняется дополнительное условие:

$$q = \sup_{0<x<\infty} \frac{\frac{\alpha - 1}{\alpha}\int_0^x [2H(2t) - H(t) + K'(t)]dt + f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x)}{(\alpha - 1)\int_0^x [H(2t) + K'(0)]dt} < 1\,. \qquad (16)$$

Выполнимость условия (16) может быть достигнута за счет того, что коэффициент перед интегралом в числителе меньше коэффициента перед интегралом в знаменателе. Далее будет приведен соответствующий пример.

Введем в классе P_b расстояние по формуле

$$\rho_b(u, v) = \sup_{0<x\leq b} \frac{|u(x) - v(x)|}{R(x)}\,. \qquad (17)$$

Обратим внимание на то, что в случае уравнений вида (5) с разностным ядром при построении метрики в качестве весовой функции целесообразно использовать, в отличие от (17), нижнюю априорную оценку решения этого уравнения (см., например, [1], [2], [3]). Случай суммарного (и суммарно-разностного) ядра вызывает дополнительные трудности при исследовании уравнений вида (5), связанные, в частности, с тем, что вольтерровский интегральный оператор с таким ядром не обладает свойством коммутативности.

Лемма 4. *Пара (P_b, ρ_b) образует полное метрическое пространство.*

Лемма 4 доказывается аналогично теореме 2.5 из [3] и при этом важную роль играет условие $f(0) = 0$, в силу которого справедливы равенства $L(0) = R(0) = 0$, необходимые для того, чтобы любая фундаментальная последовательность из P_b являлась фундаментальной последовательностью в полном метрическом пространстве $C[0, b]$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (2)-(4) и (16). Тогда оператор T действует из P_b в P_b и является сжимающим, при этом для любых $u, v \in P_b$ выполняется неравенство*

$$\rho_b(Tu, Tv) \leq q \cdot \rho_b(u, v), \qquad (18)$$

где число q определено в (16).

Доказательство. То, что оператор T действует из P_b *в* P_b вытекает из следствия 1. Докажем неравенство (18), т.е. что оператор T является сжимающим, так как, в силу неравенства (16), $q < 1$. Пусть $u, v \in P_b$ и $x \in (0, b]$. По теореме Лагранжа, для любых $z_1 > 0$ и $z_2 > 0$ имеем

$$z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha}\theta^{(1-\alpha)/\alpha}(z_1 - z_2),$$

где $\theta > 0$ некоторое число, лежащее между z_1 и z_2. Из этого равенства следует, что если $z_1 \geq z_0$ и $z_2 \geq z_0$, где $z_0 > 0$, то $\theta > z_0$ и, значит, справедливо неравенство

$$\left|z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha}\right| \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{|z_1 - z_2|}{z_0^{(\alpha-1)/\alpha}}. \qquad (19)$$

Используя неравенства (8), (9) и неравенство (19), в котором роль z_0 играет $L^\alpha(x)$, с учетом того, что $(Tu)(x) \geq L(x)$ и $(Tv)(x) \geq L(x)$ получаем

$$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha}\frac{\left|\int_0^x [H(x+t) + K'(x-t)]u(t)dt + f(x) - \int_0^x [H(x+t) + K'(x-t)]v(t)dt - f(x)\right|}{\frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot \int_0^x [h(2t) + k(0)]dt}$$

$$\leq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\int_0^x [H(x+t) + K'(x-t)] \cdot |u(t) - v(t)|dt}{\frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot \int_0^x [H(2t) + K'(0)]dt}$$

$$\leq \frac{\rho_b(u,v)\int_0^x [H(x+t) + K'(x-t)] \cdot R(t)dt}{(\alpha-1)\int_0^x [H(2t) + K'(0)]dt} \leq$$

$$\leq \frac{\rho_b(u,v)\int_0^x [2H(2t) - H(t) + K'(t)] \cdot R(t)dt}{(\alpha-1)\int_0^x [H(2t) + K'(0)]dt} = \frac{\rho_b(u,v)\int_0^x A(t) \cdot R(t)dt}{(\alpha-1)\int_0^x [H(2t) + K'(0)]dt} =$$

$$= \frac{\rho_b(u,v)\int_0^x A(t)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^t A(s)\,ds + f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(t)\right)^{1/(\alpha-1)} dt}{(\alpha-1)\int_0^x [H(2t) + K'(0)]dt} \leq$$

$$= \frac{\rho_b(u,v)\int_0^x \left[A(t) + f^{-\frac{1}{\alpha}}(t)f'(t)\right]\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^t A(s)\,ds + f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(t)\right)^{1/(\alpha-1)} dt}{(\alpha-1)\int_0^x [H(2t) + K'(0)]dt} =$$

$$= \frac{\rho_b(u,v)\frac{\alpha}{\alpha-1}\int_0^x \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^t A(s)\,ds + f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(t)\right)^{1/(\alpha-1)} d\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^t A(s)\,ds + f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(t)\right)}{(\alpha-1)\int_0^x [H(2t) + K'(0)]dt}$$

$$= \frac{\rho_b(u,v)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x A(s)\,ds + f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x)\right)^{\alpha/(\alpha-1)}}{(\alpha-1)\int_0^x [H(2t) + K'(0)]dt} = \frac{\rho_b(u,v)}{(\alpha-1)\int_0^x [H(2t) + K'(0)]dt}R^\alpha(x).$$

Но тогда для любого $x \in (0, b]$

$$\frac{|(Tu)(x) - (Tv)(x)|}{R(x)} \leq \frac{\rho_b(u,v)}{(\alpha-1)\int_0^x [H(2t) + K'(0)]dt} R^{\alpha-1}(x) =$$

$$= \frac{\rho_b(u,v)}{(\alpha-1)\int_0^x [H(2t) + K'(0)]dt} \times$$

$$\times \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x [2H(2t) - H(t) + K'(t)]\, dt + f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x) \right) =$$

$$= \frac{\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x [2H(2t) - H(t) + K'(t)]\, dt + f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x)}{(\alpha-1)\int_0^x [H(2t) + K'(0)]dt} \rho_b(u,v),$$

откуда непосредственно вытекает доказываемое неравенство (18).

Теорема 1 доказана.

Заметим, что если в условии (4) предположить, что $f(0) \geq 0$, то в определении класса Q_0 нужно будет положить $u(0) = f^{\frac{1}{\alpha}}(0)$ и тогда априорная оценка снизу в лемме 3 примет вид

$$\left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x [H(2t) + K'(0)]dt + f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(0) \right)^{1/(\alpha-1)} \leq u(x).$$

Теорема 1 остается справедливой и с этой оценкой, однако в случае $f(0) \geq 0$ теряет силу лемма 2, играющая ключевую роль при доказательстве основной теоремы 3 данной работы, так как интегро-дифференциальное уравнение (1) не будет эквивалентно интегральному уравнению (5). Поэтому в условии (4) предполагается, что $f(0) = 0$, а в определении класса Q_0 требуется, чтобы $u(0) = 0$.

Теорема 2. *Если выполнены условия (2), (3), (4) и (16), то интегральное уравнение (5) имеет в конусе Q_0 (и в пространстве P_b при любом $b > 0$) единственное решение $u^*(x)$. Это решение может быть найдено в пространстве P_b методом последовательных приближений по итерационной формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, которые сходятся к нему по метрике (17) при любом $b < \infty$ с оценкой погрешности*

$$\rho(u_n, u^*) \leq \frac{q^n}{1-q}\rho(Tu_0, u_0), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{20}$$

где число $q < 1$ определено в условии (16), а $u_0 \in P_b$ есть начальное приближение (произвольная функция).

Доказательство. Запишем уравнение (5) в операторном виде: $u = Tu$. Из леммы 4 и теоремы 1 следует, что выполнены все требования принципа сжимающих отображений, из которого непосредственно вытекает, что уравнение (5) имеет единственное решение $u^*(x)$ в пространстве P_b при любом $b > 0$ и это решение может быть найдено методом последовательных приближений, которые сходятся к нему по метрике (17) при любом $b < \infty$ с оценкой погрешности (20).

Осталось показать, что уравнение (5) имеет единственное решение во всем классе Q_0. Положим $P_\infty = \bigcup\limits_{b>0} P_b$, т.е. P_∞ есть множество функций, определенных на полуоси $[0, \infty)$, сужения которых на отрезок $[0, b]$ принадлежат P_b. Так как уравнение (5) имеет единственное решение в P_b при любом $b > 0$ и коэффициент сжатия в (18) не зависит от b, то уравнение (5) имеет единственное решение $u^*(x)$ в P_∞. Поскольку всякое решение уравнения (5) из Q_0 удовлетворяет оценкам (10), то это решение $u^*(x)$ будет единственным решением интегрального уравнения (5) и во всём классе Q_0.

Таким образом, на основании теоремы 2, используя связь между решениями уравнения (5) и уравнения (2), установленную в лемме 2, мы можем сформулировать **основной результат**.

Теорема 3. *Если выполнены условия (2), (3), (4) и (16), то интегро-дифференциальное уравнение (1) имеет в классе Q_0^1 (и в P_b при любом $b > 0$) единственное решение $u^*(x)$. Это решение удовлетворяет неравенствам (10) и его можно найти в полном метрическом пространстве P_b методом последовательных приближений по итерационной формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, которые сходятся к $u^*(x)$ по метрике (17) при любом $b < \infty$. При этом справедлива оценка скорости сходимости (20).*

Приведем простой пример, иллюстрирующий теоремы 2 и 3. Непосредственно проверяется, что при $\alpha = 2$, $H(x) = 1$, $K(x) = x$ и $f(x) = \frac{3}{4}x^2$ функция $u^*(x) = \frac{3}{2}x$ является решением как интегрального уравнения (5), так и интегро-дифференциального уравнения (1). При этом, очевидно, условия (2)-(4) выполняются, а условие (16) принимает вид:

$$q = \sup_{0<x<\infty} \frac{x + \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2x} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

и, значит, $q < 1$, т.е. все требования теорем 2 и 3 выполняются.

В замечании 3.1 [10] приведены примеры показывающие, что нелинейные однородные интегральные уравнения вольтерровского типа вида (5), в отличие от соответствующих линейных однородных уравнений, кроме тривиального решения могут иметь и не тривиальные решения. То же самое справедливо и относительно интегро-дифференциальных уравнений вида (1). В этом состоит принципиальное отличие нелинейных однородных уравнений от соответствующих линейных уравнений.

В заключение отметим, что для показателя α специального вида уравнение (5) можно исследовать в рефлексивном банаховом пространстве Лебега $L_{1+\alpha}(0,\infty)$ методом монотонных по Браудеру-Минти операторов (см., например, [14], [15]) и доказать глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решения без ограничений на параметры

В частном случае, при $f(x) \equiv 0$, результаты данной работы анонсированы в [16] и доложены на конференции [17].

ЛИТЕРАТУРА

1. Okrasinski W. Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math. 1989. Vol. 4, №2. P. 51-74.
2. Askhabov S.N., Betilgiriev M.A. Noblinear convolution type equations // Seminar Anal. Operat. Equat. and Numer. Anal. 1989/90. Karl-Weierstras-Institut fur Mathematik. Berlin. 1990. P. 1-30.

3. Асхабов С.Н., Бетилгириев М.А. Интегральные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью. – Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2001. – 154 с.
4. Brunner H. Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications. – Cambridge: Univ. Press, 2017. – 387 p.
5. Keller J.J. Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction // Z. Angew. Math. Phys. 1981. Vol. 32, №2. P. 170-181.
6. Schneider W.R. The general solution of a nonlinear integral equation of the convolution type // Z. Angew. Math. Phys. 1982. Vol. 33, №1. P. 140-142.
7. Какичев В.А., Рогожин В.С. Об одном обобщении уравнения Чандрасекхара // Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 2, №9. С. 1264-1270.
8. Измаилов А.Ф. 2-регулярность и теоремы о разветвлении // Итоги науки и техники. Сер. Совр. математика и ее прил. Темат. обз. 1999. Т. 65. С. 90-117.
9. Асхабов С.Н. Об одном интегральном уравнении с суммарным ядром и неоднородностью в линейной части // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, №9. С. 1210-1219.
10. Асхабов С.Н. Интегральное уравнение вольтерровского типа с суммарно-разностным ядром и степенной нелинейностью // Вестник АН ЧР. 2022, №3(58). С. 5-13.
11. Okrasinski W. Some remarks about the infiltration of water from cylindrical reservoir // Appl. Math. 1980. Vol. 16. P. 641-646.
12. Асхабов С.Н. Система интегро-дифференциальных уравнений типа свертки со степенной нелинейностью // Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т. 24, №3. С. 5-18.
13. Лузин Н.Н. Интеграл и тригонометрический ряд. – М: ГИТТЛ, 1951. – 552 с.
14. Асхабов С.Н., Карапетянц Н.К., Якубов А.Я. Интегральные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью и их системы // Докл. Акад. наук СССР. 1990. Т. 311, №5. С. 1035-1039.

15. Асхабов С.Н., Мухтаров Х.Ш. Об одном классе нелинейных интегральных уравнений типа свертки // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, №3. С. 512-514.
16. Асхабов С.Н. Интегро-дифференциальное уравнение с суммарно-разностным ядром и степенной нелинейностью // Докл. РАН. Матем., информ., процессы управления. 2022. Т. 507, №1. С. 10-14.
17. Асхабов С.Н. Об одном нелинейном интегро-дифференциальном уравнении с суммарно-разностным ядром // Материалы междун. научной конф. «Уфимская осенняя математическая школа» (г. Уфа, 28 сентября – 1 октября 2022 г.). Том 2. - Уфа: РИЦ БашГУ, 2022. С. 14-16.

§4. Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение второго порядка с разностными ядрами

В данном параграфе изучается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение второго порядка

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x h(x-t)u'(t)dt + \int_0^x k(x-t)u''(t)dt, \ \ x > 0, \ \ \alpha > 1. \tag{1}$$

Это уравнение тесно связано, как будет показано далее, с нелинейным интегральным уравнением типа свёртки

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x K(x-t)u(t)dt, \ \ x > 0, \ \ \alpha > 1, \tag{2}$$

где

$$K(x) = h'(x) + k''(x). \tag{3}$$

Уравнение вида (2) возникает при описании процесса инфильтрации жидкости из цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду [1] и процесса распространения ударных волн в трубах, наполненных газом [2], и других [3], [4]. При этом особый интерес представляют неотрицательные непрерывные положительные при $x > 0$ решения уравнения

(2). Очевидно, что уравнения (1) и (2) имеют тривиальное решение $u(x) \equiv 0$ и любое другое (нетривиальное) решение этих уравнений удовлетворяет условию $u(0) = 0$. Поэтому решения интегро-дифференциального уравнения (1) будем разыскивать в конусе

$$Q_0^2 = \{u(x)\colon\ u \in C[0,\infty) \cap C^2(0,\infty),\ \ u(0) = u'(0) = 0,$$
$$\text{и } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\},$$

а решения интегрального уравнения (2) будем разыскивать в конусе

$$Q_0 = \{u(x)\colon\ u(x) \in C[0,\infty),\ \ u(0) = 0 \text{ и } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}.$$

Предполагается, что на полуоси $[0,\infty)$ ядра $h(x)$ и $k(x)$ интегро-дифференциального уравнения (1) удовлетворяют условиям:

$$h \in C^2[0,\infty),\ \ h''(x) \text{ не убывает},\ \ h(0) = h'(0) = 0 \text{ и } h''(0) \ge 0, \qquad (4)$$

$$k \in C^3[0,\infty), k'''(x) \text{ не убывает}, k(0) = k'(0) = k''(0) = 0, k'''(0) > 0. \quad (5)$$

Тогда, в силу равенства (3), ядро $K(x)$ интегрального уравнения (2) удовлетворяет условию:

$$K(x) \in C^1[0,\infty),\ \ K'(x) \text{ не убывает на } [0,\infty),\ \ K(0) = 0 \text{ и } K'(0) > 0. \quad (6)$$

Исследование уравнения (2) будет основано на методе априорных оценок. При этом основную роль будет играть следующая лемма.

Лемма 1. *Если $u(x) \in Q_0$ является решением уравнения (2), то $u(x)$ не убывает на $[0,\infty)$ и для любого $x \ge 0$ выполняются неравенства*

$$F(x) \equiv c(\alpha) \cdot x^{2/(\alpha-1)} \le u(x) \le \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x K(t)dt\right)^{1/(\alpha-1)} \equiv G(x), \quad (7)$$

где

$$c(\alpha) = \left(\frac{K'(0)\cdot(\alpha-1)^2}{2\alpha\cdot(\alpha+1)}\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Доказательство. Пусть $u(x) \in Q_0$ есть решение уравнения (2). Из условия (6) следует, что $K'(x) \ge K'(0) > 0$ для любого $x \in [0,\infty)$. Значит, ядро $K(x)$ возрастает на $[0,\infty)$. Но тогда, по лемме 17.2 [4], решение $u(x)$ не убывает на $[0,\infty)$.

Далее, дифференцируя обе части тождества (2), с учетом, что $K(0) = 0$, имеем:

$$\alpha u^{\alpha-1}(x)u'(x) = \int_0^x K'(x-t)u(t)dt + K(0)u(x) =$$

$$= \int_0^x K'(x-t)u(t)dt \equiv (K' * u)(x), \qquad (8)$$

откуда

$$u'(x) = \frac{1}{\alpha} \cdot u^{1-\alpha}(x) \cdot (K' * u)(x).$$

Следовательно, $u'(x)$ непрерывна при $x > 0$ и $u''(x)$ существует как производная произведения двух дифференцируемых функций.

Докажем оценку $F(x) \leq u(x)$. Дифференцируя дважды тождество (2), с учетом равенства (8) и условия (6), получим:

$$\left(u^{\alpha}(x)\right)'' = (K'' * u)(x) + K'(0)u(x) \geq K'(0)u(x).$$

Введем новую функцию $v(x)$, обозначив $u^{\alpha}(x) = v(x)$. В результате получим нелинейное дифференциальное неравенство второго порядка $v'' \geq K'(0)v^{1/\alpha}$, не содержащее явно независимую переменную x. Делая в этом неравенстве замену $v' = p,\ p = p(v)$ (а тогда $v'' = p \cdot p'$), имеем $p \cdot p' \geq K'(0)v^{1/\alpha}$. Так как, по условию, $v(x) \equiv \left(K * v^{1/\alpha}\right)(x)$, то, в силу равенства (8), $v'(x) \equiv \left(K' * v^{1/\alpha}\right)(x)$. Следовательно, $v(0) = v'(0) = 0$ и $v'(x) \geq 0$. Поэтому записывая предыдущее неравенство в виде $pdp \geq K'(0)v^{1/\alpha}dv$ или, что то же самое, в виде $v'(x)dv'(x) \geq K'(0)v^{\frac{1}{\alpha}}(x)dv(x)$ и интегрируя в пределах от 0 до x, получим

$$\frac{[v'(x)]^2}{2} \geq \frac{K'(0) \cdot \alpha}{\alpha+1}[v(x)]^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \text{ или } v'(x) \geq \sqrt{\frac{2K'(0) \cdot \alpha}{\alpha+1}} \cdot [v(x)]^{(\alpha+1)/(2\alpha)}.$$

Разделяя переменные и еще раз интегрируя в пределах от 0 до x, имеем

$$\frac{2\alpha}{\alpha-1} \cdot [v(x)]^{(\alpha-1)/(2\alpha)} \geq \sqrt{\frac{2K'(0) \cdot \alpha}{\alpha+1}} \cdot x$$

или

$$[v(x)]^{1/\alpha} \geq \left[\left(\frac{\alpha-1}{2\alpha}\right)^2 \cdot \frac{2K'(0)\cdot\alpha}{\alpha+1} \cdot x^2\right]^{1/(\alpha-1)} \equiv F(x).$$

Вспоминая, что $u^{\alpha}(x) = v(x)$, из последнего неравенства получаем доказываемую оценку снизу: $u(x) \geq F(x)$.

Осталось доказать оценку сверху, т.е., что $u(x) \leq G(x)$. Так как $K(x)$ и $u(x)$ неубывающие функции, то применяя неравенство Чебышева (17.6) [4], из тождества (2) имеем:

$$u(x) \leq \left(\int_0^x K(t)u(t)dt\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{для любого } x > 0. \tag{9}$$

Значит,

$$K(x)u(x)\left(\int_0^x K(t)u(t)dt\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \leq K(x).$$

Отсюда, после интегрирования, будем иметь:

$$\left(\int_0^x K(t)u(t)dt\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\left(\int_0^x K(t)dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \equiv G(x). \tag{10}$$

Используя оценку (10), из неравенства (9) получим: $u(x) \leq G(x)$ - что и требовалось.

Пример 1. *Функция*

$$u^*(x) = \left(\frac{(\alpha-1)^2}{2\alpha\cdot(\alpha+1)}\right)^{1/(\alpha-1)} x^{2/(\alpha-1)}$$

является решением уравнения (2) при $K(x) = x$.

Пример 1 показывает, что $F(x) \equiv u^*(x)$ при $K(x) = x$, т.е. априорная оценка снизу решения уравнения (2) неулучшаема.

Из леммы 1 вытекает, что решения уравнения (2) естественно искать в классе

$$P = \{u(x):\ u(x) \in C[0,\infty) \text{ и } F(x) \leq u(x) \leq G(x)\}.$$

Введем в рассмотрение оператор T:

$$(Tu)(x) = \left(\int_0^x K(x-t)u(t)dt \right)^{1/\alpha}, \quad x > 0.$$

Лемма 2. *Оператор T переводит класс P в себя.*

Доказательство. Пусть $u(x) \in P$ - произвольная функция. Нужно доказать, что тогда и $(Tu)(x) \in P$. В силу теоремы 17.9 [4] свертка $(K * u)(x)$ есть функция, непрерывная на $[0, \infty)$ и, значит, $(Tu)(x) \in C[0, \infty)$. Осталось доказать, что $F(x) \leq (Tu)(x) \leq G(x)$. Поскольку $u(x) \geq F(x)$ и, по условию (6), $K'(x) \geq K'(0) > 0$, то

$$[(Tu)(x)]^\alpha \geq \int_0^x K(x-t)c(\alpha)t^{\frac{2}{\alpha-1}}dt = c(\alpha)\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\int_0^x K(x-t)dt^{(\alpha+1)/(\alpha-1)} =$$

(интегрируем по частям и учитываем, что $K(0) = 0$)

$$= c(\alpha)\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\int_0^x K'(x-t)t^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}dt \geq c(\alpha)\frac{\alpha-1}{\alpha+1}K'(0)\int_0^x t^{(\alpha+1)/(\alpha-1)}dt \equiv [F(x)]^\alpha,$$

то есть $(Tu)(x) \geq F(x)$.

С другой стороны, так как $u(x) \leq G(x)$, то с учетом условия (6) и интегрального неравенства Чебышева (17.6) [4], где роль функции $u(x)$ играет уже функция $G(x)$, которая, очевидно, также является неубывающей, имеем (см. доказательство теоремы 17.12 [4]):

$$[(Tu)(x)]^\alpha \leq \int_0^x K(t)G(t) \equiv [G(x)]^\alpha, \quad \text{т.е.} \quad (Tu)(x) \leq G(x).$$

Лемма 2 доказана.

Рассмотрим теперь класс

$P_b = \{u(x){:}\ u(x) \in C[0, b]$ и $F(x) \leq u(x) \leq G(x)\}$, где $b > 0 -$ любое число и введем в нем метрику ρ_b, положив $\forall u(x), v(x) \in P_b$:

$$\rho_b(u, v) = \sup_{0<x\leq b} \frac{|u(x) - v(x)|}{x^{2/(\alpha-1)}e^{\beta x}}, \text{ где } \beta > 0 - \text{любое число.}$$

Нетрудно проверить, что пара (P_b, ρ_b) образует полное метрическое пространство.

Выберем число $\mu \in (0, b)$ так, чтобы выполнялось условие

$$K'(\mu) < \alpha \cdot K'(0) \tag{11}$$

и положим

$$\beta = \frac{1}{K'(0)} \sup_{\mu \le x \le b} \frac{K'(x) - K'(0)}{x}. \tag{12}$$

Тогда, по лемме 18.5 [4], получим, что выполняется неравенство:

$$K(x)e^{-\beta x} \le xK'(\mu). \tag{13}$$

Теорема 1. Если ядро $K(x)$ удовлетворяет условию (6), то уравнение (2) имеет в конусе Q_0 (и в P_b при любом $b > 0$) единственное решение $u^*(x)$. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений по формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, которые сходятся к нему по метрике ρ_b при любом $b < \infty$, причем справедлива оценка скорости их сходимости:

$$\rho_b(u_n, u^*) \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \rho_b(Tu_0, u_0), \tag{14}$$

где $\gamma = K'(\mu)/[\alpha K'(0)] < 1$, а $u_0(x)$ есть любая функция из P_b.

Доказательство. Запишем уравнение (2) в операторном виде: $u = Tu$. Покажем сначала, что оператор T, действующий, согласно лемме 2, из P_b в P_b, является сжимающим. Пусть $u(x), v(x) \in P_b$ - произвольные функции. Очевидно, что

$$|u(x) - v(x)| \le x^{\frac{2}{\alpha-1}} e^{\beta x} \rho_b(u, v).$$

Поэтому, используя неравенство (13), имеем

$$\left| \int_0^x K(x-t)[u(t) - v(t)]dt \right| \le \rho_b(u, v) \int_0^x K(x-t) e^{-\beta(x-t)} e^{\beta x} t^{2/(\alpha-1)} dt \le$$

$$\le e^{\beta x} K'(\mu) \rho_b(u, v) \int_0^x (x-t) t^{\frac{2}{\alpha-1}} dt = \frac{(\alpha-1)^2 K'(\mu)}{2\alpha(\alpha+1)} e^{\beta x} \rho_b(u, v) x^{2\alpha/(\alpha-1)}.$$

Далее, применяя теорему Лагранжа (формулу конечных приращений), с учетом последней оценки (так же как и при доказательстве теоремы 17.14 [4]), имеем

$$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| \le \frac{1}{\alpha} \frac{\left| \int_0^x [u(t) - v(t)]dt \right|}{[F(x)]^{\alpha-1}} \le \frac{K'(\mu)}{\alpha K'(0)} e^{\beta x} x^{\frac{2}{\alpha-1}} \rho_b(u, v),$$

откуда

$$\rho_b(Tu,Tv) \le \frac{K'(\mu)}{\alpha K'(0)} \cdot \rho_b(u,v), \tag{15}$$

т.е. оператор T в силу условия (11), является сжимающим. Значит, на основании принципа сжимающих отображений, уравнение $u = Tu$ имеет единственное решение $u^*(x) \in P_b$, которое можно найти по формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, причем справедлива оценка (14).

Осталось показать, что уравнение (2) имеет единственное решение в конусе Q_0. Положим $P_\infty = \bigcup\limits_{b>0} P_b$. Так как уравнение (2) имеет единственное решение в P_b при любом

$b > 0$ и коэффициент сжатия в (15) не зависит от b, то уравнение (2) имеет единственное решение $u^*(x)$ в P_∞. Поскольку всякое решение уравнения (2) из Q_0 удовлетворяет априорным оценкам (7), то это решение будет единственным и в Q_0.

Теорема 1 доказана.

Следующая лемма устанавливает связь между интегро-дифференциальным уравнением (1) и интегральным уравнением (2).

Лемма 3. *Пусть выполнены условия (4) и (5). Тогда любое решение уравнения (1) в конусе Q_0^2 является решением интегрального уравнения (2) в конусе Q_0. Обратно, если выполнены условия (4), (5) и дополнительное условие*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x K'(x-t)\left[\int_0^t K(s)ds\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} dt}{\left[\int_0^x K(x-t)\cdot t^{\frac{2}{\alpha-1}} dt\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} = 0, \tag{16}$$

то любое решение интегрального уравнения (2) в конусе Q_0 является решением интегро-дифференциального уравнения (1) в конусе Q_0^2.

Доказательство. Докажем сначала первую часть леммы. Пусть $u(x) \in Q_0^2$ и является решением уравнения (1). Тогда, дважды применяя формулу интегрирования по частям, из тождества (1), с учетом условий (4) и (5), получаем:

$$u^{\alpha}(x)=\int_0^x h(x-t)du(t)+\int_0^x k(x-t)du'(t)=$$

$$=\int_0^x u(t)h'(x-t)dt+\int_0^x u'(t)k'(x-t)dt=$$

$$=\int_0^x h'(x-t)u(t)dt+\int_0^x u(t)k''(x-t)dt=\int_0^x K(x-t)u(t)dt,$$

т.е. $u(x)\in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (2).

Докажем теперь вторую часть леммы. Пусть $u(x)\in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (2). Тогда, как было установлено при доказательстве леммы 1, $u(x)$ не убывает на $[0,\infty)$, дважды непрерывно дифференцируема на $(0,\infty)$, т.е. $u(x)\in C^2(0,\infty)$, и удовлетворяет неравенствам $F(x)\leq u(x)\leq F(x)$. Докажем, что $u'(0)=0$. Из тождества (2), с учетом условия (6), имеем

$$\alpha u^{\alpha-1}(x)u'(x)=\int_0^x K'(x-t)u(t)dt+K(0)u(x)=\int_0^x K'(x-t)u(t)dt,$$

откуда

$$u'(x)=\frac{\int_0^x K'(x-t)u(t)dt}{\alpha\cdot[u^{\alpha}(x)]^{(\alpha-1)/\alpha}}=\frac{\int_0^x K'(x-t)u(t)dt}{\alpha\cdot\left[\int_0^x K(x-t)u(t)dt\right]^{(\alpha-1)/\alpha}}\geq 0. \qquad (17)$$

Используя априорные оценки (7), из (17) получаем:

$$0\leq u'(x)\leq\frac{\int_0^x K'(x-t)G(t)dt}{\alpha\cdot\left[\int_0^x K(x-t)F(t)dt\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}=$$

$$=\frac{\int_0^x K'(x-t)\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot\int_0^t K(s)ds\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}dt}{\alpha\cdot\left[\int_0^x K(x-t)c(\alpha)t^{\frac{2}{\alpha-1}}dt\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}=$$

$$=\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}\frac{1}{\alpha\cdot[c(\alpha)]^{(\alpha-1)/\alpha}}\cdot\frac{\int_0^x K'(x-t)\left[\int_0^t K(s)ds\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}dt}{\left[\int_0^x K(x-t)\cdot t^{\frac{2}{\alpha-1}}dt\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}\to 0 \text{ при } x\to 0,$$

в силу условия (16). Значит, $u'(0) = 0$.

Таким образом, $u(x) \in C^2[0, \infty)$, $u(0) = u'(0) = 0$ и $u(x) > 0$ при $x > 0$, т.е. $u(x) \in Q_0^2$. Осталось доказать, что $u(x)$ является решением интегро-дифференциального уравнения (1). Используя равенство (3), свойство коммутативности свертки и дважды применяя формулу интегрирования по частям, с учетом условий (4) и (5), из тождества (2) получаем:

$$u^\alpha(x) = \int_0^x [h'(t) + k''(t)]u(x-t)dt = \int_0^x u(x-t)dh(t) + \int_0^x u(x-t)dk'(t) =$$

$$= \int_0^x h(t)u'(x-t)dt + \int_0^x k'(t)u'(x-t)dt =$$

$$= \int_0^x h(x-t)u'(t)dt + \int_0^x u'(x-t)dk(t) =$$

$$= \int_0^x h(x-t)u'(t)dt + \int_0^x k(t)u''(x-t)dt =$$

$$\int_0^x h(x-t)u'(t)dt + \int_0^x k(x-t)u''(t)dt,$$

т.е. $u(x)$ является решением интегро-дифференциального уравнения (1).

Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 вытекает, что при выполнении условий (4), (5) и (16) интегро-дифференциальное уравнение (1) и интегральное уравнение (2) одновременно разрешимы или нет, при этом они имеют одни и те же решения. Поэтому, на основании теоремы 1, справедлива следующая основная теорема.

Теорема 2. *Если выполнены условия (4), (5) и (16), то интегро-дифференциальное уравнение (1) имеет единственное решение в классе* Q_0^2 *(и в пространстве* P_b *при любом* $b > 0$*). Это решение может быть найдено в пространстве* P_b *методом последовательных приближений пикаровского типа по формуле* $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, *которые сходятся к нему по метрике* ρ_b *при любом* $b < \infty$, *причем справедлива оценка (14) скорости их сходимости.*

Пример 2. *При* $\alpha = 2$, $h(x) = x^2$ *и* $k(x) = x^3$ *уравнение (1) имеет в конусе* Q_0^2 *единственное решение* $u(x) = \frac{2}{3}x^2$. *При этом функция* $K(x) = 8x$ *удовлетворяет условию (16).*

Следуя монографии [4, с. 211] можно доказать, что при $0 < \alpha < 1$, как и в случае соответствующих линейных уравнений, получающихся при $\alpha = 1$, уравнения (1) и (2) имеют лишь тривиальное решение в конусе пространства непрерывных функций $C[0, \infty)$, состоящем из неотрицательных непрерывных на полуоси $[0, \infty)$ функций.

Таким образом, из полученных в данной статье результатов вытекает, что нелинейные однородные интегральные и интегро-дифференциальные уравнения вида (1) и (2) кроме тривиального решения $u(x) \equiv 0$ имеют и нетривиальное решение $u(x) \neq 0$ строго положительное при $x > 0$. В этом состоит принципиальное отличие теории таких нелинейных уравнений от хорошо разработанной к настоящему времени теории соответствующих линейных однородных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, которые имеют лишь тривиальное решение $u(x) \equiv 0$. Кроме того, теория нелинейных уравнений отличается от теории соответствующих линейных уравнений не только по характеру получаемых результатов, но и по методам исследования, которые зависят как от выбора пространства, так и от свойств нелинейностей.

В заключение отметим, что, следуя работам [5]-[7] аналогично можно исследовать интегро-дифференциальные уравнения вида (1) с переменными коэффициентами и неоднородностями в линейной части.

Основные результаты данного параграфа доложены на конференциях и опубликованы в работах [8]-[10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Okrasinski W. On a non-linear convolution equation occurring in the theory of water percolation // Annal. Polon. Math. 1980. V. 37. № 3. P. 223–229.

2. Keller J.J. Propagation of simple non-linear waves in gas filled tubes with friction // Z. Angew. Math. Phys. 1981. Vol. 32, №2. – P. 170 – 181.
3. Brunner H. Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications // Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 387 p.
4. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки. 2009. М.: Физматлит, 304 с.
5. Асхабов С.Н. Интегро-дифференциальное уравнение типа свёртки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Дифференц. уравнения. – 2020. Т. 56. № 6. – С. 786 – 795.
6. Асхабов С.Н. Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и переменным коэффициентом // Дифференц. уравнения. –2021. Т. 57, №3. – С. 387 – 398.
7. Askhabov S.N. Nonlinear convolution integro-differential equation with variable coefficient // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2021. Vol. 24, №3. – P. 848 – 864.
8. Асхабов С.Н. Об одном нелинейном интегро-дифференциальном уравнении второго порядка с разностными ядрами // Материалы VI Междуна-родной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 5-9 декабря 2021 г.). Нальчик, 2021. С. 35.
9. Askhabov S.N. Integro-Differential Equation of the Second Order with Difference Kernels and Inhomogeneity in the Linear Part // The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations. Москва: РУДН, 2022. С. 12-13.
10. Askhabov S.N. On an integro-differential second order equation with dif-ference kernels and power nonlinearity // Bulletin of the Karaganda University. 2022. №2(106). P. 38-48.

§5. Устойчивость решения краевой задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа свертки

В данном параграфе в конусе пространства непрерывно дифференцируемых на положительной полуоси функций, исчезающих в нуле и неограниченных на бесконечности, изучается краевая задача для интегро-дифференциального уравнения

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x k(x-t)u'(t)dt + f(x), \;\; x > 0, \;\; \alpha > 1.$$

Приведенные далее в первом пункте результаты носят вспомогательный характер. Здесь приводятся условия существования и единственности решения рассматриваемой нелинейной краевой задачи. Показано, что решение этой задачи может быть найдено методом последовательных приближений пикаровского типа.

Основной результат данной работы содержится во втором, в котором подробно доказано, что решение рассматриваемой краевой задачи непрерывно зависит (устойчиво) относительно изменений (возмущений) неоднородности $f(x)$.

Условия существования и единственности решений. В этом пункте формулируются вспомогательные результаты, существенно используемые в следующем основном пункте. Подробное доказательство этих результатов приведено в [2].

Рассмотрим в конусе

$$Q_0^1 = \{u(x) : u(x) \in C[0,\infty) \cap C^1(0,\infty), \;\; u(0) = 0 \;\text{ и }\; u(x) > 0 \;\text{ при }\; x > 0\}$$

нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа свертки

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x k(x-t)u'(t)dt + f(x), \;\; x > 0, \;\; \alpha > 1, \tag{1}$$

в котором ядро $k(x)$ и неоднородность $f(x)$ удовлетворяют условиям:

$$k \in C^1[0,\infty), \;\; k'(x) \text{ не убывает на } [0,\infty), \;\; k(0) = 0 \;\text{ и }\; k'(0) > 0\,, \tag{2}$$

$$f \in C^1[0,\infty),\ \ f(x)\ \text{не убывает на}\ [0,\infty)\ \text{и}\ \ f(0)=0\,. \qquad (3)$$

Наряду с интегро-дифференциальным уравнением (1) будет рассматриваться также интегральное уравнение

$$u^\alpha(x) = \int_0^x k'(x-t)u(t)dt + f(x),\ \ x>0,\ \ \alpha>1, \qquad (4)$$

в конусе $Q_0 = \{u(x){:}\, u(x) \in C[0,\infty),\ \ u(0)=0\ \ \text{и}\ \ u(x)>0\ \text{при}\ \ x>0\}$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (2) и (3). Если* $u(x) \in Q_0$ *является решением интегрального уравнения (4), то функция* $u(x)$ *не убывает на* $[0,\infty)$ *и непрерывно дифференцируема на* $(0,\infty)$, *т.е.* $u(x) \in C^1(0,\infty)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (2) и (3). Если* $u(x) \in Q_0^1$ *является решением интегро-дифференциального уравнения (1), то* $u(x) \in Q_0$ *и является решением интегрального уравнения (4). Обратно, если уравнение (4) имеет решениеu*$(x) \in Q_0$, *то* $u(x) \in Q_0^1$ *и является решением уравнения (1).*

В силу леммы 2, уравнения (1) и (4) имеют одно и то же множество решений.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия (2) и (3). Если* $u(x \in Q_0$ *и является решением интегрального уравнения (4), то* $u(x)$ *удовлетворяет неравенствам*:

$$\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}k'(0)x\right]^{1/(\alpha-1)} \le\ u(x) \le \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}k(x) + f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x)\right]^{1/(\alpha-1)}. \qquad (5)$$

Из леммы 3 следует, что решения интегрального уравнения (4) естественно разыскивать в классе

$$\Omega = \{u(x){:}\ u(x) \in C[0,\infty)\ \ \text{и}\ \ \ L(x) \le u(x) \le R(x)\},$$

где

$$L(x) \equiv \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}k'(0)x\right]^{1/(\alpha-1)},\ \ \ R(x) \equiv \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}k(x) + f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x)\right]^{1/(\alpha-1)}. \quad (6)$$

В силу леммы 2, утверждения леммы 3 справедливы и для уравнения (1).

Пример 1. *При* $\alpha\ =\ 2,\ k(x)\ =\ 3x,\ f(x) =\ x^2$ *уравнения (1) и (4) имеют решение* $u(x) = 2x$, *при этом априорные оценки (5) принимают вид:* $1{,}5x\ \le\ 2x\ \le\ 2{,}5x$.

Рассмотрим нелинейный интегральный оператор свертки T_f:

$$\left(T_f u\right)(x) = \left(\int_0^x k'(x-t)u(t)dt + f(x) \right)^{1/\alpha}.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (2) и (3). Тогда класс* Ω *инвариантен относительно нелинейного оператора* T_f*, то есть* $T_f\colon \Omega \to \Omega$.

Введем следующий класс функций:

$$\Omega_b = \{u(x) : u(x) \in C[0,b] \text{ и } L(x) \le u(x) \le R(x)\},$$

где функции $L(x)$ и $R(x)$ определены в (6), а $b > 0$ – произвольное число.

Далее будем предполагать, что неоднородность $f(x)$ наряду с условием (3) удовлетворяет дополнительному условию:

$$C = \sup_{0<x\le b} \frac{f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)}{x} < \infty. \tag{7}$$

Заметим, что функция $f(x) = x^2$, рассмотренная в примере 1, в котором $\alpha = 2$, удовлетворяет условию (7) и при этом $C = 1$.

Введем во множестве функций Ω_b расстояние по формуле

$$\rho_b(u,v) = \sup_{0<x\le b} \frac{|u(x)-v(x)|}{x^{1/(\alpha-1)}e^{\beta x}}, \quad \beta \ge 0. \tag{8}$$

Множество Ω_b с метрикой ρ_bобразует полное метрическое пространство.

Выберем теперь достаточно малое число $c \in (0,b)$ такое, что выполняется неравенство

$$k'(c) < \alpha \cdot k'(0) \tag{9}$$

и определим число β по формуле

$$\beta = \frac{1}{k'(0)} \sup_{0\le x\le b} \frac{k'(x)-k'(0)}{x}. \tag{10}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (2), (3) и (7). Тогда оператор* $T_f\colon \Omega_b \to \Omega_b$ *и является сжимающим, при этом* $\forall u_1(x), u_2(x) \in \Omega_b$ *выполняется неравенство*:

$$\rho_b\left(T_f u_2, T_f u_1\right) \le \frac{k'(c)}{\alpha \cdot k'(0)} \rho_b(u_2,u_1), \tag{11}$$

где число $c \in (0,b)$ *определяется из условия (9).*

Используя теорему 2 и лемму 2 методом весовых метрик доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Если выполнены условия (2), (3) и (7), то интегро-дифференциальное уравнение (1) имеет в* Q_0^1 *(и в* Ω_b *при любом* $b > 0$*) единственное решение* $u^*(x)$*. Это решение удовлетворяет оценкам (5) и его можно найти в пространстве* Ω_b *методом последовательных приближений по формуле* $u_n = T_f u_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$*, со сходимостью по метрике (8), в которой число* β *задано равенством (10) с числом* $c \in (0, b)$ *определенным в условии (9). При этом справедлива оценка погрешности*:

$$\rho_b(u_n, u^*) \le \frac{q^n}{1-q} \cdot \rho_b\left(T_f u_0, u_0\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

где $q = k'(c)/[\alpha \cdot k'(0)] < 1$, а $u_0(x) \in P_b$ *есть начальное приближение.*

Устойчивость решения краевой задачи относительно изменений неоднородности. Этот пункт является основным в данном параграфе. Рассмотрим следующую нелинейную краевую задачу: найти решение нелинейного интегро-дифференциального уравнения

$$u^\alpha(x) = \int_0^x k(x-t)u'(t)dt + f(x), \;\; x > 0, \;\; \alpha > 1, \tag{12}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0) = 0 \quad \text{и} \quad u(+\infty) \equiv \lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty. \tag{13}$$

Поскольку из лемм 4 и 5 вытекает, что всякое решение уравнения (12) из класса Q_0^1 удовлетворяет условиям (13), то из теоремы 3 непосредственно следует, что краевая задача (12), (13) имеет единственное решение в конусе в Q_0^1 (и в метрическом пространстве Ω_b при любом $b > 0$) и его можно найти в пространстве Ω_b методом последовательных приближений по формуле $u_n = T_f u_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, со сходимостью по метрике (8).

Рассмотрим вопрос о непрерывной зависимости (устойчивости) решения краевой задачи (12), (13) относительно изменений (возмущения) неоднородности $f(x)$. Наша цель получить, в частности, оценку расстояния $\rho_b(u_2, u_1)$ между решениями $u_1(x), u_2(x)$ краевой задачи (12), (13), соответствующим неоднородностям $f_1(x), f_2(x)$, через расстояние между этими неоднородностями в смысле какой-либо метрики. В случае интегрального уравнения вида (4) вопрос об устойчивости решения изучался в работе [7, лемма 6] при $\alpha = 2$ и более жестких ограничениях на заданные функции.

Теорема 4. *Пусть* $\alpha > 1,\ i = 1{,}2$, *ядро* $k(x)$ *удовлетворяет условию (2), а неоднородности* $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *удовлетворяют условиям (3) и (7). Если* $u_i(x) \in \Omega_b$ *и являются решениями краевой задачи (12), (13), соответствующими неоднородностям* $f_i(x)$, *то*

$$\rho_b(u_1, u_2) \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{\alpha \cdot k'(0) - k'(c)} \cdot \sup_{0<x\leq b} \frac{|f_1(x) - f_2(x)|}{x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}. \qquad (14)$$

Доказательство. Так как $u_i(x)$ являются решениями краевой задачи (12), (13), соответствующими неоднородностям $f_i(x)$, то

$$u_i(x) \equiv \left(\int_0^x k'(x-t) u_i(t) dt + f_i(x) \right)^{1/\alpha}, \quad i = 1, 2.$$

Кроме того, в силу леммы 3,

$$u_i(x) \geq \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha} k'(0) x \right]^{1/(\alpha-1)}. \qquad (15)$$

По теореме Лагранжа (формула конечных приращений) для любых $z_1 > 0$, $z_2 > 0$, имеем

$$z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \theta^{(1-\alpha)/\alpha} (z_1 - z_2),$$

где θ некоторое число, лежащее между z_1 и z_2. Поэтому, если $z_1 \geq z_0$ и $z_2 \geq z_0$, где $z_0 > 0$, то $\theta > z_0$ и, значит,

$$\left| z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha} \right| \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{|z_1 - z_2|}{z_0^{(\alpha-1)/\alpha}}.$$

Используя это неравенство и оценку (15), имеем

$$|u_1(x) - u_2(x)| =$$

$$= \left| \left(\int_0^x k'(x-t)u_1(t)dt + f_1(x) \right)^{1/\alpha} - \left(\int_0^x k'(x-t)u_2(t)dt + f_2(x) \right)^{1/\alpha} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\int_0^x k'(x-t)|u_1(t)-u_2(t)|dt \ + |f_1(x)-f_2(x)|}{\frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot k'(0) \cdot x} =$$

$$= \frac{1}{(\alpha-1)k'(0)x} \left[e^{\beta x} \int_0^x e^{-\beta(x-t)} k'(x-t) \frac{|u_1(t)-u_2(t)|}{t^{1/(\alpha-1)} e^{\beta t}} t^{1/(\alpha-1)} dt \right.$$

$$\left. + |f_1(x)-f_2(x)| \right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{(\alpha-1)k'(0)x} \left[e^{\beta x} k'(c) \rho_b(u_1,u_2) \frac{\alpha-1}{\alpha} x^{\alpha/(\alpha-1)} + |f_1(x)-f_2(x)| \right],$$

откуда

$$\frac{|u_1(x)-u_2(x)|}{x^{1/(\alpha-1)} e^{\beta x}} \leq \frac{k'(c)}{\alpha \cdot k'(0)} \rho_b(u_1,u_2) + \frac{|f_1(x)-f_2(x)|}{(\alpha-1)k'(0) x^{\alpha/(\alpha-1)} e^{\beta x}} \ .$$

Следовательно,

$$\rho_b(u_1,u_2) \leq \frac{k'(c)}{\alpha \cdot k'(0)} \rho_b(u_1,u_2) + \frac{1}{(\alpha-1)k'(0)} \cdot \sup_{0<x\leq b} \frac{|f_1(x)-f_2(x)|}{x^{\alpha/(\alpha-1)}}$$

или

$$\frac{\alpha \cdot k'(0) - k'(c)}{\alpha \cdot k'(0)} \rho_b(u_1,u_2) \leq \frac{1}{(\alpha-1)k'(0)} \cdot \sup_{0<x\leq b} \frac{|f_1(x)-f_2(x)|}{x^{\alpha/(\alpha-1)}} .$$

Из последнего неравенства непосредственно вытекает оценка (14).

Теорема полностью доказана.

Заметим, что при условиях теоремы 4

$$\sup_{0<x\leq b} \frac{|f_1(x)-f_2(x)|}{x^{\alpha/(\alpha-1)}} \leq C_1 + C_2 \ ,$$

где

$$C_1 = \sup_{0<x\leq b} \frac{f_1(x)}{x^{\alpha/(\alpha-1)}} \ , \quad C_2 = \sup_{0<x\leq b} \frac{f_2(x)}{x^{\alpha/(\alpha-1)}}$$

(константы C_1 и C_2 конечны, в силу условия (7)).

В заключение отметим, что в работах [1, 3, 5] изучены дискретные уравнения типа свертки с монотонной (не обязательно степенной) нелинейностью как методом монотонных (по Браудеру-Минти) операторов, так и методом весовых метрик.

Основные результаты данного параграфа опубликованы в работе [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки. М.: Физматлит, 2009. – 304 с.
2. Асхабов С.Н. Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, №6. С. 786–795.
3. Асхабов С.Н., Карапетянц Н.К. Дискретные уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, №10. С. 1777–1784.
4. Askhabov S.N., Betilgiriev M.A. Nonlinear convolution type equations // Seminar Analysis Oper. Eq. Numer. Anal. 1989/90. Karl-Weierstrass-Institut fur Mathematik. Berlin. 1990. P. 1–30.
5. Askhabov S.N., Karapetian N.K. Convolution Type Discrete Equations with Monotonous Nonlinearity in Complex Spaces // Journal of Integral Equations and Applications. 1992. Vol. 1, №1. P. 44–66.
6. Brunner H. Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. – 387 p.
7. Okrasinski W. On a non-linear convolution equation occurring in the theory of water percolation // Annal. Polon. Math. 1980. Vol. 37, №3. P. 223–229.
8. Okrasinski W. Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Mathem. 1989. Vol. 4, №2. P. 51–74.
9. Асхабов С.Н., Джабраилов А.Л. Устойчивость решений краевой задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа свертки // Известия Чеченского гос. ун-та. 2020. № 4 (20). С. 18-23.

ГЛАВА 3. ОБОБЩЕННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ БЕССЕЛЯ

Теория потенциала берет свое начало из теории электростатического и гравитационного потенциалов и уравнений Лапласа, волн, Гельмгольца и Пуассона. Известно, что знаменитые потенциалы Рисса являются реализациями действительных отрицательных степеней Лапласа и волновых операторов. Между тем, в теории потенциала большое внимание уделяется потенциалу Бесселя

$$G^{\alpha}f(x) = \int_{R^n} G_{\alpha}(x-y)f(y)dy, \quad \alpha > 0,$$

где

$$G_{\alpha}(x) = \frac{2^{\frac{2-n-\alpha}{2}}}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{K_{\frac{n-\alpha}{2}}(|x|)}{|x|^{\frac{n-\alpha}{2}}}$$

и K_{ν} обозначает модифицированную функцию Бесселя второго рода. Оператор G^{α} можно интерпретировать как реализацию реальных отрицательных степеней оператора $(I-\Delta)$. В частности, потенциал Бесселя рассматривали Н. Ароншайн и К.Т. Смит в [1] и Кальдероном в [2]. Следует отметить, что потенциалы Бесселя порождают пространства функций с дробной гладкостью α. Они очень полезны для исследования некоторых дробных УЧП эллиптического типа. С их помощью строятся пространства Соболева дробного порядка. Первые результаты о пространствах бесселевых потенциалов были получены И. Стейном в работе [3] в случает $0<\alpha<2$ и Лизоркиным в [4] в общем случае. Обращение бесселевых потенциалов впервые было получено В.А. Ногиным в [5,6] с использованием гиперсингулярных интегралов. Позже В.С. Гулиев, З.В. Сафаров изучали потенциалы Бесселя, порожденные дифференциальными операторами Бесселя, в [7]. В [8] доказано неравенство Юнга для операторов B-свертки в B-пространствах потенциалов Бесселя, а потенциалы Бесселя охарактеризованы в терминах пространств B-Лизоркина-Трибеля. Оптимальное вложение пространств потенциалов типа Бесселя было получено в [9, 10, 11].

§1. Обобщенный потенциал Бесселя и его обращение

Рассматриваем оператор типа свертки, называемый обобщенным потенциалом Бесселя. Наш главный результат - это вывод формулы его обращения. Мы используем технику регуляризации расходящихся интегралов в виде соответствующих отрезков ряда Тейлора - Дельсарта.

Основные определения и понятия. Пусть R^n - n-мерное Евклидово пространство, тогда

$$R_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n, x_1 > 0, \dots, x_n > 0\},$$
$$\overline{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Через $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ обозначим мультииндекс, состоящий из положительных фиксированных действительных чисел $\gamma_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n,$ $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$.

Пусть$L_p^\gamma(R_+^n) = L_p^\gamma$, $1 \leq p < \infty$ - пространство измеримых на R_+^n функции четных по каждой переменной x_i, $i = 1, \dots, n$ таких, чтоt

$$\int_{R_+^n} |f(x)|^p x^\gamma dx < \infty,$$

где

$$x^\gamma = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\gamma_i}.$$

Для $p \geq 1$, L_p^γ–норма f определяется формулой

$$||f||_{L_p^\gamma(R_+^n)} = ||f||_{p,\gamma} = (\int_{R_+^n} |f(x)|^p x^\gamma dx)^{1/p}.$$

Нормализованная функция Бесселя первого рода j_ν определяется формулой

$$j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}{x^\nu} J_\nu(x),$$

где J_ν- функция Бесселя первого рода.

Для $x \in R^n$ будем использовать обозначение

$$j_\gamma(x,\xi)=\prod_{i=1}^{n} j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i), \qquad j_\gamma(0,\xi)=1.$$

Многомерное преобразование Ганкеля функции $f\in L_1^\gamma(\mathrm{R}_+^n)$ определяется как

$$F_\gamma[f](\xi)=F_\gamma[f(x)](\xi)=\int_{R_+^n} f(x)j_\gamma(x,\xi)x^\gamma dx.$$

Пусть $f\in L_1^\gamma(R_+)$ и является функцией ограниченной вариации в окрестности точек непрерывности. Тогда для $\gamma>0$ справедлива формула обращения

$$F_\gamma^{-1}\big[F_\gamma[f](\xi)\big](x)=f(x)=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^{n}\ \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int_{R_+^n} j_\gamma(x,\xi)F_\gamma[f](\xi)\xi^\gamma d\xi.$$

Многомерный обобщенный сдвиг определяется равенством

$$({}^\gamma T_x^y f)(x)={}^\gamma\, T_x^y f(x)=({}^{\gamma_1}T_{x_1}^{y_1}\ldots{}^{\gamma_n}T_{x_n}^{y_n} f)(x),$$

где каждый одномерный обобщенный сдвиг$\gamma_i T_{x_i}^{y_i}$ действует для $i=1,\ldots,n$ по формуле

$$\left({}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i}f\right)(x)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}\int\limits_0^\pi f(x_1,\ldots,x_{i-1},\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_iy_i cos\varphi_i},x_{i+1},\ldots,x_n)\, sin^{\gamma_i-1}\varphi_i\, d\varphi_i..$$

Обобщенная свертка, порожденная многомерным обобщенным сдвигом γT_x^y определяется как

$$(f*g)_\gamma(x)=(f*g)_\gamma=\int_{R_+^n} f(y)({}^\gamma T_x^y g)(x)y^\gamma dy.$$

Многомерное преобразование Ханкеля, примененное к обобщенной свертке, имеет вид

$$F_\gamma[(f*g)_\gamma(x)](\xi)=F_\gamma[f(x)](\xi)F_\gamma[g(x)](\xi).$$

Многомерный оператор Пуассона P_x^γ, действует на f по формуле

$$P_x^\gamma f(x)=C(\gamma)\int_0^\pi\ \ldots\int_0^\pi\ f(x_1 cos\alpha_1,\ldots,x_n cos\alpha_n)\prod_{i=1}^{n}\ sin^{\gamma_i-1}\alpha_i\, d\alpha_i,$$

Где

$$\gamma_i > 0, i = 1,..,n, \qquad C(\gamma) = \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}$$

Обобщенный потенциал Бесселя

Обобщенный потенциал Бесселя или B-потенциал Бесселя определяется формулой ([12])

$$\left(G_\gamma^\alpha \varphi\right)(x) = \left(G_\alpha^\gamma * \varphi)_\gamma = \int_{R_+^n} G_\alpha^\gamma(y)({}^\gamma T_x^y \varphi(x)\right) y^\gamma dy, \qquad \alpha > 0 \qquad (1)$$

где ядро $G_\alpha^\gamma(x)$ имеет вид

$$G_\alpha^\gamma(x) = \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i + 1}{2}\right)} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|) \qquad (2)$$

Оператор (1) реализует отрицательную дробную степень $(I - \Delta_\gamma)^{-\alpha/2} \alpha > 0$, где I - единичный оператор, Δ_γ - оператор Лапласа-Бесселя

$$\Delta_\gamma = (\Delta_\gamma)_x = \sum_{k=1}^{n} (B_{\gamma_k} \qquad (3)$$

и

$$(B_\gamma)_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t^\gamma}\frac{\partial}{\partial t} t^\gamma \frac{\partial}{\partial t}, \qquad t > 0, \qquad \gamma \in R \qquad (4)$$

- оператор Бесселя. Результаты, полученные в [12], позволяют представить обобщенный потенциал Бесселя в виде

$$G_\gamma^\alpha \varphi = F_\gamma^{-1}(1 + |x|^2)^{-\frac{\alpha}{2}} F_\gamma \varphi, \qquad \alpha > 0, \qquad (5)$$

где F_γ - многомерное преобразование Ханкеля.

Обращение B-потенциала Бесселя методом конечной регуляризации по Адамару

Пусть $f = f(x)$ интегируема в слое $\varepsilon < |x| < A$ для любых $0 < \varepsilon, \varepsilon < A < \infty$ и справедливо представление

$$\int_{\varepsilon<|x|<A} f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} a_k\varepsilon^{-\lambda_k} + b\, ln\frac{1}{\varepsilon} + J_\varepsilon,$$

где a_k, b, λ_k некоторые положительные числа, не зависящие от A. Если предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon$ существует, то он называется конечной частью сингулярного интеграла функции по Адамару. Функция $f = f(x)$ в этом случае говорят, что она обладает свойством Адамара. Стандартное обозначение конечной части сингулярного интеграла по Адамару следующее: $p.f.\int_{|x|<A} f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon$.

Если функция $f = f(x)$ интегрируема в $R_+^n\backslash\{|x| > \varepsilon\}$ и обладает свойством Адамара, то

$$p.f.\int_{R_+^n} f(x)dx = p.f.\int_{|x|<A} f(x)dx + \int_{|x|>A} f(x)dx.$$

Оператор G_γ^α можно представить в виде

$$G_\gamma^\alpha\phi = \left(\frac{\omega_{\alpha,\gamma}(|x|)}{|x|^{n+|\gamma|-\alpha}} * \varphi\right)_\gamma, \qquad \alpha > 0,$$

где

$$\omega_{\alpha,\gamma}(|x|) = \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|).$$

Лемма.1 *Для* $m < n + |\gamma| + \alpha$ *имеем* $\omega_{-\alpha,\gamma}(r) \in C^m([0,\infty])$ *и*

$$\omega_{-\alpha,\gamma}^{(m)}(0) = 0, \qquad m = 1,3,5,\ldots < n + |\gamma| + \alpha,$$

$$\omega_{-\alpha,\gamma}^{(m)}(0) = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}2^{n+\alpha-\frac{m}{2}}(m-1)!!\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2}-\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}, \qquad m = 2,4,6,\ldots < n + |\gamma| + \alpha.$$

Теорема 1 *Пусть* $\varphi(x) \in S(R_+^n)$, *четна по кажой переменной и* $\alpha > 0$. *Тогда справедливо представление*

$$p.f.\left(\frac{\omega_{-\alpha,\gamma}(|x|)}{|x|^{n+|\gamma|+\alpha}} * \varphi\right)_\gamma = \int_{R_+^n}\frac{\gamma T_x^y\phi(x) - (P_y^{l-1}\phi)(x)}{|y|^{n+|\gamma|+\alpha}}\omega_{-\alpha,\gamma}(|y|)y^\gamma dy +$$

$$+\sum_{|2m|\le l-1}\zeta_m^\gamma(B_x^m\varphi)(x)\frac{2^{2|m|}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}+m_i\right)\Gamma\left(|m|-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}$$

где $\alpha < l \in N$, $(P_y^{l-1}\phi)(x) = \sum_{|2m|\le l-1} \zeta_m^\gamma (B_x^m \phi)(x) y^{2m}$ *отрезок ряда Тейлора-Дельсарта,* $m = (m_1, \ldots, m_n)$ *- мультииндекс, состоящий из неотрицательных целых чисел,* $y^{2m} = y_1^{2m_1} \ldots y_n^{2m_n}$, $(B_x^m \varphi)(x) = B_{\gamma_1}^{m_1} \ldots B_{\gamma_n}^{m_n} \varphi(x_1, \ldots, x_n)$,

$$\zeta_m^\gamma = \frac{1}{2^{2|m|} m!} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(m_i + \frac{\gamma_i+1}{2}\right)}, \quad m! = m_1! \cdot \ldots \cdot m_n!.$$

Доказательство. Начнем с представления

$$p.f.\left(\frac{\omega_{-\alpha,\gamma}(|x|)}{|x|^{n+|\gamma|+\alpha}} * \varphi\right)_\gamma = p.f.\int_{R_+^n} \frac{\omega_{-\alpha,\gamma}(|y|)^\gamma T_x^y \varphi(x)}{|y|^{n+|\gamma|+\alpha}} y^\gamma dy =$$

$$= \int_{R_+^n} \frac{\gamma \boldsymbol{T}_x^y \varphi(x) - \left(P_y^{l-1}\varphi\right)(x)}{|y|^{n+|\gamma|+\alpha}} \omega_{-\alpha,\gamma}(|y|) y^\gamma dy$$

$$+ p.f.\int_{R_+^n} \frac{(P_y^{l-1}\varphi)(x)}{|y|^{n+|\gamma|+\alpha}} \omega_{-\alpha,\gamma}(|y|) y^\gamma dy,$$

где

$$(P_y^{l-1}\varphi)(x) = \sum_{|2m|\le l-1} \zeta_m^\gamma (B_x^m \varphi)(x) y^{2m}$$

- отрезок ряда Тейлора-Дельсарта, $l > \alpha$. Тогда получим

$$p.f.\int_{R_+^n} \frac{(P_y^{l-1}\varphi)(x)}{|y|^{n+|\gamma|+\alpha}} \omega_{-\alpha,\gamma}(|y|) y^\gamma dy$$

$$= \sum_{|2m|\le l-1} \zeta_m^\gamma (B_x^m \varphi)(x) p.f.\int_{R_+^n} \frac{y^{2m}}{|y|^{n+|\gamma|+\alpha}} \omega_{-\alpha,\gamma}(|y|) y^\gamma dy.$$

Чтобы получить подходящее представление для

$$p.f.\int_{R_+^n} \frac{y^{2m}}{|y|^{n+|\gamma|+\alpha}} \omega_{-\alpha,\gamma}(|y|) y^\gamma dy$$

, рассмотрим интеграл с дополнительным параметром β

$$I_{\alpha,\beta,\gamma} = \int_{R_+^n} \frac{y^{2m}}{|y|^{n+|\gamma|+\beta}} \omega_{-\alpha,\gamma}(|y|) y^\gamma dy, \qquad \beta \in C,$$

и зафиксируем $\alpha > 0$.

Переходя в $I_{\alpha,\beta,\gamma}$ к сферическим координатам, запишем,

$$I_{\alpha,\beta,\gamma} = \int_{R_+^n} \frac{y^{2m}}{|y|^{n+|\gamma|+\beta}} \omega_{-\alpha,\gamma}(|y|) y^\gamma dy = \{y = r\sigma\}$$

$$= \int_0^\infty r^{2|m|-\beta-1} \omega_{-\alpha,\gamma}(r) dr \int_{S_1^+(n)} \sigma^{\gamma+2m} dS.$$

Пусть

$$I_m^\gamma = \int_{S_1^+(n)} \sigma^{2m+\gamma} dS$$

, получим

$$I_{\alpha,\beta,\gamma} = I_m^\gamma \int_0^\infty r^{2|m|-\beta-1} \omega_{-\alpha,\gamma}(r) dr$$

$$= I_m^\gamma \frac{2^{\frac{n-|\gamma|+\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \int_0^\infty r^{2|m|-\beta-1+\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2}} K_{\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2}}(r) dr.$$

Затем, применяя формулу 2.16.2 из [13] для $\Re(\beta) < 0$ сможем записать

$$I_{\alpha,\beta,\gamma} = I_m^\gamma \frac{2^{n+2|m|+\alpha-\beta-1}}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \Gamma\left(|m| + \frac{n+|\gamma|+\alpha-\beta}{2}\right) \Gamma\left(|m| - \frac{\beta}{2}\right).$$

Эта формула может быть продолжена аналитически по β на верхнюю полуплоскость □$(\beta) > 0$. Полагая $\beta = \alpha$ в этой продолженной формуле мы приходим к представлению

$$p.f. \int_{R_+^n} \frac{y^{2m}}{|y|^{n+|\gamma|+\alpha}} \omega_{-\alpha,\gamma}(|y|) y^\gamma dy = I_m^\gamma \frac{2^{n+2|m|-1} \Gamma\left(|m| + \frac{n+|\gamma|}{2}\right) \Gamma\left(|m| - \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}.$$

Подставляя

$$I_m^\gamma = \int_{S_1^+(n)} \sigma^{2m+\gamma} dS = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2} + m_i\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2} + |m|\right)}$$

(см. формулу 1.107, стр. 49 из [13]) в последнюю формулу, получим доказываемый результат.

Теперь перейдем к построению обращения В-потенциала Бесселя с помощью техники конечной регуляризации Адамара. Для четной по каждой из своих переменных функции $\varphi \in S(\mathrm{R}^n_+)$ и $\alpha > 0$, определим оператор

$$(I - \Delta_\gamma)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi = \int_{R^n_+} \frac{\gamma \boldsymbol{T}_x^y \phi(x) - (P_y^{l-1}\phi)(x)}{|y|^{n+|\gamma|+\alpha}} \omega_{-\alpha,\gamma}(|y|) y^\gamma dy +$$

$$+ \sum_{|2m| \leq l-1} \zeta_m^\gamma (B_x^m \varphi)(x) \frac{2^{2|m|} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i + 1}{2} + m_i\right) \Gamma\left(|m| - \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i + 1}{2}\right)} \tag{6}$$

который оказывается обратным В-потенциалу Бесселя $G_\gamma^\alpha \varphi$.

Теорема 2. *В пространстве шварцевых функций, четных по каждой из своих переменных оператор* $(I - \Delta_\gamma)^{\frac{\alpha}{2}}$, □$(\alpha) > 0$*, определенный формулой (6) является правым и левым обратным к В-потенциалу Бесселя, т. е. справедливы формулы* $$(I - \Delta_\gamma)^{\frac{\alpha}{2}} G_\gamma^\alpha \varphi = G_\gamma^\alpha (I - \Delta_\gamma)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi = \varphi.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Aronszajn N., Smith K.T. Theory of Bessel potentials. I. Ibid. 11. 1961. P. 365–475.
2. Calderon A.P. Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions. In Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc. Providence R.I. 4. 1961. P. 33–50.
3. Stein E.M. The characterization of functions arising as potentials. I. Bull. Amer. Math. Soc. 67 (I). 1961. P. 102–104.
4. Лизоркин П. И. Описание пространств $L_p^r(R_n)$ в терминах разностных сингулярных интеграловю Матем. сб. 81(123):1. 1970ю С. 79–91.
5. Ногин В. А. Об обращении бесселевых потенциалов. Дифференц. уравнения. 18:8. 1982. С. 1407–1411.
6. Ногин В. А. Обращение бесселевых потенциалов с помощью гиперсингулярных интегралов. Изв. вузов. Матем. 3. 1985 С. 57–65.

7. Guliev V. S., Safarov Z. V. $B_{k,n}$-Bessel potentials and certain imbedding theorems in $B_{k,n}$-Sobolev–Liouville spaces. Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. 15. 2001. P. 68–80.
8. Guliev V. S., Serbetci A., Akbulut ., A., Mammadov Y.Y. Nikolskii–Besov and Lizorkin–Triebel spaces constructed on the base of the multidimensional Fourier–Bessel transform. Eurasian Math. J. 2 (3). 2011. P. 42–66.
9. Гольдман М.Л. Интегральные свойства обобщенных бесселевых потенциалов. ДАН. 2007. Т. 414, № 2. С. 159–164.
10. Гольдман М.Л. Перестановочно инвариантные оболочки обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса. ДАН. 2008. Т. 423. № 1. С. 14–18.
11. Гольдман М. Л. Конус перестановок для обобщенных бесселевых потенциалов. Труды МИАН, 260. 2008. С. 151–163.
12. Shishkina E., Ekincioğlu I., Keskin C. Generalized Bessel potential and its application to non-homogeneous singular screened Poisson equation. Integral Transforms and Special Functions. 2020. 1–16.
13. Прудников А П, Брычков Ю А, Маричев О И Интегралы и ряды Т. 2 Специальные функции. М.: Наука. 2003. 752 с.
14. Shishkina E.L. and Sitnik S. M. Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. Amsterdam: Elsevier, 2020. 592 p.
15. Джабраилов А.Л., Шишкина Э.Л. Обобщенный потенциал Бесселя и его обращение // В сборнике: Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов Международной научной конференции. Воронеж, 2022. С. 63-69.

§2. Свойства обобщенного потенциала Бесселя и его обращение методом аппроксимативного обратного оператора

Будем иметь дело с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя B_γ (см. [2], стр. 5):

$$(B_\gamma)_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t^\gamma}\frac{\partial}{\partial t}t^\gamma\frac{\partial}{\partial t}, \quad t > 0, \quad \gamma \in R.$$

Рассмотрим дробный интегральный оператор, который является дробной степенью $(I-\Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$, $\alpha > 0$, где I - единичный оператор, а Δ_γ - оператор Лапласа-Бесселя вида

$$\Delta_\gamma = (\Delta_\gamma)_x = \sum_{k=1}^{n} (B_{\gamma_k})_{x_k}.$$

Эта дробная сепень $(I - \Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$ при помощи преобразования Ханкеля сводится к умножению на степень $(1 + |x|^2)^{-\alpha/2}$.

Классический потенциал Бесселя, который реализует дробные степени оператора $(I - \Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}$, где Δ - оператор Лапласа изучен в [6]. В [3] был введен, а также построено пространство обобщенных потенциалов Бесселя (класс Лиувилля дробной B-гладкости) на основе B-гиперсингулярных интегралов. Ядра обобщенных потенциалов Бесселя рассматривались в [4]. В [1] были исследованы методы обращения обобщенного потенциала Бесселя.

Основные определения и понятия

Пусть R^n - n-мерное Евклидово пространство, тогда

$$R_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n, x_1 > 0, \dots, x_n > 0\},$$

$$\overline{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Через $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ обозначим мультииндекс, состоящий из положительных фиксированных действительных чисел $\gamma_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$.

Пусть$L_p^{\gamma}(R_+^n) = L_p^{\gamma}$, $1 \le p < \infty$ - пространство измеримых на R_+^n функции четных по каждой переменной x_i, $i = 1,\dots,n$ таких, чтот $\int_{R_+^n} |f(x)|^p x^{\gamma} dx < \infty$, где $x^{\gamma} = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$.

Для $p \ge 1$, the L_p^{γ}–норма f определяется формулой

$$||f||_{L_p^{\gamma}(R_+^n)} = ||f||_{p,\gamma} = (\int_{R_+^n} |f(x)|^p x^{\gamma} dx)^{1/p}.$$

Нормализованная функция Бесселя первого рода j_{ν} определяется формулой (см. [2], стр. 10)

$$j_{\nu}(x) = \frac{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}{x^{\nu}} J_{\nu}(x),$$

где J_{ν}- функция Бесселя первого рода.

Для $x \in R^n$ будемиспользовать обозначение

$$j_{\gamma}(x,\xi) = \prod_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i - 1}{2}}(x_i\xi_i), \qquad j_{\gamma}(0,\xi) = 1.$$

Многомерное преобразование Ханкеля функции $f \in L_1^{\gamma}(\mathrm{R}_+^n)$ определяется как

$$F_{\gamma}[f](\xi) = F_{\gamma}[f(x)](\xi) = \int_{R_+^n} f(x) j_{\gamma}(x,\xi) x^{\gamma} dx.$$

Пусть $f \in L_1^{\gamma}(R_+)$ и является функцией ограниченной вариации в окрестности точек непрерывности. Тогда для $\gamma > 0$ справедлива формула обращения

$$F_{\gamma}^{-1}[F_{\gamma}[f](\xi)](x) = f(x) = \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \int_{R_+^n} j_{\gamma}(x,\xi) F_{\gamma}[f](\xi) \xi^{\gamma} d\xi.$$

Многомерный обобщенный сдвиг определяется равенством

$$({}^{\gamma}T_x^y f)(x) = {}^{\gamma}T_x^y f(x) = ({}^{\gamma_1}T_{x_1}^{y_1} \dots {}^{\gamma_n}T_{x_n}^{y_n} f)(x),$$

где каждый одномерный обобщенный сдвиг $\gamma_i T_{x_i}^{y_i}$ действует для $i=1,\dots,n$ по формуле

$$\left({}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i} f\right)(x) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \int_0^\pi f\left(x_1,\dots,x_{i-1},\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_i y_i cos\varphi_i},x_{i+1},\dots,x_n\right) sin^{\gamma_i-1}\varphi_i \, d\varphi_i..$$

Обобщенная свертка, порожденная многомерным обобщенным сдвигом γT_x^y определяется как

$$(f*g)_\gamma(x) = (f*g)_\gamma = \int_{R_+^n} f(y)({}^\gamma T_x^y g)(x) y^\gamma dy. \quad (1)$$

Многомерное преобразование Ганкеля, примененное к обобщенной свертке (1), имеет вид

$$F_\gamma[(f*g)_\gamma(x)](\xi) = F_\gamma[f(x)](\xi) F_\gamma[g(x)](\xi).$$

Многомерный оператор Пуассона P_x^γ, действует на f по формуле

$$P_x^\gamma f(x) = C(\gamma)\int_0^\pi \dots \int_0^\pi f(x_1 cos\alpha_1,\dots,x_n cos\alpha_n) \prod_{i=1}^n sin^{\gamma_i-1}\alpha_i \, d\alpha_i,$$

где $\gamma_i > 0, i = 1,..,n,$

$$C(\gamma) = \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}$$

Обобщенный потенциал Бесселя и его свойства.

Определим сначала обобщенное Бесселево ядро вида $G_\alpha^\gamma(x) = F_\gamma^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-\alpha/2}](x)$, $\alpha > 0$. Для этого ядра верны следующие свойства.

1. $$G_\alpha^\gamma(x) = \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|),$$

где K_μ - модифицированная функция Бесселя второго рода,

2. $G_\alpha^\gamma(x)$ бесконечно дифференцируема за пределами начала координат,

3. при $|x| \to 0$ функция $G_\alpha^\gamma(x)$ допускает оценки

$$G_\alpha^\gamma(x): \frac{2^{n-|\gamma|}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)}{2^{\alpha-|\gamma|}}|x|^{\alpha-n-|\gamma|}, & \text{если} \quad 0<\alpha<n+|\gamma|; \\ -2^{1-n}\left(ln\left(\frac{|x|}{2}\right)+\vartheta\right), & \text{если} \quad \alpha=n+|\gamma|; \\ \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}\right)}{2^n}, & \text{если} \quad n+|\gamma|<\alpha. \end{cases}$$

4. при $|x| \to \infty$ функция $G_\alpha^\gamma(x)$ и допускает оценку

$$G_\alpha^\gamma(x): \frac{\sqrt{\pi}2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha+1}{2}}}{|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha+1}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}e^{-|x|},$$

5.

$$G_\alpha^\gamma(x) \in L_1^\gamma(R_+^n).$$

Обобщенный потенциал Бесселя определим соотношением

$$(G_\gamma^\alpha \varphi)(x) = \int_{R_+^n} G_\alpha^\gamma(y)({}^\gamma T_x^y \varphi(x))y^\gamma dy. \qquad (2)$$

Из свойства 5 ядра следует, что для функций $\phi \in L_p^\gamma(R_+^n)$, $1 \le p \le \infty$ операторг G_γ^α ограничен и

$$||G_\gamma^\alpha \phi||_{p,\gamma}||\varphi||_{p,\gamma}, \qquad \alpha > 0$$

Приведем основные свойства обобщенного потенциала Бесселя:

1. полугрупповое свойство

$$G_\gamma^\alpha G_\gamma^\beta \varphi = G_\gamma^{\alpha+\beta}\varphi, \qquad \varphi \in L_p^\gamma(R_+^n),$$

2. связь с итерированным оператором

$$(I-\Delta_\gamma)^k: (I-\Delta_\gamma)^k G_\gamma^{\alpha+2k}\varphi = G_\gamma^\alpha \varphi, \qquad k \in N, \qquad \varphi \in L_p^\gamma(R_+^n),$$

3. $G_\gamma^0 \varphi = \varphi, \qquad \varphi \in L_p^\gamma(R_+^n).$

Теперь рассмотрим связь между обобщенным потенциалом Бесселя и одномерным интегралом. Для этого нам понадобится обобщенный интеграл Пуассона вида

$$(P_t^\gamma \varphi)(x) = \int_{R_+^n} P_\gamma(y,t)({}^\gamma T_x^y \varphi(x)) y^\gamma dy, \qquad t > 0, \tag{3}$$

где

$$P_\gamma(y,t) = \frac{2^n \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \frac{t}{(t^2+|y|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}} \tag{4}$$

- ядро пуассоновского типа.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi \in L_p^\gamma(R_+^n), \quad 1 \le p \le \infty, \quad 0 < \alpha < 2(n+|\gamma|+1).$ *Тогда*

$$(G_\gamma^\alpha \varphi)(x) = \frac{2^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha-1}{2}} J_{\frac{\alpha-1}{2}}(t)(P_t^\gamma \varphi)(x)dt,$$

где P_t^γ - обобщенный интеграл Пуассона (3).

Лемма 1. *Ядро пуассоновского типа* $P_\gamma(x,\varepsilon)$ *обладает свойствами:*

1. $F_\gamma[P_\gamma(x,\varepsilon)](\xi) = e^{-\varepsilon|\xi|}$,

2. $\int_{R_+^n} P_\gamma(x,\varepsilon)x^\gamma dx = \int_{R_+^n} P_\gamma(x,1)x^\gamma dx = 1$,

3. $P_\gamma(x,\varepsilon) \in L_p^\gamma, 1 \le p \le \infty$.

Обращение B-потенциала Бесселя методом аппроксимативного обратного оператора

Рассмотрим задачу обращения обобщенного потенциального оператора Бесселя с помощью так называемого метода аппроксимативных обратных операторов (АОО).

Метод аппроксимативных обратных операторов (АОО), представленный в [7], является одним из возможных способов получения обратных операторов к сверточным операторам. Идея метода АОО состоит в том, что обратный оператор строится как предел некоторой последовательности операторов с интегрируемыми ядрами.

Чтобы применить этот метод к обращению B-потенциала Бесселя, сначала введем функцию

$$\omega_{\alpha,\gamma}(|x|) = \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod_{i=1}^{n}\ \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|) =$$

$$= \frac{2^{n-\alpha+2}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod_{i=1}^{n}\ \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\int_0^{\infty}\ t^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}-1}e^{-t-\frac{|x|^2}{4t}}dt, \qquad (5)$$

где K_μ - модифицированная функция Бесселя второго рода.

Тогда обобщенный потенциал Бесселя (2) можно представить в виде обобщенной свертки, с функцией, определенной формулой (5):

$$G_\gamma^\alpha \phi = \left(\frac{\omega_{\alpha,\gamma}(|x|)}{|x|^{n+|\gamma|-\alpha}} * \phi\right)_\gamma, \qquad \alpha > 0.$$

Теперь рассмотрим сверточные операторы вида

$$(G_{\gamma,\varepsilon}^\alpha)^{-1}\varphi = (g_{\gamma,\varepsilon}^\alpha * \varphi)_\gamma$$

с ядром

$$g_{\gamma,\varepsilon}^\alpha(x) = \left(F_\gamma^{-1}(1+|\xi|^2)^{\alpha/2}\cdot e^{-\varepsilon|\xi|}\right)(x). \qquad (6)$$

Для ядра (6) имеет место представление вида

$$g_{\gamma,\varepsilon}^\alpha(x) = \frac{2^{1-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^{n}\ \Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\int_0^{\infty}\ j_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|x|)(1 + r^2)^{\alpha/2}e^{-\varepsilon r}r^{n+|\gamma|-1}dr.$$

Лемма 2. *Пусть* $\varphi \in S(R_+^n)$, *где* S *– пространство Шварца и четна по каждой из переменных. Тогда оператор* $(G_{\gamma,\varepsilon}^{\alpha})^{-1}\varphi = (g_{\gamma,\varepsilon}^{\alpha} * \varphi)_\gamma =$
$\int_{R_+^n} g_{\gamma,\varepsilon}^{\alpha}(t)({}^\gamma T_x^t \varphi(x)) t^\gamma dt$

ограничен в L_p^γ, $\quad 1 < p < +\infty$.

Лемма 3. *Пусть* $\varphi \in S(R_+^n)$, *где* S *– пространство Шварца и четна по каждой из переменных. Тогда справедлива формула*

$$((G_\gamma^\alpha)_\varepsilon^{-1} G_\gamma^\alpha \varphi)(x) = (P_{\gamma,\varepsilon} f)(x),$$

где $(P_{\gamma,\varepsilon} f)(x)$ - обобщенная свертка с ядром пуассоновского типа (4)

$$(P_{\gamma,\varepsilon} f)(x) = (f(x) * P_\gamma(x,\varepsilon))_\gamma.$$

Доказательство. Имеем $F_\gamma[G_\gamma^\alpha \varphi](\xi) = (1+|\xi|^2)^{-\alpha/2} F_\gamma \varphi$.

Обозначим $G_\gamma^\alpha \varphi$ через ψ. Тогда

$$F_\gamma((G_\gamma^\alpha)_\varepsilon^{-1}\psi)(x) = F_\gamma\left(F_\gamma^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\alpha/2} \cdot e^{-\varepsilon|\xi|}](x) * \psi(x)\right)_\gamma =$$

$$= (1+|\xi|^2)^{\alpha/2} \cdot e^{-\varepsilon|\xi|}(x) \cdot F_\gamma \psi = (1+|\xi|^2)^{\alpha/2} \cdot e^{-\varepsilon|\xi|}(x) \cdot (1+|\xi|^2)^{-\alpha/2} F_\gamma \varphi$$
$$= e^{-\varepsilon|\xi|} \cdot F_\gamma \varphi$$

Что дает представление вида

$$((G_\gamma^\alpha)_\varepsilon^{-1} G_\gamma^\alpha \varphi)(x) = F_\gamma^{-1}\left(e^{-\varepsilon|\xi|} \cdot F_\gamma \varphi\right)(x) = \left(F_\gamma^{-1}(e^{-\varepsilon|\xi|})(x) * F_\gamma \varphi\right)_\gamma.$$

Находя обратное преобразование Ханкеля, получим

$$(F_\gamma^{-1} e^{-\varepsilon|\xi|})(x) = \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \frac{2^{|\gamma|}\varepsilon \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}} =$$

$$= \frac{2^n \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \varepsilon(\varepsilon^2+|x|^2)^{-\frac{n+|\gamma|+1}{2}} = P_\gamma(x,\varepsilon),$$

где$P_\gamma(x,\varepsilon)$ - ядро (4). По Лемме 1 $P_\gamma(x,\varepsilon)\in L_p^\gamma$. Доказательство закончено.

Теорема 2. *Пусть* $\phi\in L_p^\gamma$, $1\le p\le+\infty$ *и*

$$(G_\gamma^\alpha)^{-1}\varphi(x)=\overset{L_p^\gamma}{\lim_{\varepsilon\to 0}}(G_{\gamma,\varepsilon}^\alpha)^{-1}\varphi(x)=\left(F_\gamma^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\alpha/2}\cdot e^{-\varepsilon|\xi|}](x)*\varphi(x)\right)_\gamma.$$

Тогда равенство $(G_\gamma^\alpha)^{-1}G_\gamma^\alpha\varphi(x)=\varphi(x)$справедливо.

Доказательство. В силу Леммы 3 достаточно доказать, что

$$||(P_{\gamma,\varepsilon}f)(x)-f(x)||_{p,\gamma}\to 0,\quad \varepsilon\to 0.$$

Учитывая Лемму 1, получим

$$(f(x)*P_\gamma(x,\varepsilon))_\gamma-f(x)=\int_{R_+^n}[{}^\gamma T_x^y f(x)-f(y)]P_\gamma(y,\varepsilon)y^\gamma dy.$$

Применим обобщенное неравенство Минковского, будем иметь

$$||(f(x)*P_\gamma(x,\varepsilon))_\gamma-f(x)||_{p,\gamma}\le$$

$$\le\int_{R_+^n}\left(\int_{R_+^n}[{}^\gamma T_x^y f(x)-f(x)]^p x^\gamma dx\right)^{\frac{1}{p}}|P_\gamma(y,\varepsilon)|y^\gamma dy=\{y=\varepsilon t\}=$$

$$=\int_{R_+^n}\left(\int_{R_+^n}[{}^\gamma T_x^{\varepsilon t}f(x)-f(x)]^p x^\gamma dx\right)^{\frac{1}{p}}\left|P_\gamma(t,1)\right|t^\gamma dt. \qquad (7)$$

Лемма 3.6 на стр. 166 из [5] утверждает, что

$$||{}^\gamma T_x^{\varepsilon t}f(x)-f(x)||_{p,\gamma}\le c||f(x)||_{p,\gamma}$$

для $f\in L_p^\gamma$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{R_+^n}[{}^\gamma T_x^{\varepsilon t}f(x)-f(x)]^p x^\gamma dx\right)^{\frac{1}{p}}=0.$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости интеграл

$$\int_{R_+^n}\left(\int_{R_+^n}[{}^\gamma\boldsymbol{T}_x^{\varepsilon t}f(x)-f(x)]^p x^\gamma dx\right)^{\frac{1}{p}}|P_\gamma(t,1)|t^\gamma dt$$

стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$, поскольку подынтегральное выражение мажорируется интегрируемой функцией с $||f||_{p,\gamma}|P_\gamma(t,1)|t^\gamma$.Тогда и $||(f(x)*P_\gamma(x,\varepsilon))_\gamma-f(x)||_{p,\gamma}$ стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$в силу (6). Доказательство закончено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dzhabrailov A., Luchko Y., Shishkina E. Two Forms of an Inverse Operator to the Generalized Bessel Potential //Axioms. 2021. N 10(232). P. 1-20.
2. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука-Физматлит, 1997. 200 с.
3. Ляхов Л.Н., Половинкина М. В. Пространство весовых потенциалов Бесселя // Дифференциальные уравнения и динамические системы, Сборник статей, Труды МИАН, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2005. N 250. С. 192-197.
4. Ляхов Л.Н., Феоктистова А.А. Оценки смешанных в-производных весового ядра Бесселя-Макдональда // Научные ведомости белгородского государственного университета. 2011. N 23(118). С. 79-86.
5. Платонов С. С. Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближений функций на полупрямой // Сиб. матем. журн. 2009. N **50**:1. С. 154-174.
6. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И., Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
7. Samko S.G. A new approach to the inversion of the Riesz potential operator // Fractional Calculus and Applied Analysis. 1998. N 1(3). P. 225-245.

8. Джабраилов А.Л., Шишкина Э.Л. Обобщенный потенциал Бесселя и его свойства // В книге: Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы. Сборник материалов международной конференции. Белгород, 2021. С. 96-98.
9. Джабраилов А.Л., Шишкина Э.Л. Обращение и свойства обобщенного потенциала Бесселя // В сборнике: Современная математика и ее приложения. Сборник материаловII Международной научно-практической конференции. Грозный, 2021. С. 98-105.

§3. Связь обобщенных потенциалов Бесселя и решения сингулярного уравнения теплопроводности

Рассматривается обобщение ядра Гаусса-Вейерштрасса, являющееся решением сингулярного уравнения теплопроводности, и соответствующий ему интеграл. Изучаем их свойства. Далее, мы показываем, что обобщенный потенциал Бесселя функции, интегрируемой в p-й степени со степенным весом, может быть представлен интегралом простого вида, при помощи ядра Гаусса–Вейерштрасса.

Будем иметь дело с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя B_γ (см. [1], стр. 5):

$$\left(B_\gamma\right)_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t^\gamma}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\partial^\gamma}\frac{\partial}{\partial t}t^\gamma\frac{\partial}{\partial t}, \qquad t > 0, \qquad \gamma \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Мы рассматриваем дробное интегрирование, которое представляет собой дробную степень оператора $\left(I - \Delta_\gamma\right)^{\alpha/2}$ $, \alpha\ >\ 0$, где I $-$ единичный оператор и Δ_γ $-$ оператор Лапласа-Бесселя вида

$$\Delta_\gamma = \left(\Delta_\gamma\right)_x = \sum_{k=1}^{n}\left(B_{\gamma_k}\right)_{x_k}. \tag{2}$$

Дробная степень $\left(I - \Delta_\gamma\right)^{\alpha-/2}$ при помощи преобразования Ханкеля сводится к умножению на степень $(1 + |x|^2)^{-\alpha/2}$. А именно, дробная степень

$(I-\Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$ реализуется как обобщенная свертка прообраза преобразования Ханкеля функции $(1+|x|^2)^{-\alpha/2}$ и некоторой функции. Такую свертку мы будем называть обобщенным потенциалом Бесселя.

Классический потенциал Бесселя, реализующий дробные степени оператора $(I-\Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$, где $\Delta -$ оператор Лапласа, широко изучен. Такой потенциал появился в работах Н. Ароншайна и К.Т. Смита [2] и А.П. Кальдерона [3] в 1961 г. Пространство потенциалов Бесселя, которое иногда называют пространством Лиувилля дробной гладкости α, является расширением пространств Соболева $L_p^m(\mathbb{R}^n)$ на случай дробного порядка α, поэтому его также называют пространствами Соболева дробного порядка [4, 5]. Результаты о пространстве бесселевых потенциалов были получены И. Стейном [6] для случая $0<\alpha<2$ и И.П. Лизоркиным [7] в общем случае. Обращение потенциалов Бесселя с помощью гиперсингулярных интегралов было дано В. А. Ногиным [8,9] в 1981–85 гг.; М.Л. Гольдманом в [10–12] получены оптимальные вложения пространств потенциалов типа Бесселя.

Пространство обобщенных потенциалов Бесселя $\boldsymbol{B_\gamma^\alpha}$**,** построенного с использованием преобразования Ханкеля, было впервые введено Л.Н. Ляховым и М.В. Половинкиной в [13] с использованием подхода Стейна–Лизоркина. В [13] введенные ранее Л.Н. Ляховым в [14, 15] B-гиперсингулярные интегралы и B-потенциалы Рисса были применены для построения нормы в B_γ^α.

В.С. Гулиев, З.В. Сафаров в [16] изучали потенциал Бесселя, порожденный дифференциальными операторами Бесселя. В [16] доказана ограниченность в весовом пространстве Лебега такого потенциала и получены теоремы вложения в пространствах $B_{k,n}$-Соболева-Лиувилля. В [17] потенциалы Бесселя охарактеризованы в терминах пространств B-Лизоркина–Трибеля. Также в этой статье доказано неравенство Юнга для B-сверточных операторов в пространствах B_γ^α и даны некоторые приложения, использующие дифференциальный оператор Лапласа–Бесселя.

Основные определения и утверждения.

Пусть $\mathbb{R}^n - n$-мерное евклидово пространство,

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}.$$

$$\overline{\mathbb{R}}^n_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad x_1 > 0, \dots, x_n > 0\},$$

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) -$ мультииндекс, составленный из положительных фиксированных вещественных чисел $\gamma_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ и $|\gamma| = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$..

Пусть $\Omega -$ конечное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, симметричное относительно каждой гиперплоскости $x_i = 0, i = 1, \dots, n, \Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{R}^n_+$, где $\overline{\mathbb{R}}^n_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$.

Класс $C^0_{ev}(\Omega_+)$ состоит из непрерывных на Ω_+ функций, продолжаемых непрерывно четным образом на Ω при $x_i < 0, i = 1, \dots, 0$.

Пусть $L^\gamma_p(\mathbb{R}^n_+) = L^\gamma_p, 1 \leq p < \infty -$ пространство всех измеримых на $\mathbb{R}^n_+$ функций, четных по каждой из переменных $x_i, i = 1, \dots, n$, таких, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p\, x^\gamma dx < \infty,$$

где здесь и далее

$$x^\gamma = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\gamma_i}.$$

Для вещественных чисел $p \geq 1$ норма в L^γ_p функции f определяется равенством

$$\|f\|_{L^\gamma_p(\mathbb{R}^n_+)} = \|f\|_{p,\gamma} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p\, x^\gamma dx \right)^{1/p}.$$

Известно (см. [1]), что $L^\gamma_p -$ банахово пространство.

Нормированная функция Бесселя первого рода j_v определяется формулой (см. [1], стр. 10 и [18])

$$j_v(x) = \frac{2^v \Gamma(v+1)}{x^v} J_v(x), \tag{3}$$

где $j_v -$ функция Бесселя первого рода.

Для $x \in \mathbb{R}^n$ мы будем использовать обозначение

$$j_\gamma(x,\xi) = \prod_{i=1}^{n} j_{\frac{\gamma_i - 1}{2}}(x_i, \xi_i), \qquad j_\gamma(0,\xi) = 1. \tag{4}$$

Многомерное преобразование Ханкеля функции $f \in L_1^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ выражается как

$$F_\gamma[f](\xi) = F_\gamma[f(x)](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f(x)\, j_\gamma(x,\xi) x^\gamma dx.$$

Пусть $f \in L_1^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ и представляет собой функцию ограниченной вариации в окрестности точки x непрерывности f. Тогда для $\gamma > 0$ формула обращения имеет вид

$$F_\gamma^{-1}\left[\hat{f}(\xi)\right](x) = f(x) = \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^{n} \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j + 1}{2}\right)} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} j_\gamma(x,\xi)\, \hat{f}(\xi) \xi^\gamma d\xi.$$

Часть шара $|x| \le r, |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, принадлежащая $\mathbb{R}_+^n$, обозначается $B_r^+(n)$. Граница $B_r^+(n)$ обозначается $S_r^+(n)$ и состоит из части сферы $\{x \in \mathbb{R}_+^n : |x| = r\}$ и частей координатных гиперплоскостей $x_i = 0, i = 1, \dots, n$, таких что $|x_i| \le r$.

Многомерный обобщенный сдвиг определяется равенством

$$({}^\gamma T_x^y f)(x) = {}^\gamma T_x^y f(x) = ({}^{\gamma_1} T_{x_1}^{y_1} \dots {}^{\gamma_n} T_{x_n}^{y_n} f)(x), \tag{5}$$

где каждый одномерный обобщенный сдвиг ${}^{\gamma_i} T_{x_i}^{y_i}$ для $i = 1, \dots, n$ действует по формуле (см. [18])

$$({}^{\gamma_i} T_{x_i}^{y_i} f)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_j + 1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma_j}{2}\right)} \times$$

$$\times \int\limits_0^\pi f(x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos\varphi_i}, x_{i+1}, \dots, x_n)\, sin^{\gamma_i - 1}\varphi_i d\varphi_i, \;\; \gamma_i > 0.$$

Для $\gamma_i = 0$ обобщенный сдвиг ${}^{\gamma_i} T_{x_i}^{y_i}$ имеет в

$${}^0 T_{x_i}^{y_i} = \frac{f(x+y) - f(x-y)}{2}$$

Справедлива формула (см. [19])

$$ {}^{\gamma}T_x^y j_\gamma(x,\xi) = j_\gamma(x,\xi) j_\gamma(y,\xi). \qquad (6)$$

Обобщенная свертка, порожденная ${}^{\gamma}T_x^y$ имеет вид

$$(f*g)_\gamma(x) = (f*g)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f(y)\left({}^{\gamma}T_x^y g\right)(x) y^\gamma dy. \qquad (7)$$

Преобразование Ханкеля, действующее на обобщенную свертку (7), дает

$$F_\gamma\big[(f*g)_\gamma(x)\big](\xi) = F_\gamma[f(x)](\xi) F_\gamma[g(x)](\xi). \qquad (8)$$

Свойства ядра типа Гаусса-Вейерштрасса. Рассмотрим функцию вид

$$W_\gamma(x,t) = C_{n,\gamma} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}}, \qquad C_{n,\gamma} = \frac{2^{-|\gamma|}}{\prod_{i=1}^2 \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}. \qquad (9)$$

Функцию (9) будем называть ядром типа Гаусса-Вейерштрасса. Ядро (9) имеет ряд замечательных свойств, в частности является сглаживающим ядром, используемым в определении преобразования Вейерштрасса. Кроме того, с таким ядром тесно связана производящая функция полиномов Эрмита. Ядро вида (9) находит свое применение в теории вероятности, статистике, теории ортогональных полиномов, при построении фильтров в цифровой обработке изображений.

Теорема 1. *Для ядра типа Гаусса-Вейерштрасса справедливы следующие свойства: (1) ядро (9) допускает оценку вида*

$$0 < W_{\gamma c(x,t)} < \frac{C_{n,\gamma}}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \qquad (10)$$

для всех $x \in \mathbb{R}_+^n, t > 0$ *и* $W_\gamma(x,t)$ *является решением сингулярного уравнения теплопроводности вида*

$$u_t = \Delta_\gamma u, \qquad u = u(x,t), \qquad (11)$$

(2) если $t > 0, \eta \geq 0$ *и* g *– измеримая на* $(0,\infty)$*, то*

$$\int\limits_{|x|\geq\eta} g(|x|^2)\, W_\gamma(x,t) x^\gamma dx = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \int\limits_{\frac{\eta^2}{4t}} g(4t\sigma) e^{-s} s^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1} ds \quad (12)$$

всякий раз, когда интеграл справа существует. В частности, $W_\gamma(x,t)$ *является усредняющим ядром*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} W_\gamma(x,t)x^\gamma dx = 1 \tag{13}$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left(\frac{|x|^2}{4t}\right)^a W_\gamma(x,t)x^\gamma dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+a\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}. \tag{14}$$

Доказательство.

(1) Оценка ядра (9) очевидна. Покажем, что оно удовлетворяет уравнению (11). Имеем:

$$\Delta_\gamma \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} = \frac{1}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}}\sum_{i=1}^n B_{\gamma_i} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{1}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}}\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\frac{\partial}{\partial x_i}x_i^{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial x_i}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} =$$

$$= \frac{1}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}}\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\frac{\partial}{\partial x_i}x_i^{\gamma_i}\left(-\frac{2x_i}{4t}\right)e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = -\frac{1}{2t^{\frac{n+|\gamma|}{2}+1}}\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\frac{\partial}{\partial x_i}x_i^{\gamma_{i+1}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

$$= -\frac{1}{2t^{\frac{n+|\gamma|}{2}+1}}\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\left((\gamma_i+1)x_i^{\gamma_i} + x_i^{\gamma_{i+1}}\left(-\frac{2x_i}{4t}\right)\right)e^{-\frac{|x|^2}{4t}} =$$

$$= -\frac{1}{2t^{\frac{n+|\gamma|}{2}+1}}\sum_{i=1}^n \left((\gamma_i+1) - \frac{x_i^2}{2t}\right)e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{2t^{\frac{n+|\gamma|}{2}+1}}\left(\frac{|x|^2}{2t} - (n+|\gamma|)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{2t^{\frac{n+|\gamma|}{2}+1}}\left(\frac{|x|^2}{2t} - (n+|\gamma|)\right),$$

следовательно, $W_\gamma(x,t)$ – есть решение уравнения (11)

(2) Произведем сферическую замену $x = r\sigma$, получим

$$\int\limits_{|x|\geq\eta} g(|x|^2)\, W_\gamma(x,t)x^\gamma dx = \int\limits_\eta^\infty g(r^2)\, r^{n+|\gamma|-1}dr \int\limits_{S_1^+(n)} W_\gamma(r\sigma,t)\,\sigma^\gamma dS =$$

$$= \frac{C_{n,\gamma}}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}}\int\limits_\eta^\infty g(r^2)e^{-\frac{|x|^2}{4t}}r^{n+|\gamma|-1}\,dr \int\limits_{S_1^+(n)} \sigma^\gamma dS = \{r^2 = 4ts\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \int_{\frac{\eta^2}{4t}}^{\infty} g(4ts) e^{-s} s^{\frac{n+|\gamma|}{2}} ds,$$

что и дает (12). В частности, при $g = 1$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} W_\gamma(x,t) x^\gamma dx =$$

$$= \lim_{\eta \to 0} \int_{|x| \geq \eta} W_\gamma(x,t) x^\gamma dx = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \lim_{\eta \to 0} \int_{\frac{\eta^2}{4t}}^{\infty} e^{-s} s^{\frac{n+|\gamma|}{2}} ds = 1,$$

что совпадает с (13).

При $g = |x|^{2a}$

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |x|^{2a} W_\gamma(x,t) x^\gamma dx = \lim_{\eta \to 0} \int_{|x| \geq \eta} |x|^{2a} W_\gamma(x,t) x^\gamma dx =$$

$$= \frac{(4t)^a}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \lim_{\eta \to 0} \int_{\frac{\eta^2}{4t}}^{\infty} s^a e^{-s} s^{\frac{n+|\gamma|}{2}} ds = (4t)^a \frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2} + a\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)},$$

что и приводит к (14).

Свойства обобщенного интеграла Гаусса-Вейерштрасса.

Пусть $t > 0$. Для дальнейшего нам понадобится обобщенный интеграл Гаусса-Вейерштрасса вида

$$\left(\mathcal{W}_t^\gamma \varphi\right)(x) = u_\gamma(x,t) = \int_{\mathbb{R}_+^n} W_\gamma(x,t) \left({}^\gamma T_a^y \varphi(a) \right) y^\gamma dy \qquad (15)$$

Теорема 2. *Пусть $\varphi -$ измеримая на $\mathbb{R}_+^n$ функция такая, что обобщенный интеграл Гаусса-Вейерштрасса (15) от ϕ существует в точке $(a,b), a \in \mathbb{R}_+^n, b > 0$ и пусть $S = \mathbb{R}_+^n \times (0,b)$ существует для всех $(x,t) \in S$ и $u_\gamma(x,t) -$ есть решение уравнения теплопроводности вида $u_t = \Delta_\gamma u, u = u(x,t)$ на S.*

Доказательство. Пусть $(x,t) \in S$. Мы имеем по условию теоремы, что интеграл

$$u_\gamma(a,b) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} W_\gamma(y,b)\left({}^\gamma T_a^y \varphi(a)\right) y^\gamma dy \tag{16}$$

сходится.

Пусть $(x,t) \in S$

$$D_+ = \left\{ y \in \mathbb{R}^n_+ : |a-y| \geq \frac{\beta|a-x|}{\beta-\tau} \right\}, \qquad E_+ = \mathbb{R}^n_+ / D_+,$$

где $\tau = \sqrt{t}, \beta = \sqrt{b}$. Тогда имеем

$$u_\gamma(x,t) = \int\limits_{D_+} \left({}^\gamma T_x^y W_\gamma(x,t)\right) \varphi(y) y^\gamma\, dy + \int\limits_{E_+} \left({}^\gamma T_x^y W_\gamma(x,t)\right) \varphi(y) y^\gamma dy. \tag{17}$$

Пусть $\langle xy\cos\varphi\rangle = x_1 y_1 \cos\varphi_1 + \cdots + x_n y_n \cos\varphi_n$ и

$$C(\gamma) = \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}.$$

В интеграле $\int_{D_+}\left({}^\gamma T_x^y W_\gamma(x,t)\right)\varphi(y)y^\gamma\,dy$ перейдем к координатам

$$\tilde{y}_1 = y_1 \cos\varphi_1, \qquad \tilde{y}_2 = y_1 \sin\varphi_1,$$

$$\tilde{y}_2 = y_2 \cos\varphi_2, \qquad \tilde{y}_4 = y_2 \sin\varphi_2, \ldots,$$

$$\tilde{y}_{2n-1} = y_n \cos\varphi_n, \qquad \tilde{y}_{2n} = y_n \sin\varphi_n,$$

получим

$$\int\limits_{D_+} \left({}^\gamma T_x^y W_\gamma(x,t)\right) \varphi(y) y^\gamma\, dy = \frac{C_{n,\gamma}}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \int\limits_{D_+} \left({}^\gamma T_x^y e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right) \varphi(y) y^\gamma dy =$$

$$\frac{C_{n,\gamma} C(\gamma)}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \int\limits_{D_+} \left(\int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi exp\left(-\frac{1}{4t}[|x|^2 + |y|^2\right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\langle xy\cos\varphi\rangle]\right) \prod_{i=1}^{n} \sin^{\gamma_i - 1}\varphi_i d\varphi_i \right) \varphi(y) y^\gamma dy =$$

$$=\frac{C_{n,\gamma}C(\gamma)}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}}\int\limits_{D_+} exp\left(-\frac{1}{4t}[(x_1-\tilde{y}_1)^2+\tilde{y}_2^2+\cdots\right.$$

$$\left.+(x_n-\tilde{y}_{2n-1}]\right)\varphi(y)\prod_{i=1}^{n} y_{2i}^{\gamma_i-1}\,x^\gamma d\tilde{y}=$$

$$=\frac{C_{n,\gamma}C(\gamma)}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}}\int\limits_{D_+} exp\left(-\frac{1}{4t}[(x-\tilde{y}')^2+\tilde{y}_2^2+\ldots+(x_n-\tilde{y}_{2n-1})^2\right.$$

$$\left.+\tilde{y}_{2n}^2]\right)\varphi(y)\prod_{i=1}^{n} y_{2i}^{\gamma_i-1}\,x^\gamma d\tilde{y}=$$

$$=\frac{C_{n,\gamma}C(\gamma)}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}}\int\limits_{D_+} exp\left(-\frac{1}{4t}(|x-\tilde{y}'|^2+|\tilde{y}''|^2)\right)\varphi(y)\prod_{i=1}^{n} y_{2i}^{\gamma_i-1}\,x^\gamma d\tilde{y},$$

где $\tilde{y}=(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_{2n})=(\tilde{y}',\tilde{y}''),\tilde{y}'=(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_{2n-1}),\tilde{y}''=(\tilde{y}_2,\ldots,\tilde{y}_{2n})$,

$\widetilde{D}_+=$

$$=\left\{\tilde{y}\in\mathbb{R}^{2n}\colon\left(\sqrt{\tilde{y}_1^2+\tilde{y}_2^2},\ldots,\sqrt{\tilde{y}_{2n-1}^2+\tilde{y}_{2n}^2}\right)\in D_+, y_{2i}^{\gamma_i-1}>0,\qquad i=1,\ldots,n\right\}.$$

Если $\tilde{y}\in\widetilde{D}_+$, то $y\in D_+$ и

$$|x-\tilde{y}'|^2+|\tilde{y}''|^2=|x-y|^2\geq(|a-y|-|a-x|)^2\geq$$

$$\geq|a-y|\left(1-\frac{\beta-\tau}{\beta}\right)^2=|a-y|^2\frac{\tau^2}{\beta^2}=(|a-\tilde{y}'|^2+|\tilde{y}''|^2)\frac{\tau^2}{\beta^2},$$

следовательно,

$$\exp\left(-\frac{1}{4t}(|x-\tilde{y}'|^2+|\tilde{y}''|^2)\right)\leq\exp\left(-\frac{1}{4t}(|a-\tilde{y}'|^2+|\tilde{y}''|^2)\right).$$

Тогда, применяя это неравенство и возвращаясь обратно к переменным $y=(y_1,\ldots,y_n)$, получим

$$\int\limits_{D_+}\left({}^\gamma T_x^y W_\gamma(x,t)\right)\varphi(y)y^\gamma\,dy\leq$$

$$\leq\frac{C_{n,\gamma}C(\gamma)}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}}\int\limits_{D_+} exp\left(-\frac{1}{4t}\frac{\tau^2}{\beta^2}-\frac{1}{4t}[(a_1-\tilde{y}')^2+\tilde{y}_2^2+]=\right.$$

$$\ldots + (a_n - \tilde{y}_{2n-1})^2 + \tilde{y}_{2n}^2])\varphi(y) \prod_{i=1}^{n} y_{2i}^{\gamma_i - 1} x^\gamma d\tilde{y}$$

$$= \frac{2^{-|\gamma|}}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(\frac{\gamma_i + 1}{2}\right) t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \int\limits_{D_+} e^{-\frac{|y|^2}{4b}} \left({}^\gamma T_x^y \varphi(a) \right) y^\gamma dy =$$

$$= \left(\frac{b}{t}\right)^{\frac{n+|\gamma|}{2}} \int\limits_{D_+} W_\gamma(y,b) \left({}^\gamma T_x^y \varphi(a) \right) y^\gamma dy < \infty.$$

Здесь мы учли сходимость интеграла (16).

Покажем теперь ограниченность интеграла $\int_{D_+} \left({}^\gamma T_x^y W_\gamma(x,t) \right) \varphi(y) y^\gamma \, dy$. В силу оценки обобщенного сдвига и (10) для всех $y \in E_+$, получим

$$\int\limits_{E_+} \left| \left({}^\gamma T_x^y W_\gamma(x,t) \right) \varphi(y) \right| y^\gamma dy \leq \frac{C_{n,\gamma} C(\gamma)}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \int\limits_{E_+} |\varphi(y)| \, y^\gamma dy =$$

$$= e^{\frac{|a-x|^2}{4(\beta-\tau)^2}} \left(\frac{\beta}{\tau}\right)^{n+|\gamma|} C_{n,\gamma} \frac{e^{\frac{|a-x|^2}{4(\beta-\tau)^2}}}{b^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \int\limits_{E_+} |\varphi(y)| \, y^\gamma dy.$$

Для $y \in E_+$ имеем $|a-y| \leq \frac{\beta|a-x|}{\beta-\tau}$ и

$$W_\gamma(a-y,b) = C_{n,\gamma} \frac{e^{-\frac{|a-y|^2}{4(\beta-\tau)^2}}}{b^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \int\limits_{E_+} |\varphi(y)| \, y^\gamma dy,$$

следовательно, в силу сходимости интеграла (16)

$$\int\limits_{E_+} \left| \left({}^\gamma T_x^y W_\gamma(x,t) \right) \varphi(y) \right| y^\gamma dy \leq$$

$$\leq e^{\frac{|a-x|^2}{4(\beta-\tau)^2}} \left(\frac{\beta}{\tau}\right)^{n+|\gamma|} \int\limits_{E_+} W_\gamma(a-y,b) |\varphi(y)| y^\gamma dy < \infty.$$

Тогда из (17) мы получаем, что $u_\gamma(x,t)$ существует для всех $(x,t) \in S$. То, что $u_\gamma(x,t)$ есть решение уравнения теплопроводности вида $u_t = \Delta_\gamma u, u = (x,t)$ на S следует из Теоремы 3.1. Теорема доказана.

Лемма 1. *Если* $\varphi \in C^0_{ev}(S)$, *то* $\lim\limits_{(x,t)\to(x_0,0)} u_\gamma(x,y) = \varphi(x_0)$ *на* S *равномерно по* x_0 *в любом компактном подмножестве* $\mathbb{R}^n_+$. *Если, кроме того* ϕ *ограничена и равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}^n_+$, *то сходимость равномерна на* $\mathbb{R}^n_+$.

Следствие 1. *Функция* $u_\gamma(x,t)$ *есть решение задачи Коши вида*

$$u_t = \Delta_\gamma u, \qquad u = u(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

на $S = \mathbb{R}^n_+ \times (0,b)$ *при* $\varphi \in C^0_{ev}(S)$.

Пример 1. Решение задачи Коши

$$u_t = \Delta_\gamma u, \qquad u = u(x,t), \qquad t \in (0,b), \qquad x \in \mathbb{R}^n_+,$$

$$u(x,0) = j_\gamma(x,\xi), \qquad x \in \mathbb{R}^n_+,$$

определяется формулой

$$u_\gamma(x,t) = \frac{C_{n,\gamma} j_\gamma(x,\xi)}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} j_\gamma(y,\xi) y^\gamma dy$$

Здесь мы учли формулу (6). Найдем интеграл:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} j_\gamma(y,\xi) y^\gamma dy = \{y = r\sigma\} = \int\limits_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{n+|\gamma|-1} dr \int\limits_{S_1^+(n)} j_\gamma(r\sigma,\xi)\sigma^\gamma dS.$$

Применяя формулу (см. [19], формула 246) вида

$$\int\limits_{S_1^+(n)} j_\gamma(r\sigma,\xi)\sigma^\gamma dS = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} j_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|\xi|),$$

получим

$$u_\gamma(x,t) = \frac{C_{n,\gamma} j_\gamma(x,\xi)}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{n+|\gamma|-1} j_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|\xi|) dr =$$

$$= \frac{C_{n,\gamma} j_\gamma(x,\xi)}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \frac{2^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{|\xi|^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{\frac{n+|\gamma|}{2}} j_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|\xi|) dr =$$

$$= \frac{2-|\gamma|}{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \frac{j_\gamma(x,\xi)}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \frac{2^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{|\xi|^{\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)-1}} 2^{\frac{n+|\gamma|}{2}} e^{-t|\xi|^2} |\xi|^{2^{\frac{\eta+|\gamma|}{2}-1}} t^{2^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}}.$$

После упрощения будем

$$u_\gamma(x,t) = e^{-t|\xi|^2} j_\gamma(x,\xi).$$

Определение обобщенного потенциала Бесселя и его свойства. Представление обобщенного потенциала Бесселя через обобщенный интеграл Гаусса-Вейерштрасса.

Определим обобщенный потенциал Бесселя соотношением

$$\left(G_\gamma^\alpha \varphi\right)(x) =$$
$$= \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |y|^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|y|) \left({}^\gamma T_x^y \varphi(x)\right) y^\gamma dy. \quad (18)$$

Также можем записать

$$\left(G_\gamma^\alpha \varphi\right)(x) = \left(G_\alpha^\gamma(x) * \varphi(x)\right)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} G_\gamma^\alpha(y) \left({}^\gamma T_x^y \varphi(x)\right) y^\gamma dy, \quad (19)$$

где $G_\gamma^\alpha(x) = \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|) -$ обобщенное ядро Бесселя. Функция $K_\alpha(x)$ — это модифицированная функция Бесселя второго рода (см. [20, 21]).

Для обобщенного ядра Бесселя справедливы свойства [22]:

1) преобразование Ханкеля ядра $G_\gamma^\alpha(x)$ имеет вид$F_\gamma\left[G_\alpha^\gamma\right](\xi) = (1+|\xi|^2)^{-\alpha/2}$,
2) $G_\alpha^\gamma(x)$ бесконечно дифференцируема вне начала координат,
3) для $|x| \to 0$ функция $G_\alpha^\gamma(x)$ допускает оценку

$$G_\alpha^\gamma(x) \sim \frac{2^{n-|\gamma|}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)}{2^{n-|\gamma|}} |x|^{\alpha-n-|\gamma|}, \text{ если } 0<\alpha<n+|\gamma|; \\ -2^{1-n}\left(\ln\left(\frac{|x|}{2}\right)+\vartheta\right), \text{ если } \alpha = n+|\gamma|; \\ \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}\right)}{2^n}, \text{ если } n+|\gamma|<\alpha, \end{cases} \quad (20)$$

4) для $|x| \to \infty$ функция $G_\alpha^\gamma(x)$ допускает оценку

$$G_\alpha^\gamma(x) \sim \frac{\sqrt{\pi} 2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha+1}{2}}}{|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha+1}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} e^{-|x|},$$

5) $G_\alpha^\gamma(x) \in L_1^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$,

6) $\left(G_\alpha^\gamma * G_\beta^\gamma\right)_\gamma = G_{\alpha+\beta}^\gamma, \alpha > 0, \beta > 0$, где $\left(G_\alpha^\gamma * G_\beta^\gamma\right)_\gamma$ – обобщенная свертка (7),

7) $\left(I - \Delta_\gamma\right)^k G_{\alpha+2k}^\gamma = G_\alpha^\gamma, k \in \mathbb{N}$,

8) $\int_{\mathbb{R}_+^n} G_\alpha^\gamma(x) x^\gamma dx = 1$.

Из этих свойств следует, что для функции $\varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n), 1 \le p \le \infty$ оператор G_α^γ ограничен и

$$\left\|G_\alpha^\gamma \varphi\right\|_{p,\gamma} \le \|\varphi\|_{p,\gamma}, \qquad \alpha > 0.$$

Кроме того, справедливы следующие основные свойства обобщенного потенциала Бесселя

1) полугрупповое свойство $G_\gamma^\alpha G_\gamma^\beta\ \varphi = G_\gamma^{\alpha+\beta}, \varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$,

2) $\left(I - \Delta_\gamma\right)^k G_\gamma^{\alpha+2k} \varphi = G_\gamma^\alpha \varphi, k \in \mathbb{N}, \varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$,

3) $G_\gamma^0 \varphi = \varphi, \varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$.

Следовательно, при $\alpha = k \in N$ оператор G_γ^α можно рассматривать как конструктивную реализацию отрицательной степени итерированного оператора $\left(I - \Delta_\gamma\right)^k$.

Формулы обращения обобщенного потенциала Бесселя были получены в [23]. Теперь обратимся к соотношению между обобщенным потенциалом Бесселя и одномерным обобщенным интегралом Гаусса-Вейерштрасса.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha > 0, 1 \le p \le \infty$, $\varphi \in L_p^\gamma$ *и* $u_\gamma(x,t) -$ *обобщенный интеграл Гаусса-Вейерштрасса функции* φ *на* Ω. *Тогда обобщенный потенциал Бесселя* $G_\gamma^\alpha \varphi$ *почти для всех* x *совпадает с интегралом*

$$G_\gamma^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} u_\gamma(x,t)\, dt. \tag{21}$$

Доказательство. Мы имеем

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{-t}u_\gamma(x,t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\left({}^\gamma T_x^y\varphi(x)\right)y^\gamma dy\int\limits_0^\infty W_\gamma(y,t)t^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{-t}dt =$$

$$= \frac{2^{-|\gamma|}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\left({}^\gamma T_x^y\varphi(x)\right)y^\gamma dy\int\limits_0^\infty e^{-\frac{|y|^2}{4t}-t}t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\,dt.$$

Для внутреннего интеграла, используя Wolfram Mathematica, получим

$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{|y|^2}{4t}-t}t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\,dt = 2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}-1}dt = 2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}|y|^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|y|),$$

тогда

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{-t}u_\gamma(x,t)\,dt =$$

$$= \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|y|^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|y|)\left({}^\gamma T_x^y\varphi(x)\right)y^\gamma dy =$$

$$= G_\gamma^\alpha\varphi(x),$$

что и завершает доказательство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киприянов И.А. 1997. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., Наука-Физматлит, 204.
2. Aronszajn N., Smith K.T. 1961. Theory of Bessel potentials, I. Ibid. 11: 365–475.
3. Calderon A.P. 1961 Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions. In Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc. Providence R.I., 4: 33–50.
4. Ekincioglu I., Keskin C., Guner S. 2018. BLm p,ν Estimates for the Riesz transforms assicated with Laplace- Bessel operator. J.Nonlinear Sci. Apply. 11: 832–840.

5. Guliyev V.S., Serbetci A. and Ekincioglu I. 2007. On boundedness of the generalized B-potential integral operators in the Lorentz spaces. Integral Transforms and Special Functions. 18(12): 885– 895.
6. Stein E.M. 1961. The characterization of functions arising as potentials. I. Bull. Amer. Math. Soc. 67(1): 102–104.
7. Лизоркин П.И. 1970. Описание пространств L r p (Rn) в терминах разностных сингулярных интегралов. Матем. сб., 81(123): 79–91.
8. Ногин В.А. 1982. Об обращении бесселевых потенциалов. Дифференц. уравнения, 18(8): 1407– 1411.
9. Ногин В.А. 1985. Обращение бесселевых потенциалов с помощью гиперсингулярных интегралов. Изв. вузов. Матем. 3: 57–65.
10. Гольдман М.Л. 2007. Интегральные свойства обобщенных бесселевых потенциалов. ДАН. 414(2): 159–164.
11. 1. Гольдман М.Л. 2008. Перестановочно-инвариантные оболочки обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса. ДАН. 423(1): 14–18.
12. Гольдман М.Л. 2008. Конус перестановок для обобщенных бесселевых потенциалов. Тр. МИАН. 260: 151–163.
13. Ляхов Л.Н., Половинкина М.В. 2005. Пространство весовых потенциалов Бесселя. Дифференциальные уравнения и динамические системы, Сборник статей, Труды МИАН. — М.: Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика». 250: 192–197.
14. Ляхов Л.Н. 1991. Обращение B-потенциалов Рисса. Докл. АН СССР. 321(3): 466–469.
15. Ляхов Л.Н. 1990. Об одном классе гиперсингулярных интегралов. Докл. АН СССР. 315(2): 291–296.
16. Guliev V.S., Safarov Z.V. 2001. Bk,n-Bessel potentials and certain imbedding theorems in Bk,nSobolev–Liouville spaces. Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. 15: 68–80.

17. Guliyev V.S., Serbetci A., Akbulut A., Mammadov Y.Y. 2011. Nikol'skii–Besov and Lizorkin– Triebel spaces constructed on the base of the multidimensional Fourier–Bessel transform. Eurasian Math. J. 2(3): 42–66.
18. Левитан Б.М. 1951. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. М., УМН. 6:2 (42): 102–143.
19. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. 2019. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. Физматлит, Москва, 224.
20. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G. 1953. Higher Transcendental Functions. Vol. 2. New York: McGraw-Hill Book Co, 308.
21. Watson G.N. 1922. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge: University Press, 804.
22. Ekincioglu I., Shishkina E.L., Keskin C. 2021. Generalized Bessel potential and its application to non-homogeneous singular screened Poisson equation. Integral Transforms and Special Functions. 32(12): 932–947.
23. Dzhabrailov A., Luchko Y., Shishkina E. 2021. Two Forms of An Inverse Operator to the Generalized Bessel Potential. Axioms. 10
24. Джабраилов А.Л., Шишкина Э.Л. Связь обобщенных потенциалов Бесселя и решения сингулярного уравнения теплопроводности // Прикладная математика & Физика. 2022. Т. 54. № 2. С. 89-97.

§4. Применение обобщенного потенциала Бесселя к решению неоднородного сингулярного уравнения Пуассона

Рассматривается оператор типа свертки, называемый обобщенным потенциалом Бесселя. Главный результат – это нахождение решения неоднородного интегрированного сингулярного экранированного уравнения Пуассона $(I-\Delta_y)^k u = f, k \in N$.

Теория потенциала берет свое начало из теории электростатического и гравитационного потенциалов и уравнений Лапласа, волн, Гельмгольца и

Пуассона. Известно, что знаменитые потенциалы Рисса являются реализациями действительных отрицательных степеней Лапласа и волновых операторов. Между тем, в теории потенциала большое внимание уделяется потенциалу Бесселя

$$G^a f(x) = \int_{R^n} G_a(x-y) f(y) dy, \quad a > 0,$$

где

$$G_a(x) = \frac{2^{\frac{2-n-a}{2}}}{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \frac{K_{\frac{n-a}{2}}(|x|)}{|x|^{\frac{n-a}{2}}},$$

и K_v обозначает модифицированную функцию Бесселя второго рода. Оператор G^α можно интерпретировать как реализацию реальных отрицательных степеней оператора $(I - \Delta)$.

Основные определения и понятия

Пусть R^n - n -мерное Евклидово пространство, тогда

$$R_+^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n, x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\},$$
$$\bar{R}_+^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n, x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}.$$

Через $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ обозначим мультииндекс, состоящий из положительных фиксированных действительных чисел $y_i \geq 0, i = 1, \ldots, n, |y| = y_1 + \ldots + y_n$.

Пусть $L_p^\gamma(R_+^n) = L_p^\gamma,\ 1 \leq p < \infty$- пространство измеримых на R_+^n функции четных по каждой переменной$x_i,\ i = 1, \ldots, n$таких, что$t \int_{R_+^n} |f(x)|^p x^\gamma dx < \infty$, где $x^\gamma = \prod_{(i=1)}^n x_i^{\gamma_i}$.

Для $p \geq 1,\ L_p^\gamma$– норма f определяется формуло

$$||f||_{L_p^\gamma(R_+^n)} = ||f||_{p,\gamma} = (\int_{R_+^n} |f(x)|^p x^\gamma dx)^{1/p}.$$

Нормализованная функция Бесселя первого рода j_v определяется формулой

$$j_v(x) = \frac{2^v \Gamma(v+1)}{x^v} J_v(x),$$

где J_v - функция Бесселя первого рода.

Для $x \in R^n$ будемиспользовать обозначение

$$j_\gamma(x,\xi) = \prod_{i=1}^n \frac{j_{\gamma_i - 1}}{2}(x_i\xi_i), \quad j_\gamma(0,\xi) = 1.$$

Многомерное преобразование Ханкеля функции $f \in L_1^n(R_+^n)$ определяется как

$$F_\gamma[f](\xi) = F_\gamma[f(x)](\xi) = \int_{R_+^n} f(x) j_\gamma(x,\xi) x^y dx$$

В качестве пространства основных функций будем использовать подпространство пространства быстроубывающих (шварцевых) функций:

$$S_{ev=} \left\{ f \in C_{ev}^\infty : \sup_{x \in R_+^n} \left| x^a D^\beta f(x) \right| < \infty \forall \alpha, \beta \in Z_+^n \right\},$$

Где$a = (\propto_1, \ldots, \propto_n), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \propto_1, \ldots, \propto_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ целые неотрицательные

числа, $x^\propto = x_1^{\propto^1} x_2^{\propto^2} x_3^{\propto^3} \ldots x_n^{\propto^n}$, $D^\beta = D_{x_1}^{\beta_1}, \ldots, D_{x_n}^{\beta_n}$, $D_{x_j} = \frac{d}{dx_j}$.

Решение неоднородного интегрированного сингулярного экранированного уравнения Пуассона $(I - \Delta_y)^k u = f, k \in N$

Рассмотрим обобщенный потенциал Бесселя [2]

$G_y^\alpha f(x) = \int_{R_+^n} G_\alpha^\gamma(y)\,(y)^\gamma (T_x^y \varphi(x)) y^\gamma dy,$ для решения неоднородного интегрированного сингулярного экранированного уравнения Пуассона вида

$$(I - \Delta_\gamma)^k u = f, k \in N.$$

Докажем теорему:

Теорема 1. *Пусть* $\varphi \in S_{ev}(R_+^n)$,$1 \le p \le \infty$ *и* $k \in N$, *тогда*

$$G_\gamma^{a+2k}(I - \Delta_\gamma)^k \varphi = G_\gamma^a \varphi, \tag{1}$$

где Δ_γ*- оператор Лапласа-Бесселя.*

Доказательство. Используя формулу 1.8.3. из [1]

вида

$$_{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i}(B_{\gamma_i})_{x_i} = (B_{\gamma_i})_{x_i}\,{}_{x_i}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i},$$

Получим

$$(G_\gamma^{a+2k}(I - \Delta_\gamma)^k \varphi)(x) =$$

$$= \int_{R_+^n} G_\alpha^\gamma(y)({}^\gamma T_x^y (I-\Delta_\gamma)^k \varphi(x)) y^\gamma dy =$$

$$= \int_{R_+^n} G_\alpha^\gamma(y) y^\gamma (I-\Delta_\gamma)\ ({}^\gamma T_x^y (I-\Delta_\gamma)^{k-1} \varphi(x))\ dy =$$

$$= \int_{R_+^n} G_\alpha^\gamma \left(y\left({}^\gamma T_x^y (I-\Delta_\gamma)^{k-1} \varphi(x)\right)\right) y^\gamma dy$$

$$-\int_{R_+^n} G_\alpha^\gamma(y)\left(\sum_{j=1}^n (B_{\gamma_i})_{y_i} ({}^\gamma T_x^y (I-\Delta_\gamma)^{k-1} \varphi(x))\right) y^\gamma dy. \qquad (2)$$

Пусть

$$I_j = \int_0^\infty G_\alpha^\gamma(y)\left[(B_{\gamma_i})_{y_i}({}^\gamma T_x^y (I-\Delta_\gamma)^{k-1}\varphi(x))\right] y_j^{\gamma_i} dy_j.$$

Интегрирования по частям каждый I_j при $j=1,\ldots,n,$ получим

$$I_j = \int_0^\infty G_\alpha^\gamma(y)\ \left[(B_{\gamma_i})_{y_i}({}^\gamma T_x^y (I-\Delta_\gamma)^{k-1}\varphi(x))\right] y_j{}^{\gamma_j} dy_j$$

$$= \int_0^\infty G_\alpha^\gamma(y)\left[\frac{\partial}{\partial y_j} y_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial y_j} {}^\gamma T_x^y (I-\Delta_\gamma)^{k-1}\varphi(x)\right]\ dy_j$$

$$= \left\{ u = G_\alpha^\gamma(y) dv = \frac{\partial}{\partial y_j} y_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial y_j} {}^\gamma T_x^y (I-\Delta_\gamma)^{k-1}\varphi(x) dy_j \right\}$$

$$= G_\alpha^\gamma(y) y_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial y_j}\left({}^\gamma T_x^y (I-\Delta_\gamma)^{k-1}\varphi(x)\right)\Big|_{y_j}^{\infty} = 0$$

$$-\int_0^\infty y_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial y_j} G_\alpha^\gamma(y)\left[\frac{\partial}{\partial y_j} {}^\gamma T_x^y (I-\Delta_\gamma)^{k-1}\varphi(x)\right] dy_j =$$

$$= -\int_0^\infty y_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial y_j} G_\alpha^\gamma(y)\left[\frac{\partial}{\partial y_j} {}^\gamma T_x^y (I-\Delta_\gamma)^{k-1}\varphi(x)\right] dy_j =$$

$$= \left\{ u = y_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial y_j} G_\alpha^\gamma(y), dv \frac{\partial}{\partial y_j}\ {}^\gamma T_x^y (I-\Delta_\gamma)^{k-1}\varphi(x) dy_i \right\} =$$

$$= -y_j^{\gamma_j}\left[\frac{\partial}{\partial y_j} G_\alpha^\gamma(y)\right]\left({}^\gamma T_x^y (I-\Delta_\gamma)^{k-1}\varphi(x)\right)\Big|_{y_j}^{\infty} +$$

$$+ \int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial y_j} y_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial y_j} G_\alpha^\gamma(y)\right] {}^\gamma T_x^y (I-\Delta_\gamma)^{k-1}\varphi(x) dy_j =$$

$$= \int_0^\infty \left[(B_{\gamma i})_{yi} G_\alpha^\gamma(y)\right] {}^\gamma T_x^y (I-\Delta_\gamma)^{k-1}\varphi(x) y_j^{\gamma_j} dy_j.$$

Возвращаясь к (2), получим

$$\left(G_\gamma^{a+2k}(I-\Delta_\gamma)^k\varphi\right)(x) = \int_{R_+^n}\left[(I-\Delta_\gamma) G_a^\gamma(y)\left({}^\gamma T_x^y (I-\Delta_\gamma)^{k-1}\varphi(x)\right) y^\gamma dy.\right]$$

Повторяя эти действия k - раз, будем иметь

$$\left(G_\gamma^{a+2k}(I-\Delta_\gamma)^k\varphi\right)(x)=\int_{R_+^n}\left[(I-\Delta_\gamma)G_a^\gamma(y)\right]\left({}^\gamma T_x^y\varphi(x)\right)y^\gamma dy.$$

Применяя теперь

$$(I-\Delta_\gamma)^k G_{a+2k}^\gamma=G_a^\gamma,\quad k\in N, \tag{3}$$

получим доказываемое утверждение (1).

По теореме 1 и свойству

$$G_\gamma^0\varphi=\varphi,\quad \varphi\in L_p^\gamma(R_+^n) \tag{4}$$

получим, что функция $f(x)=G_\gamma^{2k}\varphi(x),\quad x\in\overline{R_+^n}$ есть решение уравнения

$$(I-\Delta_\gamma)^k f(x)=\varphi(x), k=1,2..$$

Пример 1. Решение задачи $f(x)-\Delta_\gamma f(x)=j_\gamma(x,\xi), f(0)=\frac{1}{1+|\xi|^2}$ имеет вид $(G_\gamma^2)_x j_\gamma(x,\xi)$.

Найдем сначала $(P_\gamma^2)_x j_\gamma(x,\xi)$ переходя к сферическим координатам, применяя **Лемму 1:**

Лемма 1. Пусть $\varphi(s)$ - функция одной переменной и $\varphi(|x|)\ \in\ L_1^\gamma(R_+^n)$.

Преобразование Ханкеля радиальной функции $\varphi(|x|)$ есть снова радиальная функция и следующая формула имеет место

$$F_\gamma[\varphi(|x|)](\xi)=\frac{\prod_{i=1}^n\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\int_0^\infty\varphi(r)\,j_{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}(|\xi|r)r^{n+|\gamma|-1}$$

$$(I-\Delta_\gamma)^k G_{a+2k}^\gamma=G_a^\gamma,\qquad k\in N,$$

и формулы

$${}^\gamma T_x^y j_\gamma(x,\xi)=j_\gamma(x,\xi)j_\gamma(y,\xi). \tag{5}$$

$$\int_0^\infty\frac{r^{v+1}J_v(ar)}{(1+r^2)^\mu}dr=\frac{a^{\mu-1}}{2^{\mu-1}\Gamma(\mu)}K_{v-\mu+1}(a),\ \ (6)$$

$$a>0-1<v<2\mu-\tfrac{1}{2}.$$

Для многомерного обобщенного сдвига ${}^\gamma T_x^y j_\gamma(x,\xi)=j_\gamma(x,\xi)j_\gamma(y,\xi)$ (см. [3]) справедлива формула:

$$(P_\gamma^2)_x j_\gamma(x,\xi) = j_\gamma(x,\xi)\int_{R_+^n} P_\gamma(y,t) j_\gamma(x,\xi) y^\gamma dy = \{y = r\theta\} =$$

$$= \frac{2^n \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{y_i+1}{2}\right)} t j_\gamma(x,\xi) \int_0^\infty \frac{r^{n+|\gamma|-1}}{(t^2+r^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}} dr \int_{S_1^+(n)} j_\gamma(r\theta,\xi)\theta^\gamma\, dS =$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\Gamma(\frac{y_i+1}{2})} t j_\gamma(x,\xi) \int_0^\infty \frac{r^{n+|\gamma|-1}}{(t^2+r^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}} j_{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}(|\xi|_r) dr =$$

$$= \frac{2^{\frac{n+|\gamma|}{2}} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{|\xi|^{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}} t j_\gamma(x,\xi) \int_0^\infty \frac{r^{\frac{n+|\gamma|}{2}}}{(t^2+r^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}} J_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(|\xi|_r) dr = \{r = tp\}$$

$$=$$

$$= \frac{2^{\frac{n+|\gamma|}{2}} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{|\xi|^{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}} t j_\gamma(x,\xi) \int_0^\infty \frac{r^{\frac{n+|\gamma|}{2}}}{(t^2+r^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}} J_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(|\xi|_r) dr =$$

$$= \{r = tp\} = \sqrt{2t|\xi|} j_\gamma(x,\xi) K_{\frac{1}{2}}(t|\xi|) = \sqrt{\pi}\, j_\gamma(x,\xi) e^{-t|\xi|}.$$

Вычислим теперь $(G_\gamma^\alpha)_x j_\gamma(x,\xi)$ используя формулу:

$$(G_\gamma^\alpha)(x) = \frac{2^{\frac{1-a}{2}}}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{a-1}{2}} J_{\frac{a-1}{2}}(t) \left(P_t^\gamma \varphi\right)(x) dt, \qquad (7)$$

имеем

$$(G\frac{a}{\gamma})_x j_\gamma(x,\xi) = \frac{2^{\frac{1-a}{2}}}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \sqrt{\pi} j_\gamma(x,\xi) \int_0^\infty t^{\frac{1-a}{2}} J_{\frac{a-1}{2}}(t) e^{-t|\varepsilon|} dt$$

$$= \frac{2^{\frac{1-a}{2}}}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \sqrt{\pi} j_\gamma(x,\xi) \frac{2^{\frac{1-a}{2}} \left(\frac{1}{|\xi|^2}+1\right)^{-\frac{a}{2}} |\xi|^{-a} \Gamma(\frac{a}{2})}{\sqrt{\pi}} = \frac{j_\gamma(x,\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{a}{2}}}.$$

Таким образом, при $a = 2$ мы получим решение задачи:

$$f(x) = \frac{j_\gamma(x,\xi)}{1+|\xi|^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Kipriyanov I. Singular Elliptic Boundary Value Problems. Nauka: Moscow; 1997.

2. Dzhabrailov A., Luchko Y., Shishkina E. 2021. Two Forms of An Inverse Operator to the Generalized Bessel Potential. Axioms. 10(3): 232.
3. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. 2019. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. Физматлит, Москва, 224.

ГЛАВА 4. ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С АФФИННЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ АРГУМЕНТА (С КОМБИНАЦИЯМИ СЖАТИЙ/РАСТЯЖЕНИЙ И СДВИГОВ)

§1. Функционально–дифференциальные уравнения с растяжением и симметрией

Данная работа является продолжением исследований по эллиптическим уравнениям со сжатиями и растяжениями [1–3] и по применяемому подходу близка к статье [3], в которой рассматривались уравнения с несоизмеримыми растяжениями. Отметим также статью [4], посвященную эллиптическому уравнению с растяжением и сдвигами.

Через $H^1(\Omega)$ обозначается пространство Соболева всех комплекснозначных функций $u(x)$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, принадлежащих $L_2(\Omega)$ вместе с обобщенными производными первого порядка u_{x_1}, u_{x_2}, а через $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ –замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в $H^1(\Omega)$. Пространство $H^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ – гильбертовы со скалярными произведениями

$$(u,v)_{H^1(\Omega).} = \int\limits_{\Omega} \left(u\bar{v} + \sum_{j=1}^{2} u_{x_j}, \bar{v}_{x_j} \right) dx,$$

$$(u,v)_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{2} u_{x_j}, \bar{v}_{x_j}\, dx.$$

Алгебра функциональных операторов с растяжением и поворотом

Пусть заданы числа $p > 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Сопоставим этим числам унитарные операторы растяжения P и поворота R_α в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$, действующие по формулам

$$Pu(x) = p^{-1}u(p^{-1}x) = p^{-1}u(p^{-1}x_1, p^{-1}x_2),$$
$$R_\alpha u(x) = u(x_\alpha) = u(x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha\,, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha).$$

Спектр $\sigma(P)$ оператора P есть вся единичная окружность (см., например, [1]).

Лемма 1. *Пусть число* α *соизмеримо с* π, *и* $n -$ *наименьшее натуральное число такое, что* $n\alpha$ *кратно* 2π. *Тогда спектр* $\sigma(R_\alpha)$ *совпадает с множеством корней* n*-й степени из* 1, $\sigma(R_\alpha) = \left\{e^{i2\pi k/n} \colon k = 0,1, \dots, n-1\right\}$.

Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$ уравнение $\lambda u - R_\alpha u = v$ Применяя к обеим частям этого уравнения оператор $R_\alpha^k = R_{k\alpha}$ для $k = 1, \dots, n-1$ и учитывая $R_\alpha^n = I$, получим систему уравнений

$$\lambda u - R_\alpha u = u, \qquad \lambda R_\alpha u - R_\alpha^2 u = R_\alpha v, \dots, \lambda R_\alpha^{n-1} u - u = R_\alpha^{n-1} v.$$

Умножим первое уравнение на λ^{n-1} λ^{n-1}, второе на λ^{n-2} и т. д. (предпоследнее уравнение умножается на λ, а последнее на 1), после чего сложим получившиеся уравнения. Будем иметь

$$(\lambda^n - 1)u = \lambda^{n-1} v + \lambda^{n-2} R_\alpha v + \cdots + R_\alpha^{n-1} v,$$

что при $\lambda^n \neq 1$ равносильно соотношению

$$u = (\lambda^n - 1)^{-1} (\lambda^{n-1} v + \lambda^{n-2} R_\alpha v + \cdots + R_\alpha^{n-1} v).$$

Таким образом, любое число λ, отличное от корня n-й степени из 1, является резольвентной точкой оператора R_α, и резольвента имеет вид

$$(\lambda I - R_\alpha)^{-1} = (\lambda^n - 1)^{-1} (\lambda^{n-1} I + \lambda^{n-2} R_\alpha + \cdots + R_\alpha^{n-1}).$$

С другой стороны, зафиксировав $k \in \{0,1, \dots, n-1\}$, возьмем на плоскости кусочно постоянную функцию η_k, принимающую в угле $-j\alpha < \varphi < 2\pi/n - j\alpha$ значение $e^{i2\pi kj/n}, j = 0,1, \dots, n-1$. Тогда для произвольной ненулевой «$2\pi/n$-периодической» функции $u \in L_2(\mathbb{R}^2)$ $(u(r, \varphi + 2\pi/n) \equiv u(r, \varphi), (r, \varphi) -$ полярные координаты), функция $\eta_k u$ является собственной функцией оператора поворота R_α, отвечающей собственному значению $\lambda_k = e^{i2\pi k/n}$.

Лемма 2. *Пусть число* α *несоизмеримо с* π. *Тогда* $\sigma(R_\alpha)$ *совпадает с единичной окружностью,* $\sigma(R_\alpha) = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| = 1\}$.

Пусть $\lambda = 1$. В условиях леммы все числа $j\alpha (j \in \mathbb{Z})$ различны по модулю числа 2π. Следовательно, зафиксировав произвольное натуральное число n, мы можем взять такое число $\delta > 0$, что отрезки $[-\alpha, -\alpha + \delta], [0, \delta], [\alpha, \alpha + \delta], \dots, [(n-1)\alpha, (n-1)\alpha\ +\ \delta]$ по модулю 2π попарно не пересекаются. Зададим функцию $u_n \in L_2(\mathbb{R}^2)$, равной λ^j для $r \in (0,1)$ и $\varphi \in (j\alpha, j\alpha + \delta)$, где $j = 0,1, \dots, n-1$, и нулю в остальных точках плоскости. Очевидно, $\|u_n\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} = n\delta/2$. В то же время, функция $\lambda u_n - R_\alpha u_n$ отлична от нуля только в области $r \in (0,1), \varphi(-\alpha, -\alpha + \delta)$, где она равна -1, и в области $r \in (0,1), \varphi \in \big((n-1)\alpha, (n-1)\alpha + \delta\big)$, где она равна λ^n, так что $\|\lambda u_n - R_\alpha u_n\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} = \delta$. Существование последовательности $u_n \in L_2(\mathbb{R}^2)$, для которой

$$\frac{\|u_n\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}}{\|\lambda u_n - R_\alpha u_n\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \to \infty, n \to \infty,$$

означает, что при $\lambda = 1$ оператор $\lambda I - R_\alpha$ не имеет ограниченного обратного в про-странстве $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Обозначим через $\mathfrak{U}_p$ и $\mathfrak{U}_\alpha$ коммутативные банаховы B^*-алгебры ограниченных опера-торов в $L_2(\mathbb{R}^2)$, порожденные оператором P и R_α, соответственно. При α несоизмеримом с π эти алгебры устроены одинаково, будучи изоморфными алгебре непрерывных функций на окружности. Так, в алгебре $\mathfrak{U}_\alpha$ плотны по операторной норме конечные суммы $\sum a_m R_\alpha^m (a_m \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{Z})$. По теореме Гельфанда — Наймарка [5] $\mathfrak{U}_\alpha$ изометрически изоморфна алгебре $C(\Delta_\alpha)$ всех непрерывных комплекных функций на пространстве Δ_α максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{U}_\alpha$, причем отображение $\widehat{R_\alpha}: \Delta_\alpha \to \mathbb{C}$ (преобразование Гельфанда оператора $R_\alpha, \widehat{R_\alpha}(h) = h(R_\alpha)$) осуществляет гомеоморфизм Δ_α на $\sigma(R_\alpha) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = 1\}$. Образом оператора $\sum a_m R_\alpha^m$ при упомянутом изоморфизме будет функция $\sum a_m \lambda^m$ на окружности.

Если же угол$\alpha\alpha$ соизмерим с π и $n-$ наименьшее натуральное число такое, что $n\alpha$ кратно 2π, то всякий элемент алгебры $\mathfrak{U}_\alpha$ имеет вид $a_0I + a_1R_\alpha + \dots + a_{n-1}R^{n-1}$ $(a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C})$, при этом для любого комплексного гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{U}_\alpha$ ровно n комплексных гомоморфизмов $h_0, h_1, \dots, h_{n-1}$ алгебры $\mathfrak{U}_\alpha$, где $h_k(R_\alpha) = e^{i2\pi k/n}$, и пространство максимальных идеалов Δ_α отождествляется со спектром $\sigma(R_\alpha) = \{e^{i2\pi k/n}: k = 0,1, \dots, n-1\}$. В рассматриваемом случае алгебра $\mathfrak{U}_\alpha$ изоморфна $\mathbb{C}^n$, и оператору $a_0I + a_1R_\alpha + \dots + a_{n-1}R^{n-1}$ при изоморфизме отвечает вектор, k-я координата которого равна $a_0 + a_1e^{i2\pi k/n} + \dots + a_{n-1}e^{i2\pi k(n-1)/n}$.

Перейдем теперь к алгебре $\mathfrak{U}_{p,\alpha}$, порожденной парой коммутирующих операторов P и R_α. Это коммутативная B^*-алгебра, полученная замыканием по операторной норме различных сумм $\sum a_{mk}P^mR_\alpha^m$, если угол поворота α несоизмерим с π, и сумм $\sum a_{m0}P^m + \sum a_{m1}P^mR_\alpha + \dots + \sum a_{m,n-1}P^mR_\alpha^{n-1}$, если угол поворота α соизмерим с π $(a_{mk} \in \mathbb{C}, m, k \in \mathbb{Z})$. Пусть $\Delta_{p,\alpha} -$ пространство максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{U}_{p,\alpha}$ гомеоморфно либо двумерному тору $\mathbb{T}^2$, либо n экземплярам окружности, а сама алгебра $\mathfrak{U}_{p,\alpha}$ изометрически изоморфна либо алгебре непрерывных функций на торе, либо алгебре $\mathbb{C}^n$-значных функций на окружности.

Лемма 3. *Для норм операторов справедливы оценки снизу*

$$\left\|\sum a_{mk}P^mR_\alpha^k\right\| \geq \left(\sum |a_{mk}|^2\right)^{1/2} \quad (\alpha \text{ несоизмерим с } \pi),$$

$$\left\|\sum_{k=0}^{n-1}\sum a_{mk}P^mR_\alpha^k\right\| \geq \left(\sum_{k=0}^{n-1}\sum |a_{mk}|^2\right)^{1/2} \quad (\alpha \text{ соизмерим с } \pi).$$

Предположим, для определенности, что угол α несоизмерим с π. Зафиксируем на плоскости круг $B = B(x^0; \varepsilon)$ с центром в любой точке $x^0 \neq 0$ настолько малого радиуса ε, что все круги $B_{mk} = B(p^m x^0_{-k\alpha}; p^m\varepsilon)$ попарно пересекаются, когда индексы m и k пробегают присутствующие в рассматриваемом операторе значения. Это возможно, поскольку все точки $p^m x_{-\alpha}^0$ различны. Обозначим через $\chi B(x)$ характеристическую функцию этого круга. Образом этой функции под действием оператора $\sum a_{mk} P^m R_\alpha^k$ будет простая функция $s(x)$, принимающая значения $a_{mk} p^{-m}$и равная нулю вне этих кругов. Очевидно,

$$\|s\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2 = \sum \|a_{mk}\|^2 p^{-2m}\, \mu(B_{mk}) = \mu(B) \sum \|a_{mk}\|^2,$$

в то время, как $\|\chi B(x)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2 = \mu(B)$. Из определения нормы оператора вытекает требуемая оценка.

Доказательство для случая, когда α соизмерим с π, полностью аналогично.

Теорема 1. *Пусть угол α несоизмерим с π. Тогда пространство максимальных идеалов $\Delta_{p,\alpha}$ алгебры $\mathfrak{U}_{p,\alpha}$ гомеоморфно тору* $\mathbb{T}^2 = \{(\lambda, w) \in \mathbb{C}^2 \colon |\lambda| = |w| = 1\}$.

Убедимся вначале при помощи стандартных рассуждений, что $\Delta_{p,\alpha}$ гомеоморфно некоторому компактному подмножеству тора. Для этого рассмотрим заданное формулой $\phi(h) = \left(\hat{P}(h), \hat{R}_\alpha(h)\right)$ отображение $\phi \colon \Delta_{p,\alpha} \to \mathbb{C}^2$. По определению преобразования Гельфанда и топологии $\Delta_{p,\alpha}$ это отображение непрерывно. Более того, множество значений из координат в отдельности – единичная окружность. Действительно, когда комплексный гомоморфизм h пробегает все пространство $\Delta_{p,\alpha}$, а числа $h(P)$ и $h(R_\alpha)$ пробегают спектры операторов P и R_α в алгебре $\mathfrak{U}_{p,\alpha}$, а спектр элемента один и тот же во всех B^*-алгебрах, его содержащих [5].

Если предположить, что $\phi(h_1) = \phi(h_2)$, т.е. $h_1(P)$ и $h_1(\mathbb{R}_\alpha) = h_2(\mathbb{R}_\alpha)$, то значения гомоморфизмов h_1 и h_2 будут совпадать на конечных суммах $\sum a_{mk} P^m R_\alpha^k$. В силу плотности последних в $\mathfrak{U}_{p,\alpha}$ получаем $h_1 = h_2$. Таким образом, отображение ϕ взаимно однозначно, и следовательно, является гомеоморфизмом $\Delta_{p,\alpha}$ на некоторый компакт $K \subset \mathbb{T}^2$ (любое непрерывное взаимно однозначное отображение компактного пространства в хаусдорфово есть гомеоморфизм).

Перенося функции с $\Delta_{p,\alpha}$ на K при помощи отображения ϕ^{-1}, получаем на основании теоремы Гельфанда – Наймарка изометрический изоморфизм алгебры $\mathfrak{U}_{p,\alpha}$ на алгебру $C(K)$. При этом изоморфизме оператору $T(P, R_\alpha) = \sum a_{mk} P^m R_\alpha^k$ отвечает рассматриваемая на K функция $t(\lambda, w) = \sum a_{mk} \lambda^m w^k = \sum a_{mk}\, e^{i(m\theta + k\eta)}$ (воспользовались Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ —ограниченная область. Определим оператор $T(P, R_\alpha)$ на функциях из $L_2(\Omega)$ следующим образом: вначале функция $u \in L_2(\Omega)$ продолжается нулем в $\mathbb{R}^2 \backslash \Omega$, затем к этому продолжению применяется действующий в $L_2(\Omega)$оператор $T(P, R_\alpha)$, а после результат действия оператора сужается на Ω. Понятно, что в этом случае мы также имеет ограниченный линейный оператор $T(P, R_\alpha) :\ L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, причем из положительной определённости оператора $T(P, R_\alpha)$ в $L_2(\mathbb{R}^2)$ следует, очевидно, его положительная определенность в $L_2(\Omega)$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\mu u + \sum_{j=1}^{2} (T(P, R_\alpha)\, u_{x_j})_{x_j} = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\mu \in \mathbb{C}$ —спектральный параметр, $f \in L_2(\Omega)$.

Обобщенным решением задачи (1) назовем функцию $u \in \dot{H}^1(\Omega)$, удовлетворяющую при всех $v \in \dot{H}^1(\Omega)$ интегральному тождеству

$$\mu(u, v) L_2(\Omega) - \sum_{j=1}^{2} (T(P, R_\alpha)\, u_{x_j}, v_{x_j})_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Наряду с оператором $T(P, R_\alpha)$ с коэффициентами a_{mk} будем рассматривать аналогичный оператор $\tilde{T}(P, R_\alpha)$, коэффициенты которого равны$a_{mk} \cos k\alpha$.

Теорема 2. *Для всякой ограниченной области Ω, содержащей начало координат, условие*

$$Re\ \tilde{t}\ (\lambda,\omega) > 0,\ \ |\lambda| = |\omega| = 1 \qquad\qquad (\alpha \text{ несозмерим с } \pi),$$

является необходимым и достаточным для существования постоянных $c_1 > 0, c_2 \geq 0$ *таких, что при всех* $u \in C_0^\infty(\Omega)$ *выполнено неравенство (типа Гординга)*

$$Re \sum_{j=1}^{2} (T(P,R_\alpha)u_{x_j}, u_{x_j})_{L_2(\Omega)} \geq c_1\|u\|^2_{H^1(\Omega)} - c_2\|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \qquad (2)$$

◁ Прежде всего отметим, что в рассматриваемом случае неравенство (2) на классе $C_0^\infty(\Omega)$ равносильно оценке

$$Re \sum_{j=1}^{2} (T(P,R_\alpha)u_{x_j}, u_{x_j})_{L_2(\mathbb{R}^2)} \geq c_1\||\nabla u|\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} \qquad (3)$$

на всем классе $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. В этом легко убедиться, сделав в интегралах замену переменных $y = \tau x, \tau > 1$:

$$Re \sum_{j=1}^{2} (T(P,R_\alpha)v_{y_j}, v_{y_j})_{L_2(\tau\Omega)} \geq c_1\||\nabla u|\|^2_{L_2(\tau\Omega)} - (c_2 - c_1)\tau^{-2}\|v\|^2_{L_2(\tau\Omega)},$$

$$v \in C_0^\infty(\tau\Omega).$$

Поскольку Ω содержит начало координат, получаем оценку (3) для любой функции $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Воспользовавшись теоремой Планшереля, перейдем в (3) к преобразованию Фурье $\tilde{u}(\xi)$. Заметим, что в образах Фурье оператору P отвечает сопряженный оператор $P^* = P^{-1}$, а оператор R_α переходит в R_α. Таким образом будем иметь

$$Re \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \xi_j\, \overline{\tilde{u}(\xi)} T(P^*,R_\alpha)\left[\xi_j \tilde{u}(\xi)\right] d\xi \geq c_1 \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^2 |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi$$

или

$$Re \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-1}\xi_j \overline{v(\xi)}\, T(P^*,R_\alpha)\left[|\xi|^{-1}\xi_j v(\xi)\right] d\xi \geq c_1\|v\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}, \qquad (4)$$

где $v(\xi)$ обозначает $|\xi|\tilde{u}(\xi)$. Поскольку

$$\frac{\xi_1}{|\xi|}\overline{v(\xi)}\ P^{*m} R_\alpha^k \left[\frac{\xi_1}{|\xi|} v(\xi)\right] = \frac{\xi_1^2 \cos k\alpha - \xi_1\xi_2 \sin k\alpha}{|\xi|^2} \overline{v(\xi)} P^{*m} R_\alpha^k v(\xi),$$

$$\frac{\xi_2}{|\xi|}\overline{v(\xi)}\,P^{*m}R_\alpha^k\left[\frac{\xi_2}{|\xi|}v(\xi)\right]=\frac{\xi_1\xi_2\sin k\alpha+\xi_2^2\cos k\alpha}{|\xi|^2}\overline{v(\xi)}P^{*m}R_\alpha^k v(\xi)$$

и, следовательно,

$$\frac{\xi_1}{|\xi|}\overline{v(\xi)}\,P^{*m}R_\alpha^k\left[\frac{\xi_1}{|\xi|}v(\xi)\right]+\frac{\xi_2}{|\xi|}\overline{v(\xi)}\,P^{*m}R_\alpha^k\left[\frac{\xi_2}{|\xi|}v(\xi)\right]=\overline{v(\xi)}\cos k\alpha\,P^{*m}R_\alpha^k v(\xi),$$

стоящее под интегралом в левой части (4) выражение есть $\overline{v(\xi)}\tilde{T}(P^*,R_\alpha)v(\xi)$, а само неравенство (4) принимает вид

$$Re\left(\tilde{T}(P^*,R_\alpha)v,v\right)_{L_2(\mathbb{R}^2)}\geq c_1\|v\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}. \qquad (5)$$

Заметим, что множество участвующих в полученном неравенстве функций v является всюду плотным в $L_2(\mathbb{R}^2)$, когда u пробегает все пространство $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Действительно, в $L_2(\mathbb{R}^2)$ плотны функции $\varphi\in L_2(\mathbb{R}^2)$ с компактным носителем, не пересекающимся с началом координат. С другой стороны, функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ плотны в $H^1(\mathbb{R}^2)$. Поэтому последовательностью $\tilde{u}_m$ образов Фурье гладких финитных функций по теореме Планшереля можно аппроксимировать любую функцию вида $\psi=\varphi/|\xi|$ в следующем смысле:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^2)\;|\tilde{u}_m-\psi|^2\,d\xi\to 0, m\to\infty.$$

Получаем, таким образом, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left||\xi|\tilde{u}_m-\varphi\right|^2 d\xi\to 0, m\to\infty.$$

Теперь можно сказать, что неравенство (5), а, значит, и исходное неравенство (2), есть условие положительной определенности в $L_2(\mathbb{R}^2)$ эрмитовой части оператора $\tilde{T}(P^*,R_\alpha)$. С учетом следствия 1 последнее эквивалентно либо алгебраическому неравенству $Re\,\tilde{t}\,(\lambda,\omega)>0$ при $|\lambda|=|\omega|=1$, либо $Re\,\tilde{t}\,\left(\bar{\lambda},\omega_k\right)>0$ при $|\lambda|=1, k=0,1,\ldots,n-1$. Понятно, что $\bar{\lambda}$ здесь можно заменить на λ. Неравенство (5) выполняется с постоянными $c_2=0$ и $c_1=\min Re\,\tilde{t}\,(\lambda,\omega)$ $\left(c_1=min Re\,\tilde{t}\,(\lambda,\omega_k)\right)$. $\triangleright$

Следствие 1. *Пусть ограниченная область Ω содержит начал координат и выполнено условие*

$$Re\hat{t}(\lambda, w) > 0, \qquad |\lambda| = |w| = 1 \ \ (\alpha \text{ несоизмеримым с } \pi),$$

либо

$$Re\hat{t}(\lambda, w_k) > 0, \qquad |\lambda| = 1, \qquad k = 0,1, \dots, n-1 \ \ (\alpha \text{ соизмеримым с } \pi).$$

Тогда спектр краевой задачи (1) состоит из изолированных собственных значений конечной кратности и располагается в правой полуплоскости: $Be\mu > 0$. *В частности, при* $\mu = 0$ *краевая задача (1) имеет единственное обобщенное решение для всех функций* $f \in L_2(\Omega)$. *При любом* $\mu \in \mathbb{C}$ *задача (4) фредгольма.*

Доказательство основано на неравенстве (2) и приводится стандартными методами функционального анализа (см., например, [2, 3, 12]. В примерах ниже считаем, что $0 \in \Omega$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$-\sum_{j=1}^{2} \left(u_{x_j}(x) + a u_{x_j}\left(\frac{x_1}{p}, \frac{x_2}{p}\right) + b u_{x_j}\left(-\frac{x_1 + \sqrt{3}x_2}{2}, \frac{\sqrt{3}x_1 - x_2}{2}\right)\right)_{x_j} =$$

$$= f(x), x \in \Omega,$$

в котором $\alpha = 2\pi/3$. Пусть $b \in \mathbb{R}$. Комбинируя пример 1 с теоремой 2, получаем существование и единственность обобщенного решения задачи Дирихле для данного уравнения при условии $p|\alpha| - b/4 < 1$, и при условии $p|\alpha| + b/2 < 1$, если $b > 0$.

Пример 3. Для уравнения

$$-\sum_{j=1}^{2} \left(u_{x_j}(x) + a u_{x_j}(p^{-1}(x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha), p^{-1}(x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha)\right)_{x_j} =$$

$$= f(x), x \in \Omega,$$

имеем

$$T(P, R_\alpha) = I + paPR_\alpha, \qquad \tilde{T}(P, R_\alpha) = I + pa\cos\alpha\, PR_\alpha.$$

Каков бы ни был угол α, если $p|a\cos\alpha| < 1$, то задача Дирихле имеет единственное обобщенное решение при всех $f \in L_2(\Omega)$.

Функционально-дифференциальное уравнение с растяжением и поворотом

Пусть $K-$ некоторый компакт в $\mathbb{R}^n$, и $v \in \left(C(K)\right)^* -$ регулярная (комплексная) борелевская мера, сосредоточенная на этом компакте. Для функций, заданных в $\mathbb{R}^n$, рассмотрим операцию свертки

$$(v * u)(x) = \int_K u(x-h)dv(h).$$

Понятно, что для непрерывной финитной функции $u, u \in C_0(\mathbb{R}^n)$, свертка также будет непрерывной финитной функцией, причем $supp(v * u) \subset suppu + K$. Если же $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то и $(v * u) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Действительно, в этом случае для любой точки x семейство $t^{-1}\left(u\left(x + te_j - h\right) - u(x-h)\right)$ сходится к $u_{x_j}(x-h)$ при $t \to 0$ равномерно по $h \in K$, и можно перейти к пределу под знаком интеграла:

$$(v * u)_{x_j} = v * u_{x_j}. \qquad (9)$$

Применяя преобразование Фурье, убеждаемся с использованием теоремы Фубини, что

$$(\widetilde{v * u})(\xi) = \bar{v}(\xi)\bar{u}(\xi), \qquad \text{где } \bar{v}(\xi) = \int_K v^{-ih\xi}dv(h)$$

есть характеристическая функция меры v, равномерно непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}^n$ (и являющаяся сужением на $\mathbb{R}^n$ целой функции n комплексных переменных, см. [6, теорема 7.23]). Очевидно, $\tilde{v}(0) = v(K)$ и $sup|\tilde{v}(\xi)| \le |v|(K), |v| -$ вариация меры v. Таким образом, свертка однозначно продолжается до ограниченного линейного оператора в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ и пространства Соболева $H^s(\mathbb{R}^n), s \in \mathbb{R}$, с одной и той же нормой, равной $sup|\tilde{v}(\xi)|$, а равенство (9) переносится на обобщенные производные.

Повторное свертывание с мерами $v_1 \in \left(C(K_1)\right)^*$ и $v_2 \in \left(C(K_2)\right)^*$, являющееся в образах Фурье умножением на функцию $\tilde{v}_1(\xi)\tilde{v}_2(\xi)$, представляет собой свертку с мерой $v_1 * v_2, \left(v_1 * (v_2 * u)\right) = (v_1 * v_2) * u$, которая сосредоточена на компакте $K_1 + K_2$ и определяется по формуле

$(v_1 * v_2)(B) = \int_{K_1} v_2(B-h)dv_1(h) = \int_{K_2} v_1(B-h)dv_2(h)$) *равна*

($B -$ борелевская подмножество $\mathbb{R}^n$). Норма такого оператора (в L_2 и H^s) $sup|\tilde{v}_1(\xi)\tilde{v}_2(\xi)|$.

Для всякой меры $v \in (C(K)^*$ рассмотрим меру $v^\bullet \in \left(C(-K)\right)^*$, определяемую соотношением $v^\bullet(B) = \overline{v(-B)}$. Очевидно, $\tilde{v}^\bullet = \bar{\tilde{v}}$. Оператор, сопряженный в $L_2(\mathbb{R}^n)$ оператору свертки с мерой v, есть свертка с мерой $v^\bullet$.

Отметим, что если Ω и $\Omega' -$ открытые подмножества $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условию $\Omega' - K \subset \Omega$, то сужение функции $v * u$ на Ω'зависит исключительно от сужения функции u на Ω, поэтому свертка с мерой $v \in (C(K)^*$ действует и как ограниченный линейный оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega')$, а также из $H^s(\Omega)$ в $H^s(\Omega')$ (с нормой, не превосходящей $sup|\tilde{v}(\xi)|$, если норму в $H^s(\mathbb{R}^n)$ всех возможных продолжений $\mathbb{R}^n$). Обобщенная производная функции $v * u \in H^s(\Omega')$ по-прежнему связана с обобщенной производной функции $u \in H^s(\Omega)$ формулой (9).

Зафиксировав число $p > 1$, обозначим $Pu(x) = u(p^{-1}x)$. Под оператором с аффинным преобразованием аргумента мы будем понимать оператор

$$Tu(x) = P(u * v)(x) = \int_K u(p^{-1}x - h)\, dv(h). \tag{10}$$

Замечание 1. Если носителем меры v служит конечный набор точек $K = \{h^1, \dots, h^l\}$ (случай атомарной меры), то рассматриваемый оператор действительно является оператором с аффинными преобразованиям аргумента (комбинациями сжатия и сдвигов),

$$P(u * v)(x) - \alpha_1 u(p^{-1}x - h^1) + \dots + \alpha_1 u(p^{-1}x - h^l)\ (\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{C}).$$

Мы будем пользоваться этим термином и для более общих мер, осуществляющих «размазанный» по некоторому компакту сдвиг.

Оператор T можно записать по-другому, поменяв местами операции свертки и сжатия:

$$Tu(x) = \int_K u(p^{-1}(x-ph))\,dv(h) = \int_{pK} u\big(p^{-1}(x-h)\big)dPv(h) = (Pv * Pu)(x).$$

Здесь $Pv -$ мера на pK, определяемая по формуле $Pv(B) = v(p^{-1}B)$.

Лемма 4. *Спектральный радиус оператора* $T: L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ *вычисляется по формуле*

$$\rho(T) = p^{n/2} \lim_{m\to\infty} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\tilde{v}(\xi)\tilde{v}(p^{-1}\xi)\dots\tilde{v}(p^{-1-m}\xi)|^{1/m} =$$

$$= p^{n/2} \lim_{m\to\infty} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\tilde{v}(\xi)\tilde{v}(p\xi)\dots\tilde{v}(p^{m-1}\xi)|^{1/m}. \qquad (11)$$

Доказательство. Образ Фурье функции Tu есть функции $P^*(\tilde{v}\tilde{u})(\xi) = p^n\tilde{v}(p\xi)\tilde{u}(p\xi)$, поэтому

$$\|Tu\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} = p^{2n} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{v}(p\xi)\tilde{u}(p\xi)|^2\,d\xi = p^n \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{v}(\eta)\tilde{u}(\eta)|^2\,d\eta,$$

так что норма действующего в $L_2(\mathbb{R}^n)$ оператора T равна $p^{n/2} sup|\tilde{v}(\xi)|$. Для степеней оператора T имеем

$$T^m u = P^m(P^{1-m}v * \dots * P^{-1}v * v * u),$$

$$(\widetilde{T^m u})(\xi) = p^{mn}\tilde{v}(p\xi)\tilde{u}(p^2\xi)\dots\tilde{v}(p^m\xi)\tilde{u}(p^m\xi),$$

$$\|Tu\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} = p^{mn} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{v}(\eta)\tilde{v}(p^{-1}\eta)\dots\tilde{v}(p^{1-m}\eta)|^2|\tilde{u}(\eta)|^2 d\eta,$$

$$\|T^m: L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)\| = p^{mn/2} sup|\tilde{v}(\xi)\tilde{v}(p^{-1}\xi)\dots\tilde{v}(p^{1-m}\xi)|.$$

Отсюда и из известной формулы спектрального радиуса [6, Теорема 10.13] вытекает (11).

Пример 4. Пусть $0 \neq h^0 \in \mathbb{R}^n, K = \{h^0, -h^0\}, a, b \in \mathbb{R}$ и $v = a\delta(h+h^0) + b\delta(h-h^0), \delta -$ мера (дельта-функция) Дирака. Имеем

$$Tu(x) = au(p^{-1}x + h^0) + bu(p^{-1}x - h^0),$$

$$\tilde{v}(\xi) = ae^{ih^0\xi} + be^{ih^0\xi} = (a+b)cos(h^0\xi) + i(a-b)\sin(h^0\xi),$$

$$|\tilde{v}(\xi)|^2 = (a+b)^2\cos^2(h^0\xi) + (a-b)^2\sin^2(h^0\xi) =$$

$$= (a^2+b^2)(1 + \kappa\cos\big(2(h^0\xi)\big),$$

$$\kappa = 2ab/(a^2+b^2), |\kappa| \le 1,$$

и, в соответствии с (11),

$\rho(T) =$

$$= p^{n/2}(a^2+b^2)^{1/2} \lim_{m\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |(1+\kappa cost)(1+\kappa cospt)\dots(1+\kappa cosp^{m-1}t|^{1/2m}.$$

Случаи $\kappa > 0$ и $\kappa < 0$ различаются. Если $\kappa > 0$ (a и b одного знака), то фигурирующая здесь верхняя грань достигается при $t = 0$, она одна и та же для всех m и равна $(1+\kappa)^{1\backslash 2}$. Так что спектральный радиус равен норме оператора T, $\rho(T) = p^{n/2}(|a|+|b|)$. Если же $\kappa < 0$ (a и b разных знаков), то ситуация начинает существенно зависеть от p. Пусть, к примеру, $a + 1, b = -1$. Можем записать

$$\rho(T) = 2p^{n/2} \lim_{m\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |\sin t \sin pt \dots \sin p^{m-1}|^{1/m}.$$

Когда p есть нечетное целое число, $|\sin(\pi/2)\sin(p\pi/2)\dots\sin(p^{m-1}\pi/2)| = 1$. В этом случае мы вновь имеем стационарную последовательность, и спектральный радиус $2p^{n/2}-$ норме оператора T. Если же $p = 2$, то рядом с m последовательностью убывает, и $\rho(T) < 2p^{n/2}$. Например, $\sup|\sin t \sin 2t|^{1/2} = 2\cdot 3^{-3/4} < 1$, $\sup|\sin t \sin 2t \sin 4t|^{1/3}$ еще меньше, и т.д.

Пример 5. Пусть $\mathrm{K} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = r\}-$ сфера радиуса r в $\mathbb{R}^3$, и $\nu -$ (нормированная) площадь на сфере. Свертка в данном случае усредняет по сфере,

$$Tu(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{|h|=r} u(p^{-1}x - h)dS_h,$$

$$\tilde{\nu}(\xi) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{|x|=r} e^{-i\xi h}dS_h = \frac{\sin r|\xi|}{r|\xi|},$$

$$\rho(T) = p^{2/3} \lim_{m\to\infty} \sup_{t>0} \left|\frac{\sin t}{t}\frac{\sin pt}{pt}\dots\frac{\sin p^{m-1}t}{p^{m-1}t}\right|^{1/m} = p^{3/2}.$$

В рассмотренных примерах величина $\rho(T)$ не зависит от величины сдвига.

Перейдем к операторам в ограниченной области Ω. Наложим на пару Ω, K основное условие

$$p^{-1}\Omega - K \subset \Omega. \tag{12}$$

Замечание 2. Если K состоит из одной лишь точки h, то условие (4) может быть проинтегрировано следующим образом. Преобразование $x \mapsto p^{-1}x - h$ есть сжатие $\mathbb{R}^n$ с центром $x^0 = ph/(1-p)$, и для начальной точки x^1 последовательность итераций $x^{k+1} = p^{-1}x^k - h$ сходится к x^0. Взяв $x^1 \in \Omega$, в силу условия (12) будем иметь $x^k \in \Omega\,(\mathrm{k} = 2,3,\dots)$, откуда $x^0 \in \overline{\Omega}$. Таким образом, центр сжатия должен лежать в замыкании рассматриваемой области, а сама область при сжатии отображаться в себя. Интеграл (10) в этом случае представляет, по сути, сжатие с распределенными, некоторым образом, по $\overline{\Omega}$ центрами.

Условие (12) позволяет также рассматривать T как ограниченной оператор в $L_2(\Omega) -$ этот оператор является композицией оператора свертки, действующего из $L_2(\Omega)$ в $L_2(p^{-1}\Omega)$, и оператора сжатия P из $L_2(p^{-1}\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. То же относится и к случаю пространства $H^s(\Omega)$.

Лемма 5. *Пусть выполнено геометрическое условие (4), а число* $\alpha \in \mathbb{C}$ *таково, что* $\alpha < 1/\rho(T)$. *Тогда при всех* $s \geq 0$ *оператор* $I + \alpha T: H^s(\Omega) \to H^s(\Omega)$ *имеет ограниченный обратный. Если же для некоторого положительного числа* s *выполнено более сильное условие* $|\alpha| < 1\big(\rho^s \rho(T)\big)$, *то ограниченно обратимым будет и оператор* $I + \alpha T: H^{-s}(\Omega) \to H^{-s}(\Omega)$.

Доказательство. В условиях леммы оператор $\mathrm{I} + \alpha T: L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ имеет ограниченный обратный

$$(\mathrm{I} + \alpha T)^{-1}u = \sum_{m=0}^{\infty} (-\alpha)^m T^m u = \sum_{m=0}^{\infty} (-\alpha)^m P^m\,(v_m * u), \qquad (13)$$

$$v_m = P^{1-m}v * \dots * P^{-1}v * v.$$

Пусть $s \geq 0$ и $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$. В этом случае для члена ряда получается оценка

$$\|(-\alpha)^m T^m v\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= (p^n|\alpha|)^{2m} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{v}(p\xi)\tilde{v}(p^2\xi) \dots \tilde{v}(p^m\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s |\tilde{v}(p^m\xi)|^2 d\xi =$$

$$\leq (p^n|\alpha|^2)^m \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{v}(\eta)(p^{-1}\eta) \dots \tilde{v}(p^{m-1}\eta)|^2\,(1 + |p^{-m}\eta|^2)^s |\tilde{v}(\eta)|^2 d\eta \leq$$

$$\leq (p^n|\alpha|^2)^m \sup_{\eta\in\mathbb{R}^n} |\tilde{v}(\eta)\tilde{v}(p^{-1}\eta)\dots\tilde{v}(p^{1-m}\eta)|^2 \int_{\mathbb{R}^n} (1+|p^{-m}\eta|^2)^s|\tilde{v}(\eta)|^2 d\eta.$$

Коэффициент при $\|v\|^2_{\eta\in\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|p^{-m}\eta|^2)^s|\tilde{v}(\eta)|^2 d\eta$ мажорируется убывающей метрической прогрессией. Таким образом, оператор (12) ограничен и в $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Пусть теперь $v \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. Поскольку $(1+|p^{-m}\eta|^2)^{-s} \leq p^{2ms}(1+|\eta|^2)^s$, в этом случае имеем оценку

$$\|(-\alpha)^m T^m v\|^2_{H^{-s}(\mathbb{R}^{-n})} \leq$$
$$\leq (p^{n+2s}|\alpha|^2)^m \sup_{\eta\in\mathbb{R}^n} |\tilde{v}(\eta)\tilde{v}(p^{-1}\eta)\dots\tilde{v}(p^{1-m}\eta)|^2 \|v\|^2_{H^{-s}(\mathbb{R}^{-n})}.$$

Сходимость ряда гарантируется неравенством $|\alpha| < 1/(p^s\rho(T))$.

Перейдем теперь к ограниченной области Ω. Мера v_m сосредоточена на компакте $K_m = K + p^{-1}K + \cdots p^{1-m}K$. Из условия (4) следует, что $p^{-2}\Omega - p^{-1}K \subset p^{-1}\Omega$ и, значит, $p^{-2}\Omega - p^{-1}K - K \subset p^{-1}\Omega \subset -K$, т.е. $p^{-2}\Omega - K_2 \subset \Omega$. Продолжая аналогичным образом, будем иметь $p^{-m}\Omega - K_m \subset \Omega$. Это означает, что сужение функции $P_m(v_m * v)$ на Ω, так что ы условиях леммы оператор (13) действует и как ограниченный оператор в $H^{\pm s}(\Omega)$, являясь обратным к оператору $I + \alpha T: H^{\pm s}(\Omega) \to H^{\pm s}(\Omega)$.

Разрешимость краевой задачи

В условиях предыдущего параграфа рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta\big(u(x) + \alpha P(v * u)(x)\big) = f(x) \;\; (x \in \Omega), \tag{14}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{15}$$

Считая $f \in L_2(\Omega)$, под обобщенным решением задачи (14), (15) будем понимать функцию $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(\big(u + \alpha P(v * u)\big)_{x_j}, v_{x_j}\Big)_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)} \tag{16}$$

при любой функции $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Теорема 3. *При выполнении условия (4) и неравенства*

$$|\alpha| < p^{1-n/2}\left[\lim_{m\to\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|\tilde{v}(\xi)\tilde{v}(p\xi)\dots\tilde{v}(p^{m-1}\xi)|^{1/m}\right]^{-1} \tag{17}$$

задача (14), (15) имеет единственное обобщенное решение $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ для любой функции $f \in L_2(\Omega)$. Если вдобавок $f \in H^k(\Omega)$, а $\partial\Omega \in C^{k+2}$ ($k-$ *целое неотрицательное), то* $u \in H^{k+2}(\Omega)$.

Доказательство. Хорошо известно, что оператор Лапласа действует как линейный гомеоморфизм между пространством $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и сопряженным к нему пространством $(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^* = H^{-1}$. Если переписать выражение в левой части уравнения (6) в виде $-\big(\Delta u + \alpha p^{-2}P(v * \Delta u)\big) = -(I + \alpha p^{-2}T)\Delta u$, где $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, то становится понятно, что вопрос об однозначной разрешимости задачи (14), (15) сводится к вопросу обратимости оператора $I + \alpha p^{-2}T: H^{-1}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$. Неравенство (9) означает, что $|\alpha|p^{-2} < 1/(p\rho(T))$. Тогда по лемме 2 данный оператор имеет ограниченный обратный $(I + \alpha p^{-2}T)^{-1}: H^{-1}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, так что в условиях теоремы исходная задача эквивалента задаче Дирихле для уравнения $-\Delta u = (I + \alpha p^{-2}T)^{-1}f$. Утверждение теоремы следует теперь из известных свойств решений задачи Дирихле для уравнения Пуассона и ограниченности оператора $(I + \alpha p^{-2}T)^{-1}$ также в пространстве $L_2(\Omega)$ и пространствах $H^k(\Omega)$.

Замечание 3. Конечно, обобщенное решение задач (14), (15) существует и единственно и в случае обобщенной функции $f \in H^{-1}(\Omega)$, если правую часть в (16) понимать как действие функционала f на пробную функцию $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Пример 6. В шаре $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}$ рассмотрим задачу Дирихле для уравнения

$$-\Delta(u(x) + \alpha \iint\limits_{|h|=r} u(p^{-1}x - h)dS_h = f(x), \tag{18}$$

где $r < (p-1)R/p-$ данное неравенство обеспечивает выполнение (12). Теорема 1 с учетом примера 2 гарантирует однозначную разрешимость задачи (18), (15) при условии $4\pi p^{1/2}r^2|\alpha| < 1$.

Пример 7. Приведем пример, показывающий, что при определенных значениях α (достаточно больших по модулю) задача вида (14), (15) может быть иметь бесконечно много обобщенных решений. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2 -$ квадрат $\{-1 < x_1, x_2 < 1\}$ и $h = (1{,}1)$. Рассмотрим в Ω задачу Дирихле для уравнения

$$-\Delta(u(x) + \alpha[u((x+h)/2) - u((x-h)/2))] = f(x)\ (x \in \Omega). \qquad (19)$$

Здесь $Tu(x) = u((x+h)/2) - (x-h)/2))$, условие (4) выполнено (оператор представляет собой комбинацию сжатий с центрами в вершинах квадрата $(1{,}1)$ и $(-1,-1)$), а все выражение под знаком лапласиана задает, очевидно, ограниченный оператор $I + \alpha T\colon \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$.

Покажем, что уравнение $I + \alpha Tu = w$ имеет для себя любой функции $w \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ (линейное многообразие решений бесконечномерно), если $|\alpha| > 1$. Тогла и краевая задача $(19), (15)$ для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ будет иметь бесконечно много обобщенных решений. С другой стороны, теорема 1 гарантирует однозначную разрешимость задачи $(18), (15)$ при $|\alpha| \leq 1/2$ (и даже при $|\alpha| \leq 3^{3/4}/4$, оценку можно еще улучшить, см. пример 4).

Зафиксируем w и построим некоторые решения уравнения $I + \alpha Tu = w$. Для этого нам понадобятся следующие значения:

$$\Omega_1 + \{0 < x_1, x_2 < 1\}, \qquad \Omega_2 = \{-1 < x_1 < 0, 0 < x_2 < 1\},$$

$$\Omega_3 = \{-1 < x_1, x_2 < 0\}, \qquad \Omega_4 = \{0 < x_1 < 1, -1 < x_2 < 0\},$$

$$\Omega_{11} = \{1/2 < x_1, x_2 < 1\}, \qquad \Omega_{12} = \{0 < x_1 < 1/2\,, 1/2 < x_2 < 1\},$$

$$\Omega_{13} = \{0 < x_1, x_2 < 1/2\,, x_2 < 1/2\}, \qquad \Omega_{14} = \{1/2 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1/2\}$$

(это части квадрата Ω в координатах четвертях, причем часть Ω_1, лежащая в первой четверти, делится еще на четыре части),

$$\Gamma_1 = \{x_1 - 1/2 : -1 < x_1 < 0\}, \qquad \Gamma_2 = \{(-1/2\,, x_2) \colon -1 < x_2 < 0\}.$$

Также через u_i обозначим сужение искомой функции u на квадрат Ω_i, а $u_i -$ на квадрат $\Omega_{1i}, i = 1{,}2{,}3{,}4$. Будем искать $u_i \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_i), u_{1i} \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_{1i})$. Каждую из функций u, u_i, u_{1i} будем считать продолженной нулем вне соответствующего квадрата, так что не вызывает недоразумений запись

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \qquad u_1 = u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14}.$$

С учетом сказанного исследуемого функциональному уравнение можно переписать в виде системы

$$u_1(x) + \alpha u_1((x+h)/2) - \alpha u_3\,(x-h)/2)) = w(x) \ \ (x \in \Omega_1), \tag{20}$$

$$u_2(x) + \alpha u_1((x+h)/2) - \alpha u_3\,(x-h)/2)) = w(x) \ \ (x \in \Omega_2), \tag{21}$$

$$u_3(x) + \alpha u_1((x+h)/2) - \alpha u_3\,(x-h)/2)) = w(x) \ \ (x \in \Omega_3), \tag{22}$$

$$u_4(x) + \alpha u_1((x+h)/2) - \alpha u_3\,(x-h)/2)) = w(x) \ \ (x \in \Omega_4). \tag{23}$$

Зададимся функцией $u_3 \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_3)$, удовлетворяющей условиям

$$u_3|_{\Gamma_1} = -\alpha^{-1} w(2x+h)|_{\Gamma_1}, \qquad u_3|_{\Gamma_2} = -\alpha^{-1} w(2x+h)|_{\Gamma_2}, \tag{24}$$

а в остальном совершенно произвольной. Уравнением (22) тогда однозначно определены значения функции u_1 в Ω_{13}:

$$u_{13}(x) = u_1(x) = \alpha^{-1}(w(2x-h) - u_3(x-h)) + u_3(x-h) \ \ (x \in \Omega_{13}),$$

при этом функция u_{13} имеет нулевой след на $\partial\Omega_{13}$, т.е. $u_{13} \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_{13})$, в силу наложенных на u_3 условий (24). Действительно, к примеру, на стороне $0 < x_1 < 1/2\,, x_2 = 1/2$ квадрата имеем

$$u_{13}(x_1, 1/2) =$$

$$= \alpha^{-1}(w(2x_1 - 1{,}0) - u_3(2x_1 - 1{,}0)) + u_3(x_1 - 1, -1/2) =$$

$$= \alpha^{-1} w 2x_1 - 1{,}0) + \ u_3(x_1 - 1, -1/2) = 0.$$

Положим $u_{12} = 0, u_{14} = 0$, и обратимся к уравнению (20), из которого мы собираемся найти u_{11}. Его можно переписать следующим образом:

$$u_{11}(x) + \alpha u_{11}((x+h)/2) = w(x) + \alpha_3((x-h)/2) - u_{13}(x) \ \ (x \in \Omega_{13}). \tag{25}$$

В этом уравнении функция справа принадлежит $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_1)$ благодаря условиям (24), а оператор в левой части есть сумма тождественного оператора и (с коэффициентом α) оператора со сжатием аргумента с центром в точке $(1{,}1)$. Из [7, Лемма 1.2] следует, что при $|\alpha| > 1$ этот оператор является линейным гомеоморфизмом $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_{11})$ на $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_{11})$, и функция u_1 полностью построена. Для нахождения u_2 и u_4 остается просто воспользоваться уравнениями (21), и (7), причем условия (24) вновь гарантируют принадлежность этих функций пространствам $\overset{\circ}{H}^1(\Omega_2)$ и $\overset{\circ}{H}^1(\Omega_4)$, соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rossovskii, L. E. Elliptic Functional Differential Equations with Contractions and Extensions of Independent Variables of the Unknown Function Journal of Mathematical Sciences, 2017, vol. 223, no. 4, pp. 351–493. DOI: 10.1007/s10958-017-3360-1.
2. Rossovskii, L. E. and Tasevich, A. L. The First Boundary-Value Problem for Strongly Elliptic Functional-Differential Equations with Orthotropic Contractions, Mathematical Notes, 2015, vol. 97, no. 5–6, pp. 745–758. DOI: 10.1134/S0001434615050090
3. Rossovskii, L. E. Elliptic Functional Differential Equations with Incommensurable Contractions, Mathematical Modelling of Natural Phenomena, 2017, vol. 12, no. 6, pp. 226–239. DOI: 10.1051/ mmnp/2017075
4. Rossovskii, L. E. and Tovsultanov, A. A. Elliptic Functional Differential Equations with Affine Transformations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, vol. 480, no. 2, pp. 123403. DOI: 10.1016/j.jmaa.2019.123403
5. Rudin, W. Functional Analysis, New York–D¨usseldorf–Johannesburg, McGraw-Hill Book Co., 1973
6. У. Рудин. Функциональный анализ. – М.: Мир. 1975.
7. А.Л. Скубачевский . краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи мат. наук. – 2016. – 71. № 5. – С. 3 – 112.
8. В.а. Амбарцумян. К теории флуктуаций яркости в млечном пути // Докл. акад. наук СССР. – 1944. – 44. – С. 244-247.
9. J.R. Ockendon and A.B. Tayler. The dynamics of a current collection system for a electric locomotive // Proc. Royal Soc. London A. – 1971. – 322. – P. 447-468.

10. A.J. Hall and G.C. Wake. A functional differential equation arising in the modeling of cell growth // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. – 1989. – 30. – P. 424-435.
11. K. Mahler. On a special functional equation // J. London Math. Soc. – 1940. – 15. – P. 115-123.
12. D.P. Gaver, Jr. An absorption probability problem // J. Math. Anal. Appl. – 1964, - 9. – P. 384-393.
13. Россовский Л.Е., Товсултанов А.А. О задаче Дирихле для эллиптического функционально-дифференциального уравнения с аффинным преобразованием аргумента // Доклады Академии наук. - 2019. - Т. 489. - №4. - С. 347-350. doi: 10.31857/S0869-56524894347-350
14. Товсултанов А. А. Функционально-дифференциальное уравнение с растяжением и поворотом // Владикавк. мат. журн.—2021. - Т. 23, вып. 1. - С. 67–77. DOI6 10.46698/m8501-0316-5751-a
15. https://cyberleninka.ru/article/n/funktsionalno-differentsialnoe-uravnenie-s-rastyazheniem-i-povorotom/viewer

§2. Задача Дирихле в плоской ограниченной области для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения второго порядка

Рассматривается задача Дирихле в плоской ограниченной области для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения второго порядка, содержащего в старших производных преобразования аргументов вида $x \mapsto px\ (p > 0)$ и $x \mapsto x$. Исследование разрешимости задачи опирается на неравенство типа Гординга, для которого получены необходимые и достаточные условия в алгебраической форме.

Функционально-дифференциальные уравнения с аффинными преобразованиями аргумента, обобщающие хорошо известное уравнение пантографа, находят применения в самых разных областях: астрофизике [1], нелинейных колебаниях [2], биологии [3], теории чисел [4], теории вероятностей [5]. Они являются модельными в классе уравнений с неограниченным запаздыванием, а изучение их многомерных аналогов имеет существенное значение при построении общей теории эллиптических краевых задач для уравнений с бесконечной неизометрической группой сдвигов [6]. Функционально-дифференциальные уравнения с аффинными преобразованиями на прямой достаточно подробно изучались начиная с 1970-х гг., в связи с вопросами существования ограниченных решений и асимптотического поведения решений на бесконечности (см., например, [7–9]). К настоящему времени опубликовано значительное число работ этих же авторов, а также ряда других математиков.

Теория краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений, а также уравнений со сжатиями и растяжениями независимых переменных построена в [10–16]. Эллиптическое функционально-дифференциальное уравнение, содержащее комбинацию сжатия и сдвигов аргумента, изучено в [17].

В [18] рассматривалась краевая задача

$$\mu u + \sum_{j=1}^{2} \left(T(P, R_\alpha) u_{xj}\right)_{xj} = f(x) \ (x \in \Omega), \qquad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

в плоской ограниченной области Ω, содержащей начало координат. Здесь $\mu \in C -$ спектральный параметр, $f \in L_2(\Omega), P -$ оператор растяжения с коэффициентом $p > 1$:

$$Pu(x) = p^{-1}(p^{-1}x) = p^{-1}u(p^{-1}x_1, p^{-1}x_2),$$

$R_\alpha -$ оператор поворота на угол $\alpha \in R$:

$$R_\alpha u(x) = u(x_\alpha) = u(x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha\,, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha),$$

а оператор $T(P, R_\alpha)$ имеет вид

$$T(P, R_\alpha) = \sum a_{mk}\, P^m R_\alpha^k$$

в случае, когда угол поворота α несоизмерим с π, и

$$T(P,R_\alpha) = \sum a_{m0}\,P^m + \sum a_{m1}\,P^m R_\alpha + \dots + \sum a_{m,n-1}\,P^m R_\alpha^{n-1}$$

когда α соизмерим с π ($n -$ наименьшее натуральное число такое, что число nα кратно 2π). Индексы m и k пробегают конечные подмножества целых чисел, $a_{mk} \in \mathbb{C}$.

Были найдены необходимые и достаточные условия в алгебраической форме выполнения неравенства типа Гординга (сильная эллиптичность), обеспечивающего однозначную (фредгольмову) разрешимость, дискретность и секториальную структуру спектра задачи (1). В настоящей работе в предположении $\alpha = \pi$ (соответственно $R_\pi u(x) = u(-x)$) подход и результаты из [18] распространяются на уравнение более общей структуры

$$\mu u + \sum_{i,j=1}^{2} \left(T_{ij}(P,R_\pi)u_{xi}\right)_{x_j} = f(x) \ \ (x \in \Omega) \tag{2}$$

с различными функциональными операторами

$$T_{ij}(P,R_\pi) = \sum a_{ijm}P^m + \sum b_{ijm}P^m R_\pi,$$

$a_{ijm}, b_{ijm} \in \mathbb{C}$ а индекс суммирования m пробегает конечное подмножество $\mathbb{Z}$.

Через $H^1(\Omega)$ в работе обозначается пространство Соболева всех комплекснозначных функций $u(x)$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, принадлежащих $L_2(\Omega)$ вместе с обобщенными производными первого порядка u_{x_1}, u_{x_2}, а через $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) -$ замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Пространства $H^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$гильбертовы со скалярными произведениями

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega \left(u\bar{v} + \sum_{j=1}^{2} u_{x_j}\bar{v}_{x_j}\right)dx, \qquad (u,v)_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega u_{x_j}\bar{v}_{x_j}\,dx.$$

Алгебра функциональных операторов

Обозначим через $\mathfrak{U}_{p,\pi}$ подалгебру алгебры $\mathfrak{B}\big(L_2(\mathbb{R}^2)\big)$ ограниченных операторов в $L_2(\mathbb{R}^2)$, порожденную парой коммутирующих унитарных операторов $P, R_\pi: L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$. Это коммутативная B^*-алгебра, полученная замыканием по операторной норме конечных сумм $T(P, R_\pi) = \sum a_m P^m + \sum b_m P^m R_\pi$ $(a_m, b_m \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{Z})$. Пусть $\Delta_{p,\pi} -$ пространство максимальных идеалов этой алгебры. В [18, теорема 2] показано, что $\Delta_{p,\pi}$ гомеоморфно дизъюнктному объединению двух экземпляров окружности $\mathbb{S}, \Delta_{p,\pi} \simeq \mathbb{S} \times \{\pm 1\}$. Отсюда и из теоремы Гельфанда – Наймарка [19, теорема 11.18] следует, что алгебра $\mathfrak{U}_{p,\pi}$ изометрически изоморфна алгебре $C(\mathbb{S}; \mathbb{C}^2)$ всех непрерывных $\mathbb{C}^2$-значных функций на окружности. При таком изоморфизме оператору $T(P, R_\pi)$ отвечает функция

$$t(\lambda, w) = \sum (a_m + b_m w)\, \lambda^m \quad (\lambda \in \mathbb{C}, \qquad |\lambda| = 1, \qquad w = \pm 1)$$

или, что то же самое, пара функций

$$t^{\pm}(\lambda) = \sum (a_m + b_m w)\, \lambda^m \quad (\lambda \in \mathbb{C}, \qquad |\lambda| = 1).$$

При исследовании вопроса об удовлетворении уравнения (2) неравенству Гординга нам понадобится более широкая по сравнению с $\mathfrak{U}_{p,\pi}$ алгебра операторов, включающая также операторы умножения на однородные функции нулевой степени.

Любую однородную функцию $g(\xi)$ нулевой степени ($g(r\xi) = g(\xi)$ при $0 \neq r \in \mathbb{R}, 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^2$), непрерывную в $\mathbb{R}^2_\xi/\{0\}$, можно рассматривать как элемент алгебры $C(\mathbb{PR}^1)$ всех непрерывных комплексных функций на проективной прямой $\mathbb{PR}^1$ с однородными координатами $\xi_1 : \xi_2$. Отметим, что в $C(\mathbb{PR}^1)$ всюду плотны полиномы от функций

$$y_1(\xi) = \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{|\xi|^2}, \qquad y_2(\xi) = \frac{2\xi_2\xi_2}{|\xi|^2},$$

задающих гомеоморфизм

$$v: \mathbb{PR}^1 \to \mathbb{S}, \xi_1 : \xi_2 \mapsto \big(y_1(\xi), y_2(\xi)\big), \tag{3}$$

проективной прямой $\mathbb{PR}^1$ на $\mathbb{S}$ (удвоение угла). Это следует из теоремы Стоуна — Вейерштрасса или из того факта, что любая π-периодическая непрерывная функция равномерно приближается тригонометрическими полиномами от $\cos 2\varphi, \sin 2\varphi$.

Сопоставим функции g ограниченный в $L_2(\mathbb{R}^2)$ оператор умножения на g:

$$Gu(\xi) = g(\xi)u(\xi).$$

При этом легко убедиться (см., например, [14, с. 52]), что отображение $g \mapsto G$ является изометрическим изоморфизмом алгебры $C(\mathbb{PR}^1)$ на замкнутую подалебру $\mathfrak{U}_g$ алгебры $\mathfrak{B}\big(L_2(\mathbb{R}^2)\big)$, состоящую из всех таких операторов. Поэтому, в частности, всякий комплексный гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{U}_g$ имеет вид

$$h(G) = g(\xi^h) \ \left(\xi_1^h : \xi_2^h \in \mathbb{PR}^1\right),$$

т. е. пространство максимальных идеалов Δ_g алгебры $\mathfrak{U}_g$ совпадает с $\mathbb{PR}^1$. Кроме того, в $\mathfrak{U}_g$ плотны полиномы от операторов Y_1, Y_2 умножения на функции $y_1(\xi), y_2(\xi)$.

Принципиальным моментом является то, что операторы из $\mathfrak{U}_{p,\pi}$ коммутируют с операторами из $\mathfrak{U}_g$, поскольку $g(\xi) = g(-\xi)$. Коммутативную B^* - алгебру, полученную замыканием по операторной норме конечных сумм вида

$$\sum G_j T_j\,(P, R_\pi) \ \left(G_j \in \mathfrak{U}_g, T_j(P, R_\pi) \in \mathfrak{U}_{p,\pi}\right)$$

или, что то же самое, сумм вида

$$\sum G_m^+\, P^m + \sum G_m^-\, P^m R_\pi \ \left(G_m^\pm \in \mathfrak{U}_g\right), \tag{4}$$

обозначим через $\mathfrak{U}_{p,\pi,g}$.

Лемма 1. *Для нормы оператора (4) справедлива оценка снизу*

$$\left\| \sum G_m^\pm P^m + \sum G_m^-\, P^m R_\pi \right\| \geq \sup_{\xi_1^h : \xi_2^h \in \mathbb{PR}^1} \left(\sum \left| g_m^\pm(\xi) \right|^2 + |g_m^-(\xi)|^2 \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Здесь $G_m^\pm -$ операторы умножения на $g_m^\pm(\xi)$. Зафиксируем на плоскости круг $B = B(\xi^0; \varepsilon)$ с центром в любой точке $\xi^0 \neq 0$ настолько малого радиуса ε, что все круги $B_m^{\pm} = B(\pm p^m \xi^0; p^m \varepsilon)$ попарно не пересекаются, когда индекс m пробегает присутствующие в рассматриваемом операторе значения. Это возможно, поскольку все точки $\pm p^m \xi^0$ различны. Образом характеристической функции $\chi_B(\xi)$ круга B под действием оператора (4) будет функция $s(\xi)$, равная $p^{-m} g_m^{\pm}(\xi)$ в кругах $B_m^{\pm}$ и нулю вне этих кругов. С учетом однородности функций $g_m^{\pm}(\xi)$ будем иметь

$$\frac{\|s\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}}{\|\chi_B\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}} = \frac{1}{|B|}\sum \int\limits_{B_m^+} p^{-2m} |g_m^+(\xi)|^2 \, d\xi + \frac{1}{|B|}\sum \int\limits_{B_m^-} p^{-2m} |g_m^-(\xi)|^2 \, d\xi =$$

$$= \frac{1}{|B|}\sum \int\limits_{B} (|g_m^+(\xi)|^2 + |g_m^-(\xi)|^2) \, d\xi,$$

так что

$$\left\| \sum G_m^+ P^m + \sum G_m^+ P^m R_\pi \right\|^2 \geq \frac{1}{|B|}\sum \int\limits_{B} (|g_m^+(\xi)|^2 + |g_m^-(\xi)|^2) \, d\xi$$

при всех достаточно малых ε. Используя непрерывность подынтегральной функции в B, интегральную теорему о среднем и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\left\| \sum G_m^+ P^m + \sum G_m^+ P^m R_\pi \right\|^2 \geq \sum \int\limits_{B} |g_m^+(\xi^0)|^2 + |g_m^-(\xi^0)|^2.$$

Утверждение леммы следует теперь из произвольности точки $\xi^0 \in \mathbb{R}^2/\{0\}$.

Следующая теорема содержит основной результат этого пункта.

Теорема 1. *Пространство максимальных идеалов* $\Delta_{p,\pi,g}$ *алгебры* $\mathfrak{U}_{p,\pi,g}$ *гомеоморфно прямому произведению* $\mathbb{S} \times \{\pm 1\} \times \mathbb{PR}^1$.

Доказательство. Убедимся вначале, что $\Delta_{p,\pi,g}$ гомеоморфно некоторому компактному подмножеству прямого произведения $\mathbb{S} \times \{\pm 1\} \times \mathbb{S}$. Для этого рассмотрим следующее непрерывное отображение:

$$\phi \colon \Delta_{p,\pi,g} \to \mathbb{C}^4, \qquad \phi(h) = \left(\hat{P}(h), \widehat{R_\pi}(h), \widehat{Y_1}(h), \widehat{Y_2}(h)\right),$$

составленное из преобразований Гельфанда соответствующих операторов. Непрерывность ϕ следует из способа введения топологии на пространстве

максимальных идеалов. Если $h \in \Delta_{p,\pi,g}$, т. е. h − это комплексный гомоморфизм алгебры $\mathfrak{U}_{p,\pi,g}$, то h будет также комплексным гомоморфизмом подалгебр $\mathfrak{U}_{p,\pi}$ и $\mathfrak{U}_g$. Поэтому пара $\left(\hat{P}(h), \widehat{R_\pi}(h)\right) = \left(h(P), h(R_\pi)\right)$ принимает значения в $\mathbb{S} \times \{\pm 1\}$, а $\left(\widehat{Y_1}(h), \widehat{Y_2}(h)\right) = \left(h(Y_1), h(Y_1)\right) = \left(y_1(\xi^h), y_2(\xi^h)\right) \in \mathbb{S}$,
так что образ непрерывного отображения φ лежит в $\mathbb{S} \times \{\pm 1\} \times \mathbb{S}$.

Если предположить, что $\phi(h_1) = \phi(h_2)$, т. е. гомоморфизмы h_1 и h_2 совпадают на операторах P, R_π, Y_1 и Y_2, то они будут совпадать и на операторах (4), где в качестве $G_m^\pm \in \mathfrak{U}_g$ берутся полиномы от Y_1, Y_2, всюду плотные в $\mathfrak{U}_g$. Такие операторы (4) плотны в $\mathfrak{U}_{p,\pi,g}$, так что $h_1 = h_2$ в силу непрерывности h_1, h_2, и отображение φ взаимно однозначно. Следовательно, ϕ есть гомеоморфизм $\Delta_{p,\pi,g}$ на некоторый компакт $K \subset \mathbb{S} \times \{\pm 1\} \times \mathbb{S}$. Комбинируя этот вывод с теоремой Гельфанда — Наймарка, приходим к изометрическому изоморфизму

$$\Psi: \mathfrak{U}_{p,\pi,g} \to C(K), \qquad \Psi(L) = \hat{L}^\circ \phi^{-1}\left(L \in \mathfrak{U}_{p,\pi,g}\right).$$

Непосредственно из определения ϕ следует, что

$$\Psi(P)(\lambda, w, \eta) = \hat{P}\left(\phi^{-1}(\lambda, w, \eta)\right) = \lambda,$$

$$\Psi(R_\pi)(\lambda, w, \eta) = \widehat{R_\pi}\left(\phi^{-1}(\lambda, w, \eta)\right) = w,$$

$$\Psi(Y_i)(\lambda, w, \eta) = \hat{Y_i}\left(\phi^{-1}(\lambda, w, \eta)\right) = \eta_i \ \ (i = 1{,}2).$$

Образом полинома от Y_1, Y_2 при изоморфизме Ψ будет такой же полином от η_1, η_2, а тогда для любой функции $g(\xi)$ из $C(\mathbb{PR}^1)$ соответствующий оператор G перейдет в функцию $\alpha(\eta) = g(v - 1(\eta_1, \eta_2))$, т. е. g переносится с $\mathbb{PR}^1$ на $\mathbb{S}$ при помощи гомеоморфизма (3). В итоге получаем, что операторам вида (4) при изоморфизме Ψ отвечают функции $\sum \alpha_m^+(\eta_1)\,\lambda^m + \sum \alpha_m^+(\eta_1)\,\lambda^m w$ на K, где $\alpha_m^\pm$ пробегают все пространство $C(\mathbb{S})$.

Поскольку Ψ − изометрия, имеем

$$\left\|\sum G_m^+ P^m + \sum G_m^- P^m R_\pi\right\| =$$
$$= \sup\left\{\left|\sum \alpha_m^+(\eta)\lambda^m + \sum \alpha_m^-(\eta)\lambda^m w\right| : (\lambda, w, \eta) \in K\right\}.$$

Отсюда и из леммы 1 вытекает оценка

$$\sup_{\xi_1:\xi_2\in\mathbb{PR}^1}\left(\sum|g_m^+(\xi)|^2+|g_m^-(\xi)|^2\right)^{1/2}\le\sup_K\left|\sum\alpha_m^+(\eta)\lambda^m+\sum\alpha_m^-(\eta)\lambda^m w\right|$$

или

$$\sup_{\eta\in\mathbb{S}}\left(\sum|\alpha_m^+(\eta)|^2+|\alpha_m^-(\eta)|^2\right)^{1/2}\le\sup_K\left|\sum(\alpha_m^+(\eta)-\alpha_m^-(\eta)w)\lambda^m\right|=$$

$$=max\left\{\sup_{K_+}\left|\sum(\alpha_m^+(\eta)+\alpha_m^-(\eta))\lambda^m\right|,\sup_{K_-}\left|\sum(\alpha_m^+(\eta)+\alpha_m^-(\eta))\lambda^m\right|\right\},(5)$$

которая выполняется для любых конечных сумм и функций $\alpha_m^+ C(\mathbb{S})$ и выражает ключевое свойство компакта K, где $K_\pm=\{(\lambda,\eta)\in\mathbb{S}:\mathbb{S}(\lambda,\pm1,\eta)\in K\}$.

При $\alpha_m^-=\alpha_m^+=\alpha_m$ неравенство (5) превращается в

$$\sup_{\eta\in\mathbb{S}}(|\alpha_m(\eta)|^2)^{1/2}\le\sqrt{2}\sup_{K_+}\left|\sum\alpha_m(\eta)\lambda^m\right|. \qquad (6)$$

Покажем, что такое может быть лишь в случае, когда $K_+=\mathbb{S}\times\mathbb{S}$. Предположим противное: открытое множество $(\mathbb{S}\times\mathbb{S})/K_+$ непусто. Тогда оно содержит множество вида $U\times V$, где U и V открыты в S. Возьмем не равные тождественно нулю функции $\beta\in C^\infty(\mathbb{S})$ и $\alpha\in C(\mathbb{S})$ с носителями в U и V соответственно, и пусть β_m – коэффициенты Фурье функции β по ортонормированному базису $\left\{(2\pi)^{-1/2}e^{im\theta}\right\}_{m\in\mathbb{Z}}$ в $L_2(\mathbb{S})$ Рассмотрим последовательность

$$\sum_{|m|\le N}\alpha(\eta)\beta_m\lambda^m \quad (N=0,1,\dots),$$

стремящуюся к нулю равномерно на $(\mathbb{S}\backslash U)\times\mathbb{S}$ и равную нулю тождественно на $\mathbb{S}\times(\mathbb{S}\backslash V)$. Поскольку

$$K_+\subset(\mathbb{S}\times\mathbb{S})/(U\times V)=(\mathbb{S}/U)\times\mathbb{S}\cup\mathbb{S}\times(\mathbb{S}/V),$$

имеем

$$\sup_{K_+}\left|\sum_{|m|\le N}\alpha(\eta)\beta_m\lambda^m\right|\to 0, \qquad N\to\infty.$$

В то же время последовательность

$$\sup_{\eta\in\mathbb{S}}\sum_{|m|\le N}|\alpha(\eta)\beta_m|^2=\|\alpha\|^2_{C(\mathbb{S})}\sum_{|m|\le N}|\beta_m|^2$$

стремится в силу равенства Парсеваля к $\|\alpha\|^2_{C(\mathbb{S})}\|\beta\|^2_{L_2(\mathbb{S})} \neq 0$, что противоречит оценке (6). Таким образом, $K_+ = \mathbb{S} \times \mathbb{S}$. Аналогично показывается, что $K_- = \mathbb{S} \times \mathbb{S}$ (для этого в (5) надо положить $\alpha^-_m = -\alpha^+_m$), так что $K = \mathbb{S} \times \{\pm 1\}\mathbb{S}$. Для завершения доказательства теоремы остается воспользоваться гомеоморфизмом (3), при помощи которого функции из $C(\mathbb{S} \times \{\pm 1\} \times \mathbb{S})$ переносятся на $\mathbb{S} \times \{\pm 1\} \times \mathbb{PR}^1$. Итак, алгебра $\mathfrak{U}_{p.\pi,g}$ изометрически изоморфна алгебре $C(\mathbb{S} \times \{\pm 1\} \times \mathbb{PR}^1$, а образом оператора (4) при этом изоморфизме (символом оператора) будет функция

$$\sum g^+_m(\xi)\lambda^m + \sum g^-_m(\xi)\lambda^m w \ \ (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, w = \pm 1, \xi_1 : \xi_2 \in \mathbb{PR}^1)$$

или, что то же самое, пара функций

$$\sum \big(g^+_m(\xi) \pm g^-_m(\xi)\big)\lambda^m \ \ (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, \xi_1 : \xi_2 \in \mathbb{PR}^1).$$

Из описанного выше изоморфизма вытекает следующий критерий положительной определенности операторов алгебры $\mathfrak{U}_{p.\pi,g}$.

Следствие 1. *Оператор (4) положительно определен в* $L_2(\mathbb{R}^2)$ *тогда и только тогда, когда* $\sum\big(g^+_m(\xi) \pm g^-_m(\xi)\big)\lambda^m$ *при всех* $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$, *и* $\xi_1 : \xi_2 \in \mathbb{PR}^1$.

Разрешимость краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2 -$ ограниченная область. Определим оператор $T(P, R_\pi)$ на функциях из $L_2(\Omega)$ следующим образом: вначале функция $u \in L_2(\Omega)$ продолжается нулем в $\mathbb{R}^2/\Omega$, затем к этому продолжению применяется действующий в $L_2(\mathbb{R}^2)$ оператор $T(P, R_\pi)$, а после результат действия оператора сужается на Ω. Понятно, что в этом случае также имеем ограниченный линейный оператор $T(P, R_\pi) : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, причем из положительной определенности оператора $T(P, R_\pi)$ в $L_2(\mathbb{R}^2)$ следует, очевидно, его положительная определенность в $L_2(\Omega)$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\mu u + \sum_{i,j=1}^{2} \left(T(P, R_\pi) u_{x_i} \right)_{x_j} = f(x) \ \ (x \in \Omega), \tag{7}$$

$$u|_{\partial u} = 0. \tag{8}$$

Здесь $\mu \in \mathbb{C} -$ спектральный параметр, $f \in L_2(\Omega)$, а операторы $T_{ij}(P, R_\pi)$ задаются формулами

$$T_{ij}(P, R_\pi) = \sum a_{ijm} \, P^m + \sum b_{ijm} \, P^m R_\pi,$$

где $a_{ijm}, b_{ijm} \in \mathbb{C}$, а индекс суммирования m пробегает конечное подмножество $\mathbb{Z}$.

Введем функции

$$g_m^+(\xi) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ijm} \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}, \qquad g_m^-(\xi) = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ijm} \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}, \qquad g_m^\pm(\xi) \in C(\mathbb{PR}^1), \tag{9}$$

и назовем символом уравнения (7) пару $\sum (g_m^+(\xi) \pm g_m^-(\xi)) \, \lambda^m$, определенную на множестве $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, \xi_1 : \xi_2 \in \mathbb{PR}^1$.

Обобщенным решением задачи (7), (8) назовем функцию $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, удовлетворяющую при всех $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ интегральному тождеству

$$\mu (u, v)_{L_2(\Omega)} - \sum_{i,j=1}^{2} \left(T_{ij}(P, R_\pi) u_{xi}, v_{xj} \right)_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Уравнение (7) назовем *сильно эллиптическим* в $\overline{\Omega}$, если существуют постоянные $c_1 > 0, c_2 \geq 0$ такие, что неравенство (называемое неравенством типа Гординга)

$$Re \sum_{i,j=1}^{2} \left(T_{ij}(P, R_\pi) u_{xi}, v_{xj} \right)_{L_2(\Omega)} \geq c_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 - c_1 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \tag{10}$$

выполнено при всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Теорема 2. *Пусть*

$$Re \sum \left(g_m^+(\xi) \pm g_m^-(\xi) \right) \lambda^m > 0 \ \ (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, \xi_1 : \xi_2 \in \mathbb{PR}^1). \tag{11}$$

Тогда для всякой ограниченной области Ω *уравнение (7) сильно эллиптическое в* $\overline{\Omega}$.

Доказательство. Применим преобразование Фурье $u(x) \mapsto \tilde{u}(x)\big(u \in C_0^\infty(\Omega)\big)$ и учтем, что

$$Pu(x) \mapsto P^*\tilde{u}(x), \qquad R_\pi u(x) \mapsto R_\pi \tilde{u}(\xi).$$

Тогда по теореме Планшереля

$$Re \sum_{i,j=1}^{2} \big(T_{ij}(P, R_\pi)u_{xi}, v_{xj}\big)_{L_2(\Omega)} = Re \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \xi_j \overline{\tilde{u}(\xi)}\, T_{ij}(P^*, R_\pi)|\xi_i \tilde{u}(\xi)| d\xi =$$

$$= Re \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-1}\xi_j \overline{v(\xi)}\, T_{ij}(P^*, R_\pi)||\xi|^{-1}\xi_i v(\xi)| d\xi$$

где $v(\xi) = |\xi|\tilde{u}(\xi)$. После очевидных выкладок

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\xi_j}{|\xi|} \overline{v(\xi)} \Big(\sum a_{ijm} P^{*m} + \sum b_{ijm} P^{*m} R_\pi\Big) \Big[\frac{\xi_j}{|\xi|} v(\xi)\Big] =$$

$$= \overline{v(\xi)} \Big(\sum G_m^+ P^{*m} - \sum G_m^- P^{*m} R_\pi\Big) v(\xi)$$

с учетом обозначений (9) левая часть неравенства (10) приобретает вид

$$Re\left(\Big(\sum G_m^+ P^{*m} - \sum G_m^- P^{*m} R_\pi\Big) u, v\right)_{L_2\left(\mathbb{R}_\xi^2\right)}.$$

Ввиду следствия 1 условие теоремы означает, что эрмитова часть оператора полученной квадратичной формы положительно определена. Действительно, неравенства $Re \sum\big(g_m^+(\xi) \pm g_m^-(\xi)\big)\lambda^m > 0$ равносильны неравенствам

$$Re \sum \big(g_m^+(\xi) \pm g_m^-(\xi)\big)\bar{\lambda}^m > 0$$

на множестве $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1,$ и $\xi_1 : \xi_2 \in \mathbb{PR}^1$. Окончательно имеем

Замечание 1. Условие (11) можно также записать следующим образом:

$$\sum_{i,j=1}^{2} \xi_i \xi_j\, Re t_{ij}^{\pm}(\lambda) > 0 \;\; (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^2), \qquad (12)$$

где $t_{ij}^{\pm}(\lambda) > 0 = \sum\big(a_{ijm} \pm b_{ijm}\big)\lambda^m$.

Замечание 2. Применяя рассуждения, аналогичные используемым при доказательстве теоремы 3 из [18], нетрудно убедиться, что положительность символа является также необходимым условием сильной эллиптичности в случае, когда область Ω содержит начало координат. Далее исследуем необходимые условия сильной эллиптичности при более общем предположении относительно области. Для этого нам понадобится матричный подход, который применялся вначале для исследования дифференциально-разностных уравнений [10, 11], а затем уравнений с растяжениями и сжатиями аргументов [14].

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$ и выберем произвольную ограниченную область O_1 на плоскости такую, что все области

$$O_k^+ = p^{1-k}O_1, \qquad O_k^- = -O_k^+ \ \ (k = 1, \dots, N)$$

попарно не пересекаются. Положим $O = \bigcup_{k=1}^{N}(O_k^+ \cup O_k^-)$.

Заданной в O функции $u(x)$ поставим в соответствие вектор-функцию

$$u = (u_1^+, \dots, u_N^+, u_1^-, \dots, n_N^-)^T,$$

$$u_k^+(u) = p^{1-k}u(p^{1-k}x), \qquad u_k^-(x) = p^{1-k}u(-p^{1-k}x) \ \ (k = 1, \dots, N; x \in O_1),$$

определенную в O_1, при этом отображение $u \mapsto u$ из $L_2(O)$ в $L_2^{2N}(O_1)$, очевидно, унитарно. Далее по заданному оператору $T = \sum(a_m I + b_m R_\pi)P^m$ строим $N \times N$-матрицы T^+ и T^- с элементами

$$t_{kl}^+ = a_{l-k}, \qquad t_{kl}^- = b_{l-k} \ \ (k, l = 1, \dots, N)$$

и составляем блочную матрицу

$$T = \begin{bmatrix} T^+ & T^- \\ T^- & T^+ \end{bmatrix}$$

порядка $2N \times 2N$. Если $v = Tu$ и $v = (v + 1, \dots, v + N, v - 1\,, \dots, v - N)T -$ соответствующая v вектор-функция в O_1, то $v = Tu$. Действительно,

$v_k^+(x) = p^{1-k}Tu(p^{1-k}x) =$

$$= \sum_m p^{1-k}\left(a_m p^{-m} u\big(p^{1-(k+m)}x\big) + b_m p^{-m} u\big(-p^{1-(k+m)}x\big)\right) =$$

$$= \sum_l (a_{l-k}p^{1-l}u(p^{1-l}x) + b_{l-k}p^{1-l}u(-p^{1-l}x)) = \sum_{i=1}^{N}\big(t_{kl}^+ u_l^+(x) + t_{kl}^- u_l^-(x)\big),$$

$v_k^-(x) = p^{1-k}Tu(-p^{1-k}x) =$

$$= \sum_{m} p^{1-k} \left(a_m p^{-m} u\big(-p^{1-(k+m)}x\big) + +b_m p^{-m} u\big(p^{1-(k+m)}x\big) \right) =$$

$$= \sum_{l} \left(a_{l-k} p^{1-l} u(-p^{1-l}x) + b_{l-k} p^{1-l} u(p^{1-l}x) \right) = \sum_{l=1}^{N} \big(t_{kl}^{+} u_l^{+}(x) + t_{kl}^{-} u_l^{-}(x) \big).$$

Лемма 2. *Пусть матрицы $T + T^*$ равномерно по N положительно определены, т. е. существует постоянная $c > 0$ такая, что*

$$Re(Tz, z) \geq c|z|^2 \ \ (N = 1,2, \dots, z \in \mathbb{C}^N).$$

Тогда оператор $T + T^*: L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ положительно определен.

Доказательство. Для произвольных $N \in \mathbb{N}$ и $M > 0$ положим

$$O_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : p^{-1}M < |x| < M, x_2 > 0\}, \qquad O = \bigcup_{k=1}^{N} (O_k^{+} \cup O_k^{-}).$$

Ясно, что все области $O_k^{+} = p^{1-k}O_1, O_k^{-} = -O_k^{+}$ $(k = 1, \dots, N)$ попарно не пересекаются. Пусть $u \in L_2(\mathbb{R}^2), u = 0$ вне O и $v = Tu$. Используя условие леммы, унитарность отображения $u \longmapsto u$ и соотношение $v = Tu$, можно записать

$$Re(Tu, u)_{L_2(\mathbb{R}^2)} = Re(u, v)_{L_2(O)} = Re(v, u)_{L_2^{2N}(O_1)} =$$

$$= Re(Tu, u)_{L_2^{2N}(O_1)} \geq c\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2,$$

причем с не зависит от N, M, u. Но при всевозможных M и N функция u пробегает всюду плотное в $L_2(\mathbb{R}^2)$ подмножество. Поэтому неравенство

$$Re(Tu, u)_{L_2(\mathbb{R}^2)} \geq c\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2$$

выполняется для любых $u \in L_2(\mathbb{R}^2)$.

Теорема 3. *Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ обладает следующим свойством: для любого натурального числа N найдется точка $x^0 \in \Omega$ такая, что точки $\pm p^{1-k}x^0$ $(k = 1, \dots, N)$ также принадлежат Ω. Тогда если уравнение (7) сильно эллиптическое в $\overline{\Omega}$, то имеет место неравенство (12).*

Замечание 3. В условии теоремы, очевидно, $0 \in \overline{\Omega}$, при этом условие заведомо выполнено, если $0 \in \Omega$. С другой стороны, легко видеть, что одного лишь требования $0 \in \overline{\Omega}$ недостаточно для выполнения условия теоремы.

Доказательство. Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$. Ясно, что в условии теоремы можно взять круг O_1 с центром в точке x 0 настолько малого радиуса, что все круги $O_k^+ = p^{1-k}O_1, O_k^- = -O_k^+$ (с центрами в точках $\pm p^{1-k}x^0, k = 1, \dots, N$) целиком лежат в Ω и попарно не пересекаются. В таком случае можно подставлять в неравенство (10) функции с носителями в $O = \bigcup_{k=1}^{N}(O_k^+ \cup O_k^-)$: $u \in C_0^\infty(O) \subset C_0^\infty(\Omega)$. Наряду с вектор-функцией

$$u = (u_1^+, \dots, u_N^+, u_1^-, \dots, u_N^-)^T \in C_0^{\infty,2N}(O_1)$$

нам понадобится вектор-функция

$$w = (w_1^+, \dots, w_N^+, w_1^-, \dots, w_N^-)^T \in C_0^{\infty,2N}(O_1), \qquad w_k^\pm(x) = \pm p^{k-1}u_k^\pm(x).$$

Справедливы соотношения

$$\left(u_{xj}\right)_k^+(x) = p^{k-1}u_{xj}(p^{k-1}x) =$$

$$= p^{k-1}p^{1-k}\left(u(p^{1-k})\right)_{x_j} = p^{k-1}u_{kx_j}(x) = w_{kx_j}^+(x),$$

$$\left(u_{xj}\right)_k^-(x) = p^{k-1}u_{xj}(-p^{k-1}x) =$$

$$= -p^{k-1}p^{1-k}\left(u(-p^{1-k}x)\right)_{x_j} = -p^{k-1}u_{kx_j}^-(x) = w_{kx_j}^-(x),$$

т. е. функции u_{x_j} отвечает вектор-функция w_{x_j} в круге O_1. Отсюда получаем

$$\left(T_{ij}(P, R_\pi)u_{x_i}, u_{x_j}\right)_{L_2(\Omega)} = \left(T_{ij}(P, R_\pi)u_{x_i}, u_{x_j}\right)_{L_2(\mathrm{O})} = \left(T_{ij}w_{x_i}, w_{x_j}\right)_{L_2^{2N}(O_1)},$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \sum_{j=1}^{2}\left\|u_{x_j}\right\|_{L_2(O)}^2 = \sum_{j=1}^{2}\left\|w_{x_j}\right\|_{L_2^{2N}(O_1)}^2 = \left\|w_{x_j}\right\|_{H^{1,2N}(O_1)}^2,$$

Неравенство (10) принимает вид

$$Re\sum_{i,j=1}^{2}\left(T_{ij}w_{x_i}, w_{x_j}\right)_{L_2^{2N}(O_1)} \geq c_1\|w\|_{H^{1,2N}(O_1)}^2 - c_2\|w\|_{L_2^{2N}(O_1)}^2,$$

где $w \in C_0^{\infty,2N}(O_1)$ – произвольная вектор-функция. Отсюда и из классических результатов о сильно эллиптических системах [20] следует, что для всех натуральных N матричный оператор $-\sum_{i,j=1}^{2}\partial_i T_{ij}\partial_i$ сильно эллиптический:

$$\sum_{i,j=1}^{2}\xi_i\xi_j\left(\left(T_{ij} + T_{ij}^*\right)z, z\right) \geq \frac{c_1}{2}|\xi|^2|z|^2 \;\; (\xi \in \mathbb{R}^2, z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}).$$

При этом c_1 – это постоянная из неравенства (10), т. е. c_1 не зависит в том числе и от N. Получается, что для каждого вектора $\xi \in \mathbb{R}^2/\{0\}$ матрицы $\sum_{i,j=1}^{2} \xi_i \xi_j \left(T_{ij} + T_{ij}^*\right)$ положительно определены равномерно по N. По лемме 2 функциональный оператор

$$Re \sum_{i,j=1}^{2} \xi_i \xi_j t_{ij}^{\pm}(\lambda) > 0 \ \ (\lambda \in \mathbb{C}, \qquad |\lambda| = 1, \qquad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^2).$$

положительно определен при любом ненулевом векторе ξ, который играет здесь роль параметра. Поэтому

Следствие 2. *Предположим, что для уравнения (7) выполнено условие (12). Тогда для любой ограниченной области* Ω *спектр краевой задачи (7), (8) состоит из изолированных собственных значений конечной кратности и располагается в правой полуплоскости:* $Re\mu > 0$. *В частности, при μ = 0 краевая задача (7), (8) имеет единственное обобщенное решение для всех функций* $f \in L_2(\Omega)$. *При любом* $\mu \in \mathbb{C}$ *задача (7), (8) фредгольмова.*

Доказательство основано на неравенстве (10) и проводится стандартными методами функционального анализа (см., например, [11, 13, 14]).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \left(a_{ij0} u_{x_i}(x) + a_{ij1} p^{-1} u_{x_i}(x/p) + b_{ij0} u_{x_i}(-x)\right)_{x_j} = f(x) \ \ (x \in \Omega). \ (13)$$

Его символом будет выражение $g_0^+(\xi) \pm g_0^-(\xi) + g_1^+(\xi)\lambda$, где

$$g_0^+(\xi) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij0} \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}, \qquad g_0^-(\xi) = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij0} \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}, \qquad g_1^+(\xi) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij1} \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}.$$

Условие $Re(g_0^+(\xi) \pm g_0^-(\xi)\lambda) > 0$ при $\lambda \in \mathbb{C}, \ |\lambda| = 1, \xi \neq 0$ сводится, очевидно, к неравенству

$$|Reg_0^-(\xi)| + |g_0^+(\xi)| < Reg_0^+(\xi) \ \ (|\xi| = 1).$$

При его выполнении уравнение (13) сильно эллиптическое, и для любой ограниченной области Ω задача Дирихле для уравнения (13) в Ω однозначно разрешима.

Пример 2. Для уравнения

$$-\Delta u(x) - 2\left(ap^{-1}u_{x_1}(x/p) + bu_{x_1}(-x)\right)_{x_2} = f(x)\ (x \in \Omega) \qquad (14)$$

условие (12) выглядит следующим образом:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + 2\xi_1\xi_2 re(a\lambda \pm b) > 0\ \ (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, \xi \neq 0).$$

Данное неравенство сводится, очевидно, к проверке условия $-1 < Re(a\lambda \pm b) < 1$ для всех $|\lambda| = 1$, что равносильно $|a| + |Re\ b| < 1$. Итак, при $|a| + |\ Re\ b| < 1$ задача Дирихле для уравнения (14) в ограниченной области Ω однозначно разрешима.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$-\sum_{ij=1}^{2}\left(a_{ij0}u_{x_i}(x) + b_{ij1}u_{x_i}(-x/p)\right)_{x_j} = f(x)\ \ (x \in \Omega). \qquad (15)$$

Его символом будет выражение $g_0^+(\xi) \pm g_1^-(\xi)\lambda$, где

$$g_0^+ = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij0}\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}, \qquad g_1^- = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij1}\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}.$$

Условие $Re(g_0^+(\xi) \pm g_1^+(\xi)\lambda) > 0$ при $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, \xi \neq 0$ сводится к проверке неравенства

$$|g_1^-(\xi)| < Re\ g_0^+(\xi)\ \ (|\xi| = 1).$$

При его выполнении уравнение (15) сильно эллиптическое, и для любой ограниченной области Ω задача Дирихле для уравнения (15) в Ω однозначно разрешима.

Пример 4. Для уравнения

$$-\Delta u(x) - 2\left(au_{x_1}(x) + bu_{x_1}(-x/p)\right)_{x_2} = f(x)\ \ (x \in \Omega) \qquad (16)$$

условие (12) выглядит следующим образом:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + 2\xi_1\xi_2 Re(a \pm b\lambda) > 0\ \ (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, \xi \neq 0).$$

Данное неравенство сводится к проверке условия $-1 < Re(a \pm b\lambda) < 1$ для всех $|\lambda| = 1$, что равносильно $|Re\ a| + |b| < 1$. Получаем, что при $|Re\ a| + |b| < 1$ задача Дирихле для уравнения (16) в ограниченной области Ω однозначно разрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян В. А. К теории флуктуаций яркости в млечном пути // Докл. АН СССР. 1944. Т. 44, № 6. С. 244–247.
2. Ockendon J. R., Tayler A. B. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive // Proc. Royal Soc. London A. 1971. V. 322. P. 447–468.
3. Hall A. J., Wake G. C. A functional differential equation arising in the modeling of cell growth // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. 1989. V. 30, N 4. P. 424–435.
4. Mahler K. On a special functional equation // J. London Math. Soc. 1940. V. 15, N 2. P. 115–123.
5. Gaver Jr. D. P. An absorption probability problem // J. Math. Anal. Appl. 1964. V. 9, N 3. P. 384–393.
6. Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Эллиптические задачи с растяжениями-сжатиями на многообразиях с краем // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 10. С. 1383–1392.
7. Kato T., McLeod J. B. Functional differential equation $\dot{y} = ay(\lambda t) + by(t)$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77, N 6. P. 891–937.
8. Дерфель Г. А., Молчанов С. А. Спектральные методы в теории дифференциально-функциональных уравнений // Мат. заметки. 1990. Т. 47, № 3. С. 42–51.
9. Iserles A. On neutral functional-differential equation with proportional delays // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 207, N 1. P. 73–95.
10. Skubachevskii A. L. The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations // J. Differ. Equ. 1986. V. 63, N 3. P. 332–361.
11. Skubachevskii A. L. Elliptic functional differential equations and applications. Basel: Birkh¨auser Verl., 1997. (Oper. Theory Adv. Appl.; V. 91).
12. Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л. Общие краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений // Тр. Санкт-Петербург. мат. о-ва. 1998. Т. 5. С. 223–288.

13. Скубачевский А. Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71, № 5. С. 3–112.
14. Россовский Л. Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции // Современная математика. Фундаментальные направления. 2014. Т. 54. С. 3–138.
15. Россовский Л. Е., Тасевич А. Л. Первая краевая задача для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 5. С. 733–748.
16. Rossovskii L. Elliptic functional differential equations with incommensurable contractions // Math. Model. Nat. Phenom. 2017. V.
17. P. 226–239. 17. Rossovskii L. E., Tovsultanov A. A. Elliptic functional differential equations with affine transformations // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 480. P. 123403.
18. Товсултанов А. А. Функционально-дифференциальное уравнение с растяжением и поворотом // Владикавк. мат. журн. 2021. Т. 23, № 1. С. 77–87.
19. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
20. Вишик М. И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Мат. сб. 1951. Т. 29, № 3. С. 615–676.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При исследовании нелинейных сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с ядрами Гильберта и Коши, а также нелинейных уравнений типа свертки, в пространствах Лебега L_p весьма плодотворным оказывается метод максимальных монотонных (по Браудеру-Минти) операторов, позволяющий при достаточно легко обозримых ограничениях на нелинейность доказывать глобальные теоремы о существовании, единственности, оценках и способах нахождения решений. В отличие от предшествующих работ, в которых обращаются линейные интегральные операторы, наше исследование основано на обращении нелинейных функциональных операторов суперпозиции и установлении коэрцитивности обратных к ним операторов.

При исследовании интегральных и интегро-дифференциальных уравнений со степенными нелинейностями и разностными, суммарными или суммарно-разностными ядрами в конусах пространства непрерывных функций $C[0,\infty)$ более эффективным оказался метод весовых метрик (метод априорных оценок), являющийся аналогом метода А. Белицкого, позволивший доказать глобальные теоремы о существовании, единственности, оценках и способах нахождения решений без ограничений на область существования решений, которые приходится накладывать при применении классического принципа сжимающих отображений. Установлено также, что при построении метрики в случае уравнений с разностными ядрами целесообразно использовать априорную оценку снизу решений, а в случае уравнений с суммарными или суммарно-разностными ядрами следует использовать априорную оценку сверху. Это замечание справедливо и относительно систем таких уравнений.

При рассмотрении оператора типа свертки, называемого обобщенным потенциалом Бесселя, с многочисленными приложениями в теории потенциала, такими как решения неоднородных уравнений, теория функциональных пространств и функциональное пополнение, находятся решения неоднородного интегрированного сингулярного экранированного уравнения Пуассона $(I-\Delta_\gamma)^k u = f, k \in N$.

Представлена форма обратного оператора, используя технику регуляризации расходящихся интегралов в терминах соответствующих отрезков ряда Тейлора-Дельсарта. Обращение можно интерпретировать как новый оператор дробного дифференцирования произвольного положительного порядка. Дальнейшие задачи в этом направлении включают подробное исследование этих операторов в различных пространствах функций, а также анализ дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка с дробными производными в виде обращений обобщенного потенциала Бесселя.

Введены нормы в пространстве обобщенных бесселевых потенциалов на основе весовых интегралов Дирихле. Обобщение достигается путем рассмотрения оператора Лапласа - Бесселя, построенного на основе сингулярного дифференциального оператора Бесселя.

Показано, что обобщенный потенциал Бесселя функции, интегрируемой в p-й степени со степенным весом, может быть представлен интегралом очень простого вида, при помощи ядра Гаусса-Вейерштрасса.

В работе в качестве практической значимости дифференциального исчисления рассмотрены функционально-дифференциальные уравнения с аффинными преобразованиями аргумента (т.е. комбинациями сжатий/растяжений и сдвигов), обобщающие хорошо известное уравнение пантографа, которые находят применение в самых разных областях: астрофизике, нелинейных колебаниях, биологии, теории чисел, теории вероятности. Они являются модельными в классе уравнений с неограниченным запаздыванием, а изучение их многомерных аналогов имеет существенное значений при построении общей теории эллиптических краевых задач для уравнений с бесконечномерной неизометрической группой сдвигов.

Рассмотрена краевая задача в ограниченной плоской области для функционально-дифференциального уравнения второго порядка, содержащего комбинацию растяжений и поворотов старших производных искомой функции.

Найдены необходимые и достаточные условия в алгебраической форме выполнения неравенства типа Гординга, обеспечивающего однозначную (фредгольмову) разрешимость, дискретность и секториальную структуру спектра задачи Дирихле. В литературе в данной ситуации принят термин сильно эллиптическое уравнение. Вывод упомянутых условий, выражаемых непосредственно через коэффициенты уравнения, основан на комбинации преобразований Фурье и Гельфанда элементов коммутативной B $*$-алгебры, порожденной операторами растяжения и поворота. Основной момент здесь — выяснение структуры пространства максимальных идеалов этой алгебры. Доказано, что пространство максимальных идеалов гомеоморфно прямому произведению спектров оператора растяжения (окружность) и оператора поворота (вся окружность в случае, когда угол поворота α несоизмерим с π, и конечный набор точек на окружности, когда α соизмерим с π). Такое различие между двумя случаями для α приводит к тому, что в зависимости от α условия однозначной разрешимости краевой задачи могут иметь существенно разный вид и, например, для α соизмеримого с π, могут зависеть не только от абсолютной величины, но и от знака коэффициента при слагаемом с поворотом.

Исследована задача Дирихле для функционально-дифференциального уравнения со держащего комбинацию сдвигов и сжатия аргумента искомой функции под знаком оператора Лапласа. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости в гладкости обобщенного решения. Показано также, что задача может иметь бесконечномерное многообразие решений.

Асхабов С.Н., Джабраилов А.Л., Товсултанов А.А.

Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с суммарно-разностными ядрами и начально-краевые задачи

Монография

Подписано в печать 15.12.2022 г. Формат 60x90/16
Бумага офисная. Печать-ризография.
У.п.л. 5,9. Тираж 500 экз.

Издательство ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова»
Адрес: 364037, Чеченская Республика, г. Грозный, ул. Субры Кишиевой, 33